УДК 519.81

К ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИТУАЦИИ В ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

В.М. МИХАЛЕВИЧ

Даны определения так называемой параметрической и непараметрической модели для ситуаций с причинно-следственным механизмом, который описывается статистической закономерностью. . Показано, что эти модели эквивалентны (равносильны), т.е. охватывают весь класс ситуаций с решениями, неопределенность последствий которых описывается статистическими закономерностями.

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении системы принятия решения, представляющей собой пару (того, кто принимает решение и ситуации принятия решения [1]), возникает вопрос о взаимосвязи двух форм схем ситуации — параметрической (матричной) и непараметрической (лотерейной) [2], а также двух соответствующих им форм моделей этой ситуации. В данной работе показано, что для моделирования любых ситуаций можно всегда использовать параметрическую форму. Полученные результаты являются уточнением и обобщением результатов статьи [3].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Дадим несколько предварительных определений.

Определение 1. Статистической закономерностью на Θ, где Θ — произвольное множество с заданной алгеброй подмножества Σ (если Σ не задается, то считается, по умолчанию, что $\Sigma = 2^{\Theta}$) называется всякое непустое замкнутое множество P в топологии $\tau(\Theta)$ пространства

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^{\Sigma} : p(\Theta) = 1,$$

$$p(C \cup D) = p(C) + p(C \setminus D),\ \forall C, D \in \Sigma\}$$

всех аддитивных вероятностных мер на Θ, являющейся следом * — слабой топологии в сопряженном к банаховому пространству $B_{\Sigma}(\Theta)$ (всех Σ измеримых ограниченных функций на Θ) с нормой $\|f\| := \sup_{\theta \in \Theta} |f(\theta)|$ [3]. Иными словами, для топологии $\tau(\Theta)$ определяющей системой окрестностей точки p в пространстве $PF(\Theta)$ являются множества вида $U_{\varepsilon, f_1, f_2, \ldots, f_n}(p) =$ $= \{p' \in PF(\Theta) : |\int_{\Theta} f_i\, p(d\theta) - \int_{\Theta} f_i\, p'(d\theta)| < \varepsilon\ \ \forall i \in \overline{1,n}\}$, для любых $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in B_{\Sigma}(\Theta)$.

Замечание. Данное определение обобщает определение статистической закономерности на Θ приведенное в [1, 4], когда $\Sigma = 2^{\Theta}$, т.е. $f \in M(\Theta)$.

Семейство всех статистических закономерностей на Θ будем обозначать $P(\Theta)$. Отметим также, что в топологии $\tau(\Theta)$ пространство $PF(\Theta)$ компактно.

Определение 2. Упорядоченную тройку (Θ, Σ, P), где Θ — произвольное непустое множество с заданной алгеброй подмножеств Σ, а P — статистическая закономерность на Θ будем называть пространством с распределением.

Определение 3. Лотерейной формой схемы ситуаций задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная тройка вида (X, U, R), где R — график соответствия из произвольного непустого множества U в произвольное непустое множество X, для которого $\operatorname{dom} R = U$ и $\operatorname{im} R = X$. При этом X называется *множеством последствий*, U — *множеством решений*, R — *соответствием ССЗР* (X, U, R).

Класс всех упорядоченных троек вида $\hat{Z} := (X, U, R)$ обозначим $\hat{\mathbb{Z}}$.

Определение 4. Матричной формой ССЗР называется упорядоченная четверка вида (X, Θ, U, g), где g — отображение из $\Theta \times U$ на X для произвольных непустых множеств X, Θ, U.

При этом множество X называется *множеством последствий*, Θ — *множеством значений ненаблюдаемого параметра*, U — *множеством решений*, а g — *отображением последствий* ССЗР (X, Θ, U, g).

Пусть $\mathbb{Z}$ — класс всех упорядоченных четверок вида $Z := (X, \Theta, U, g)$. Тогда $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Определение 5. Проекцией ССЗР класса $\mathbb{Z}$ называется такое отображение $\overset{\wedge}{Пр} : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$, что для любой ССЗР $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $\overset{\wedge}{Пр}\,((X, \Theta, U, g)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, где для любых $u \in U$ $R(u) = X_u = g(\Theta, u)$.

