

УДК 62-50

**КООРДИНУЮЧЕ КЕРУВАННЯ БАГАТОВИМІРНИМ
ОБ'ЄКТОМ ІЗ РІЗНОТЕМПОВОЮ ДИСКРЕТИЗАЦІЄЮ
В СТОХАСТИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МІЛЯВСЬКИЙ

Поставлено та вирішено задачу оптимального керування співвідношеннями між вихідними координатами багатовимірного різномірного об'єкта в стохастичному середовищі. Розглянуто основні схеми побудови системи керування, критерії оптимальності для таких систем, а також розроблено алгоритм цифрового керування на основі зведення задачі багатокритеріальної безумовної оптимізації до однокритеріальної умовної оптимізації. Наведено результати чисельного моделювання, що підтверджують практичну цінність цієї розробки.

ВСТУП

Задача керування співвідношеннями вихідних координат об'єкта (координуючого керування) у стохастичному середовищі є новою задачею в теорії керування. Усі відомі на сьогодні розробки, які стосуються координуючого керування, працюють у детермінованому середовищі. У той же час більшість об'єктів, що зустрічаються на практиці, мають стохастичну природу, тому задача керування співвідношеннями має вирішуватись і в такій постановці. Актуальність поставленої в роботі задачі зростає також унаслідок того, що нині системи керування починають все частіше застосовувати для управління соціальними, економічними, екологічними та іншими системами, які майже завжди мають стохастичну природу, для яких саме виконання певних базових співвідношень між координатами є першочерговим завданням. Різна частота дискретизації вимірів різних показників у таких системах також є поширеним явищем, тому за основу було взято різномірову модель об'єкта керування.

Мета роботи — розробка критеріїв, схем та методу керування співвідношеннями вихідних координат динамічного об'єкта в стохастичному середовищі при різноміровій дискретизації.

Слід зазначити, що ті методи, які на сьогодні розроблені для координуючого керування детермінованими об'єктами [1, 2], складно застосувати у стохастичному випадку. Це пов'язано, в першу чергу, з тим, що в цьому випадку неможливо вимагати чіткого виконання заданих співвідношень між координатами, оскільки всі сигнали є випадковими. Тому логічно запропонувати критерій мінімуму дисперсії заданого співвідношення за аналогією з

критерієм мінімуму дисперсії власне вихідної координати. Зрозуміло, що розв'язок задачі мінімізації дисперсії співвідношення буде не єдиним, так само, як і в детермінованому випадку. Тому, крім мінімізації цього базового критерію для однозначності розв'язку необхідно застосовувати також інший критерій. Природним критерієм є загальноприйнятий критерій мінімуму дисперсії різниці вихідних координат та задавальних діянь. Але, в загальному випадку, як буде видно з подальшого викладу, ці два критерії (за дисперсією співвідношення та дисперсією вихідної координати) мають різні точки мінімуму. Тобто, виникає задача багатокритеріальної оптимізації в стохастичному середовищі.

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ КООРДИНУЮЧОГО КЕРУВАННЯ

Нехай об'єкт керування задано у формі багатовимірної різнотемпової моделі ARMAX (Autoregressive moving average with exogenous input — авторегресії та ковзного середнього із додатковим вхідним сигналом) з малим періодом дискретизації збурень і великим періодом дискретизації вихідних координат і керування [3]:

$$A(z_1^{-1})Y(rh) = B(z_1^{-1})u(rh) + C(z^{-1})\zeta(kT_0), \quad (1)$$

$$\text{де } A(z_1^{-1}) = I - A_1z_1^{-1} - \dots - A_pz_1^{-p}, \quad B(z_1^{-1}) = B_1z_1^{-1} + B_2z_1^{-2} \dots + B_qz_1^{-q},$$

$$C(z^{-1}) = C_0 + C_1z^{-1} + \dots + C_s z^{-s},$$

$$s \geq m, \quad z_1^{-1} = z^{-m}, \quad h = mT_0, \quad r = \left[\frac{k}{m} \right], \quad \dim Y = \dim u = \dim \zeta = n,$$

де всі матриці квадратні ($n \times n$), h та T_0 — великий та малий періоди дискретизації відповідно; z^{-1} — оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 ; z_1^{-1} — оператор зворотного зсуву на період h ; $\left[\frac{k}{m} \right]$ — ціла частина числа $\frac{k}{m}$.