Пусть для любого $u \in U$ (X_u, Ξ_u) — измеримое пространство, т.е. Ξ_u — некоторая алгебра подмножеств множества X_u.

Предположим, что на алгебре $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (алгебра, порожденная полукольцом $\prod_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ [5] для каждого $n \in N$ и для любой выборки $u_1, \ldots, u_n$, где u_i $(i = \overline{1, n})$ — произвольные точки множества U, определено множество вероятностных мер

$$P_{u_1, \ldots, u_n} \subseteq \left\{ p_{u_1, \ldots, u_n} \in PF\left(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i} \right) \right\}, \tag{1}$$

причем семейство множеств (1) удовлетворяет следующим *условиям согласованности* для любых $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$:

- для любой $p_{u_1,\ldots,u_{n+m}} \in P_{u_1,\ldots,u_{n+m}}$, $p_{u_1,\ldots,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{n+m}}(A^{(n)} \times$ $\times \prod_{i=1}^{m} X_{n+i}) = p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)})$, где $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$;
- для любой $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$, $p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = p_{s(u_1,\ldots,u_n)}(\{s(a):$ $a \in A^{(n)}\})$, где $s(u_1,\ldots,u_n)$ — любая перестановка элементов $u_1,\ldots,u_n$.

Рассмотрим теперь класс ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}$ с заданными статистическими закономерностями, описывающими «механизм случайности» исходов каждого действия соответствующих множеств решений этой ССЗР. Тогда каждой ССЗР этого класса $(X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u))$, где для любого $u \in U$ X_u — непустое подмножество множества X, а $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$ соответствует упорядоченная четверка вида $(X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u), \{P_u : u \in U\})$, где (X_u, Ξ_u, P_u) — любое пространство с распределением, алгебра Ξ_u которого является следом алгебры Ξ в X_u (т.е. $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$). Через $\hat{\mathbb{Z}}P$ обозначим класс всех четверок указаного вида.

Рассмотрим также ССЗР класса $\mathbb{Z}$ с заданной статистической закономерностью, описывающей «механизм случайности» состояний природы. Этой ССЗР будет соответствовать упорядоченная пятерка вида (X, Θ, U, g, P), где $\{\Theta, \Sigma, P\}$ — пространство с распределением.

Тогда через $\mathbb{Z}P$ $(\hat{\mathbb{Z}}P)$ обозначим класс всех пятерок (четверок) указанного вида. Элементы класса $\mathbb{Z}P$ $(\hat{\mathbb{Z}}P)$ будем называть ССЗР с распределением (распределениями) в матричной (лотерейной) форме.

Определение 6. *Моделью* СЗР (МСЗР) со статистической закономерностью будем называть ее параметрическую схему, дополненную статистической закономерностью на Θ и обозначать через M, т.е. $M := (X, \Theta, U, g, P)$, где $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, $P \in P(\Theta)$.

МСЗР со статистическими закономерностями будем называть ее непараметрическую схему, дополненную семейством согласованых статистических закономерностей на множествах $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, $u_i \in U, u_{i_1} \neq u_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2, n \in N$ и обозначать коротко $\hat{M} := (X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u)), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, где

$$\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u)) \in \hat{\mathbb{Z}}, (u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}, P_{u_1,\ldots,u_n} \in P(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}).$$

Замечание. Если элемент класса $\mathbb{Z}P$ определяет соответствующую МСЗР со статической закономерностью (X, Θ, U, g, P), то элемент класса $\hat{\mathbb{Z}}P$, вообще говоря, МСЗР со статистическими закономерностями не определяет. Ясно, что не достает информации о совместных распределениях исходов конечных последовательностей действий ТПР-а.

На уровне схем ситуации очевидно, что параметрическая ситуация не менее информативна, чем соответствующая ей (т.е. моделирующая ту же СЗР) непараметрическая ситуация. При этом ясно, что каждой параметрической ССЗР соответствует единственная непараметрическая ССЗР той же СЗР, являющаяся ее проекцией. А именно, для любой ССЗР $Z=(X,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}$ соответствующая ей ССЗР из $\hat{\mathbb{Z}}$ имеет вид $\hat{Z}=(X,U,\bigcup\limits_{u\in U}(u,X_u))$, где $X_u:=g(\Theta,u):=\{g(\theta,u):\theta\in\Theta\},(u,X_u):=\{(u,x):$ $:x\in X_u\},\forall u\in U$.

Ниже мы покажем, что для любой ССЗР $\hat{Z}\in\hat{\mathbb{Z}}$ найдется параметрическая ССЗР Z (не единственная), проекция которой совпадает с $\hat{Z}$, т.е. $\hat{\mathit{\Pi p}}(Z)=\hat{Z}$. В этом случае мы будем говорить, что ССЗР Z является *представлением* ССЗР $\hat{Z}$.

Менее очевидно, что так же обстоит дело с параметрическими и непараметрическими МСЗР со статистическими закономерностями. Для точной формулировки этого результата введем необходимые определения.

Определение 7. Параметрическая МСЗР $M=(X,\Theta,U,g,P)$ называется *представлением* МСЗР $\hat{M}=(X,U,\bigcup\limits_{u\in U}(u,X_u),\{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, если существуют пространство со статистической закономерностью (Θ,Σ,P), семейство измеримых пространств $\{(X_u,\Xi_u):u\in U\}$, и отображение $g:\Theta\times U\to X$ такое, что $X_u=g(\Theta,u),\Xi_u:=\{g^{-1}(B,u):B\in\Sigma\}$, а конечномерные статистические закономерности $\{P_{u_1,\ldots,u_n}\}$ случайного отображения $g(\theta,u)$ совпадают с заданным семейством (1).

Ясно, что при этом g — (Σ,Ξ_u) — измеримое при каждом $u\in U$ (т.е. $\forall\, A\in\Xi_u$ и $\forall\, u\in U$ множество $\{\theta:g(\theta,u)\in A\}$ принадлежит алгебре Σ), где $\Xi_u=\Xi\cap 2^{X_u}$.

Определение 8. Если $\{(X_u,\Xi_u):u\in U\}$ некоторая совокупность измеримых подпространств пространства X, Θ — пространство всех таких отображений θ, заданных на множестве U со значениями в пространстве X, что $\theta(u)\in X_u\ \forall u\in U$ и $A^{(n)}\in\bigotimes\limits_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$, где $u_i\in U$ $(i=\overline{1,n})$, то множество отображений $\theta\in\Theta$, для которых точка $(\theta(u_1),\ldots,\theta(u_n))$ из $\prod\limits_{i=1}^{n}X_{u_i}$ принадлежит $A^{(n)}$. Т.е. множество $C_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)})=\{\theta(u):(\theta(u_1),\ldots,\theta(u_n))\in A^{(n)}\}$ называется *цилиндрическим множеством* в Θ с основанием $A^{(n)}$ над координатами $u_1,\ldots,u_n$.

Ясно, что если точки $u_1,\ldots,u_n$ фиксированы, то между цилиндрическими множествами над координатами $u_1,\ldots,u_n$ (их совокупность обозначим $\mathbb{C}_{u_1,...,u_n}$) и элементами алгебры $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ существует изоморфизм: каждое множество $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ определяет цилиндрическое множество $C_{u_1,...,u_n}(A^{(n)})$, для которого оно служит основанием; разным основаниям соответствуют разные цилиндрические множества; объединению, разности или пересечению оснований соответствует объединение, разность или пересечение цилиндрических множеств, что непосредственно вытекает из определения цилиндрического множества. Кроме того, легко заметить, что любые два цилиндрических множества можно всегда рассматривать как цилиндрические множества над одной и той же последовательностью координат. Отсюда следует, что, рассматривая алгебраические действия над конечным числом цилиндрических множеств, можно считать, что они заданы над фиксированной последовательностью координат. Поэтому класс $\mathbb{C}$ всех цилиндрических множеств образует алгебру множеств.