Для зручності подальших викладок і незалежності від порядків моделі введемо в розгляд таку координату:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}((r+1)h) &= Y((r+1)h) - B_1u(rh) - C_0\zeta((k+m)T_0) - \\ &\quad - C_1\zeta((k+m-1)T_0) - \dots - C_{m-1}\zeta((k+1)T_0) = \\ &= A_1Y(rh) + \dots + A_pY((r-p+1)h) + B_2u((r-1)h) + \dots + B_qu((r-q+1)h) + \\ &\quad + C_m\zeta(kT_0) + \dots + C_s\zeta((k+m-s)T_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Таким чином, $\tilde{Y}((r+1)h)$ є відомою на момент rh частиною $Y((r+1)h)$.

Введемо спочатку стандартний критерій узагальненої дисперсії відносно вектора задавальних діянь [4, 5]:

$$J_G(r+1) = E\{(Y(r+1) - G(r))^T (Y(r+1) - G(r)) + (u(r) - u(r-1))^T R(u(r) - u(r-1))\} \rightarrow \min . \quad (3)$$

Тут і далі часовий індекс h не вказується, тому що за припущенням задавального діяння є константою принаймні протягом великого періоду дискретизації. На кожному кроці алгоритму r під оператором E розумітимемо умовне математичне сподівання відносно всієї інформації, доступної на момент часу rh включно. Матриця R у (2) припускається симетричною, невід'ємно визначеною і такою, що $B_1^T B_1 + R$ — невироджена.

Для мінімізації (3) розділимо $Y(r+1)$ на відому і невідому частини, як у [5], тобто (враховуючи (2)):

$$Y(r+1) = \tilde{Y}(r+1) + B_1 u(r) + \tilde{\zeta}(r+1),$$

$$\tilde{\zeta}(r+1) = C_0 \zeta((r+1)h) + C_1 \zeta((r+1)h - T_0) + \dots + C_{m-1} \zeta((r+1)h - (m-1)T_0).$$

Тоді критерій (2) можна записати так:

$$J_G(r+1) = (\tilde{Y}(r+1) - G(r) + B_1 u(r))^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r) + B_1 u(r)) + (u(r) - u(r-1))^T R(u(r) - u(r-1)) + 2E\{(\tilde{Y}(r+1) - G(r) + B_1 u(r))^T \tilde{\zeta}(r+1)\} + E\{\tilde{\zeta}^T(r+1) \tilde{\zeta}(r+1)\}.$$

Останній доданок не залежить від $u(r)$, і тому похідна від нього по $u(r)$ дорівнює нулю. Передостанній доданок дорівнює нулю, тому що за припущенням вхідний шум має нульове середнє, є некорельованим і не залежить від решти змінних. Отже, перший співмножник можна винести за оператор математичного сподівання, а другий співмножник після цього дорівнюватиме нулю. Для того, щоб взяти похідну від перших двох доданків, скористаємось тим фактом, що похідна по вектору u від виразу типу $(Au + c)^T Q(Au + c)$, де Q — симетрична матриця, c — вектор, дорівнює $2A^T Q(Au + c)$ [7]. Отже,

$$\frac{\partial J_G(r+1)}{\partial u(r)} = 2B_1^T (B_1 u(r) + \tilde{Y}(r+1) - G(r)) + 2R(u(r) - u(r-1)).$$

Прирівняємо до нуля та перенесемо $u(r)$ в праву частину, після чого отримаємо $(B_1^T B_1 + R)u(r) = -B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) - Ru(r-1)$. Покажемо, що розв'язок цього рівняння є точкою мінімуму. Дійсно, $\frac{\partial^2 J_G(r+1)}{\partial u^2(r)} = 2(B_1^T B_1 + R)$, а $B_1^T B_1 \geq 0$, $R \geq 0$, тому $B_1^T B_1 + R \geq 0$, і за умовою $B_1^T B_1 + R$ — невироджена, тому $\frac{\partial^2 J_G(r+1)}{\partial u^2(r)}$ — додатно визначена, отже, маємо точку мінімуму [6].