Определение 9. МСЗР со статистическими закономерностями $\hat{M} \in \hat{\mathbb{M}}$ называется *проекцией* МСЗР $M = \{X, \Theta, U, g, P\} \in \mathbb{M}$, где отображение g — (Σ, Ξ_u) — измеримое при каждом $u \in U$, если $\hat{M} = (X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u),$ $\{P_{u_1,...,u_n}\})$, где для любого $u \in U$, $X_u := g(\Theta, u), \Xi = \bigotimes_{u \in U} \Xi_u$, $u_1,...,u_n$ — любая выборка из U и каждая вероятностная мера $p_{u_1,...,u_n}$ на $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, определяющая множество $P_{u_1,...,u_n}$, такая, что для каждого $A^{(n)} \in \prod_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ и некоторой $p \in P \in P(\Theta)$ имеет место

$$p_{u_1,...,u_n}(A^{(n)}) := p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2),..., g(\theta, u_n)) \in A^{(n)}\}. \qquad (2)$$

Из определения видно, что операция проектирования параметрических моделей со статистическими закономерностями однозначная, т.е. у каждой параметрической МСЗР со статистической закономерностью имеется единственная проекция.

Теорема 1. Любая параметрическая МСЗР со статистической закономерностью (X, Θ, U, g, P), где отображение последствий g — (Σ, Ξ_u) — измерима для каждого $u \in U$, является представлением своей проекции.

Доказательство. Пусть $M = (X, \Theta, U, g, P) \in \mathbb{M}$, а $\hat{M} = (X, U,$ $\bigcup_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,...,u_n}\})$ является ее проекцией. Очевидно, что семейство множеств $\{P_{u_1,...,u_n}\}$ удовлетворяет условиям согласованости. В обосновании нуждается лишь то, что семейство $\{P_{u_1,...,u_n}\}$ является семейством статистических закономерностей. Это равносильно тому, что когда вероятностная мера p пробегает замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P, то для любого $n \in N$ и любой выборки $u_1,...,u_n$ из множества U вероятностные меры $P_{u_1,...,u_n}$ будут образовывать замкнутое в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множество $P_{u_1,...,u_n}$. Действительно, если предположить противное, т.е., что для некоторой выборки $u_1, u_2,...,u_n$ из множества U множетсво $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}) \setminus P_{u_1,...,u_n}$ не будет открытым в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, то существует такая вероятностная мера $p_{u_1,...,u_n}$ из множества $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, не входящая в множество $P_{u_1,...,u_n}$, что для любых $k, m \in N$ найдется вероятностная мера $p_{k,u_1,...,u_n}$ из множества $P_{u_1,...,u_n}$, для которой при любых $f_1, f_2,..., f_m \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$

$$| \int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f_j(x_{u_1},...,x_{u_n}) p_{k,u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n})) -$$

$$- \int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f_j(x_{u_1},...,x_{u_n}) p_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n})) | < \frac{1}{k}, \; j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Пусть $Y := \{(g(\theta,u_1),..., g(\theta,u_n)) : \theta \in \Theta\}$. В силу (Σ, Ξ_u) — измеримости отображения $g(\theta,u)$ при любых $u \in U$, множество Y является $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$-измеримым. Тогда для любой вероятностной меры $q_{u_1,...,u_n}$, заданной на измеримом пространстве $(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}, \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i})$, сосредоточенной на множестве Y и любой функции $f \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ имеем

$$\int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f(x_{u_1},...,x_{u_n}) q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n})) =$$

$$= \int_{Y} f(x_{u_1},...,x_{u_n}) q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n})) +$$

$$+ \int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i} \setminus Y} f(x_{u_1},...,x_{u_n}) q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n})). \tag{4}$$