Тоді відповідне керування $u_G(r)$ обчислюється за формулою:

$$u_G(r) = -(B_1^T B_1 + R)^{-1} [B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) - Ru_G(r-1)]. \quad (4)$$

Перейдемо безпосередньо до задачі координуючого керування. Нехай задано набір M співвідношень у вигляді:

$$SY(r) = b, \quad (5)$$

де b — заданий вектор розмірності M ; S — задана матриця розмірності $M \times n$, $M < n$, причому $\text{rang}(SB_1) = M$. Вимога координуючого керування полягає в тому, що співвідношення (5) має виконуватись максимально точно на кожному періоді дискретизації.

Введемо критерій мінімізації дисперсії нев'язки співвідношень:

$$J_b(r+1) = E\{(SY(r+1) - b)^T (SY(r+1) - b)\} \rightarrow \min. \quad (6)$$

Розглянемо проблему вибору задавального діяння G у такій постановці. Запропонуємо три схеми. Згідно зі схемою 1, задавальне діяння подається на вхід незалежно, без зворотного зв'язку, тобто воно визначене наперед (рис. 1), але при цьому має задовольняти співвідношенню (5), тобто $SG(r) = b$. Перевагами схеми 1 є простота та відсутність шумів у вхідних сигналах. Недоліком є те, що задаюче діяння не враховує, чи виконується реально співвідношення між вихідними координатами, тобто вимагається виконання співвідношення лише між ідеальними, бажаними, сигналами, а не між дійсними.

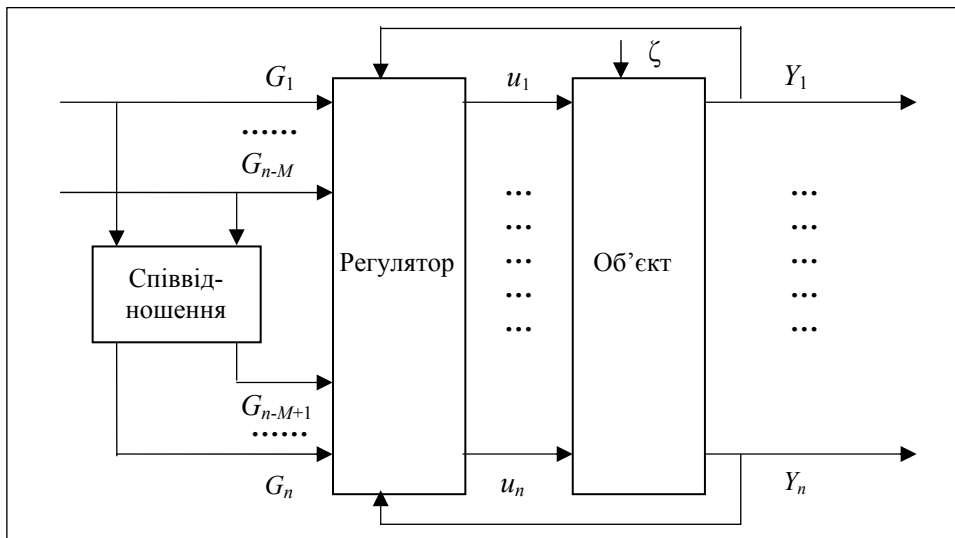


Рис. 1. Схема координуючого керування

Згідно з рис. 2 із фізичних міркувань серед вихідних змінних обирається $n - M$ ведучих і M ведених координат. Оскільки, за припущенням, усі співвідношення лінійно незалежні, то ведені координати можна виразити однозначно як лінійні комбінації ведучих. По прямих каналах ведучих координат подаються певні задавальні діяння (без обмежень), а замість задавальних діянь для ведених координат подаються відповідні лінійні комбінації