Но, в силу ограниченности f, найдется такое число μ, что $|f(x_{u_1},...,x_{u_n})|\leq\mu$ для любых $(x_{u_1},...,x_{u_n})\in\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}$. А значит

$$|\int\limits_{\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}\backslash Y} f(x_{u_1},...,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n}))|\leq$$

$$\leq\mu\int\limits_{\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}\backslash Y} q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n}))=\mu q(\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}\setminus Y)=0.$$

Тогда имеем из (4), что

$$\int\limits_{\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}} f(x_{u_1},...,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n}))=$$

$$=\int\limits_{Y} f(x_{u_1},...,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},...,x_{u_n}))=\int\limits_{\Theta} f(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n))q(d\theta), \quad (5)$$

где для любого $B\in\Sigma$

$$q(B):=q_{u_1,...,u_n}(\{(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n)):\theta\in B\}). \quad (6)$$

Следовательно, воспользовавшись равенством (5), для любых мер p_k и p на Θ, удовлетворяющих соотношению (2) относительно соответствующих мер $p_{k,u_1,...,u_n}$ и $p_{u_1,...,u_n}$ на $\prod_{i=1}^{n}X_{u_i}$, неравенство (3) можно переписать в виде

$$|\int\limits_{\Theta} f_j(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n))p_k(d\theta)-$$

$$-\int\limits_{\Theta} f_j(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n))p(d\theta)|<\frac{1}{k},\ j=\overline{1,m}. \quad (7)$$

Теперь определим на множестве Θ отношение эквивалентности таким образом, что для любых $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ имеет место

$$\theta_1\sim\theta_2\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\theta_1(u_i)=\theta_2(u_i),\ i=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Транзитивность, симетричность, рефлексивность определенного соотношением (8) соответствия очевидна. Обозначим класс эквивалентности элемента θ из фактор-множества $\Theta/\sim$ через $\widetilde{\theta}$ (проекция елемента θ относительно эквивалентности $(\sim)$), т.е. $\Theta/\sim=\{\widetilde{\theta}:\theta\in\Theta\}:=\widetilde{\Theta}$. Соответственно алгебру, порожденную алгеброй $\sum$ при этом проектировании, обозначим $\widetilde{\sum}$, а ее элемент, являющийся проекцией элемента $B\in\sum$ — через $\widetilde{B}$. Ясно, что алгебра $\widetilde{\sum}$ изоморфна алгебре $\bigotimes_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$.

Тогда для всякой меры $p \in PF(\Theta)$ можно определить меру $\widetilde{p} \in PF(\widetilde{\Theta})$ так, что для любых $B \in \sum$

$$\widetilde{p}(\widetilde{B}) := p(B). \tag{9}$$

При этом произвольное множество мер $P \subseteq PF(\Theta)$ замкнуто в топологии $\tau(\Theta)$ тогда и только тогда, когда соответствующее ему множество мер $\widetilde{P} = \{\widetilde{p} : p \in P\}$, где p и $\widetilde{p}$ связаны соотношением (9), замкнуто в фактор-топологии относительно соответствия $(\sim)$ [6], совпадающей с $\tau(\widetilde{\Theta})$.

Далее определим функции F_j, $j = \overline{1, m}$ на $\widetilde{\Theta}$ так, что для любых $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}$

$$F_j(\widetilde{\Theta}) := f_j(g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), ..., g(\theta, u_n)). \tag{10}$$

Корректность данного определения следует из соотношения (8). При этом для каждого $j = \overline{1, m}$ функция F_j пробегает все множество $B_{\widetilde{\Sigma}}(\widetilde{\Theta})$, когда функция f_j пробегает множество $B_{\underset{i=1}{\overset{n}{\otimes}} \Xi_{u_i}} (\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, в силу $(\sum, \Xi_u)$ — измеримости отображения $g(\theta, u)$, $\forall u \in U$ и того, что $g(\Theta, u_i) = X_{u_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Теперь соотношение (7) можно переписать в следующем виде

$$\left| \int_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}(d\widetilde{\theta}) \right| < \frac{1}{k}, \; j = \overline{1, m}. \tag{11}$$

Таким образом, последовательность мер $\{\widetilde{p}_k, k \in N\}$ на $\widetilde{\Theta}$ сходятся в топологии $\tau(\widetilde{\Theta})$ к мере $\widetilde{p}$, а значит соответствующая ей последовательность мер $\{p_k, k \in N\}$ на Θ сходиться в топологии $\tau(\Theta)$ к мере p.

Так как меры $p_{k, u_1, ..., u_n} \in P_{u_1, ..., u_n}$, $\forall k \in N$, то определяющие их, согласно соотношению (2), меры p_k, по условию, принадлежат статистической закономерности P. Тогда, в силу замкнутости в топологии $\tau(\Theta)$ множества P и сходимости в топологии $\tau(\Theta)$ последовательности $\{p_k, k \in N\}$ к мере p, то и мера p принадлежит статистической закономерности P. А, значит, мера $p_{u_1, ..., u_n}$ определяется, согласно соотношению (2), мерой p из P, т.е $p_{u_1, ..., u_n} \in P_{u_1, ..., u_n}$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Теорема 2. Любая непараметрическая МСЗР со статистическими закономерностями допускает некоторое представление.

Доказательство. Предположим, что задана некоторая непараметрическая МСЗР со статистическими закономерностями $\hat{M} = (X, U,$

$\bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, где $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$. Покажем, что для $\hat{M}$ существует представление $M = (X', \Theta, U', g, P)$. Очевидно, что $X = X'$ и $U = U'$. В качестве пространства Θ возьмем пространство всех таких отображений θ, заданных на U со значениями в X, что $\theta(u) \in X_u$. Отображение g определим как такое, что $g(\theta, u) = \theta(u)$. Тем самым четверкой (X, Θ, U, g) мы задали представление ССЗР $\hat{Z} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u))$, где $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$.

Далее мы можем определить на алгебре цилиндрических множеств $\mathbb{C}$ пространства Θ для любой вероятностной меры $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$ функцию множеств $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$, положив

$$p(C) := p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}), \tag{12}$$

если C является цилиндрическим множеством с основанием $A^{(n)}$ над координатами $u_1,\ldots,u_n$. Условия согласованности обеспечивают корректность определения функции $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$. Пусть C_k, $k = \overline{1, m}$ — последовательность цилиндрических множеств. Не уменьшая общности, можно считать, что они заданы основаниями $A_k^{(n)}$ над одной и той же последовательностью координат $u_1,\ldots,u_n$. Алгебраическим операциям над множествами C_k соответствуют в точности те же самые действия над основаниями $A_k^{(n)}$. Так как вероятностная мера $p_{u_1,\ldots,u_n}$ аддитивна на $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, то отсюда следует, что функция множеств $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$ аддитивна на $\mathbb{C}$. Когда вероятностные меры $p_{u_1,\ldots,u_n}$ пробегают замкнутое в топологии $\tau(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множество $P_{u_1,\ldots,u_n}$, то семейство вероятностных мер p будет образовывать некоторое замкнутое в топологии $\tau(\Theta)$ множество P. Действительно, предположив противное, т.е., что множество $PF(\Theta) \setminus P$ не будет открытым в топологии $\tau(\Theta)$, получим существование такой вероятностной меры p из множества $PF(\Theta)$, не входящей в множетво P, что $\forall k \in N$ найдется вероятностная мера p_k из множества P, которая для любых функций $f_1, f_2, \ldots, f_m \in B_{\mathbb{C}}(\Theta)$, $m \in N$ удовлетворяет неравенству

$$|\int\limits_{\Theta} f_j(\theta) p_k(d\theta) - \int\limits_{\Theta} f_j(\theta) p(d\theta)| < \frac{1}{k}, \; j = \overline{1, m}. \tag{13}$$

Зафиксировав выборку $u_1, u_2, \ldots, u_n$ из множества U, рассмотрим произвольную совокупность таких m функций $f_1', f_2', \ldots, f_m'$, что, если

$\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}_2$, то $f'_j(\theta_1) = f'_j(\theta_2)$ для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ и $j = \overline{1, m}$, где эквивалентность $(\sim)$ определяется согласно (8).

Если для каждой такой функции f'_j, $j = \overline{1, m}$ определить функцию F'_j на Θ полагая $F'_j(\widetilde{\theta}) := f'_j(\theta)$ для любых $\theta \in \Theta$, что корректно, в силу определения функции f'_j, то $F'_j \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, где $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}$ — проекция алгебры $\mathbb{C}_{u_1,\dots,u_n}$ относительно эквивалентности $(\sim)$. При этом ясно, что функция F'_j пробегает все множество $B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, когда функция f_j пробегает множество $B_{\mathbb{C}}(\Theta)$.

Тогда для любой функции $F'_j \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, $j = \overline{1, m}$, в силу соотношения (13), получим, что

$$| \int_{\widetilde{\Theta}} F'_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int_{\widetilde{\Theta}} F'_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}(d\widetilde{\theta}) | < \frac{1}{k}, \tag{14}$$

где меры $\widetilde{p}_k, \widetilde{p}$ соответстуют мерам p_k, p, согласно соотношению (9).

Или, учитывая изоморфизм множеств $\widetilde{\Theta}$ и $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, в силу определения множества Θ, а также определений алгебры $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}$ и алгебры $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, имеем, что для любых функций $F''_1, F''_2, \dots, F''_m \in \; \in B_{\otimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, $m \in N$

$$| \int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{k, u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) -$$

$$- \int_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) p_{u_1, \dots, u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) | < \frac{1}{k}, \; j = \overline{1, m}. \tag{15}$$

Это вытекает из неравенства (14) при $F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) := F'_j(\widetilde{\theta})$, $j = \overline{1, m}$, где $\widetilde{\theta}$ такое, что $\theta(u_i) = x_{u_i}$, $i = \overline{1, n}$, для любых $(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, меры $p_{k, u_1, \dots, u_n}$, $p_{u_1, \dots, u_n}$ определяются соответственно по мерам p_k, p согласно (9).

Таким образом последовательность мер $\{p_{k, u_1, \dots, u_n}, k \in N\}$ сходится в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ к мере $p_{u_1, \dots, u_n}$.

Так как меры $p_k, \forall k \in N$ принадлежат множеству P, то определяющие их, согласно соотношению (3), меры $p_{k,u_1,\dots,u_n}$, по условию, принадлежат статистической закономерности $P_{u_1,\dots,u_n}$. Тогда, в силу замкнутости множества $P_{u_1,\dots,u_n}$ в топологии $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ и сходимости в этой топологии последовательности $\{p_{k,u_1,\dots,u_n}, k \in N\}$ к мере $p_{u_1,\dots,u_n}$, также и мера $p_{u_1,\dots,u_n}$ принадлежит статистической закономерности $P_{u_1,\dots,u_n}$. А значит, мера p определяется, согласно соотношению (3), мерой $p_{u_1,\dots,u_n}$ из $P_{u_1,\dots,u_n}$, т.е. $p \in P$, что противоречит предположению.

Таким образом представление для произвольной непараметрической МСЗР указано.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из полученных результатов следует, что оба класса моделей как параметрических, так и непараметрических охватывают все ситуации задач принятия решений, неопределенность последствий в которых описывается статистическими закономерностями.

В частности, этот результат позволяет, анализируя систему принятия решения, не уменьшая общности, считать ее ситуацию параметрической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanenko V.I.* Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin: Springer, 2010. — 272 p.
2. *Михалевич В.М.* О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 140–154.
3. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К моделированию стохастических ситуаций принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 1. — С.7–80.
4. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Об одном виде неопределенности. ДАН СССР. — 1979. — **248**. — № 3. — С. 539–542.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 530 с.
6. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1968. — 383 с.

Поступила 22.03.2011