ведучих вихідних координат (рис. 2). Перевагою схеми на рис. 2 є той факт, що ми вимагаємо від системи, щоб ведені вихідні координати відповідали

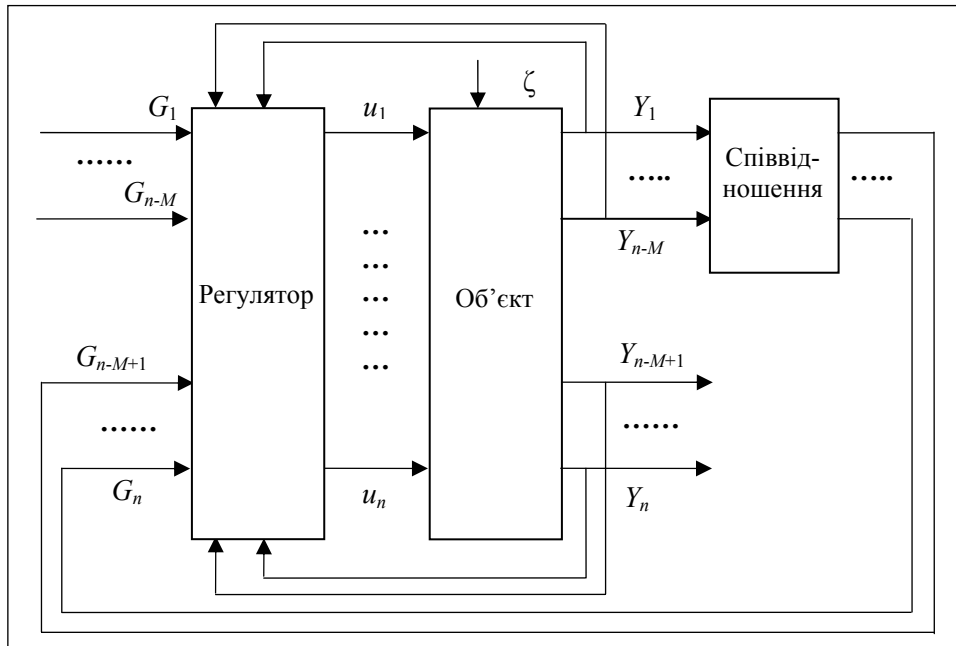


Рис. 2. Схема координуючого керування

необхідним співвідношенням ведучих вихідних координат, тобто виконання співвідношення тепер є не додатковою умовою, поряд із відпрацюванням вхідних сигналів, а основною умовою. Недоліком схеми є зашумленість задавальних діянь для ведених координат (тому що вони формуються на основі ведучих вихідних координат, що містять шум), що збільшує зашумленість системи в цілому. Крім того, вимагається виконання співвідношення між зашумленими сигналами, що не завжди доцільно на практиці. Частіше буває необхідно задовольняти співвідношенню між корисними складовими сигналів.

Схема на рис. 3 будується на основі схеми з рис. 2, але задавальні діяння ведених сигналів проходять через низькочастотні фільтри, перш ніж надійти на входи системи (рис. 3). Оскільки і фільтри, і співвідношення лінійні, то це еквівалентно тому, що вихідні ведучі сигнали фільтруються, і лише після цього обчислюються лінійні комбінації, відповідні веденим сигналам. Структура низькочастотного фільтра тут не відіграє принципової ролі, достатньо ковзного середнього (можливо, зваженого) з невеликим «вікном». Таким чином схема на рис. 3 зберігає переваги схеми з рис. 2, при цьому позбавляючись основного її недоліку — шуму на вході, тому схема з рис. 3 у більшості випадків є найбільш прийнятною. Недоліком її є відносна складність реалізації.

Зауважимо, що для подальших викладок неважливо, за якою із схем отримано задаючі діяння, тобто алгоритм регулятора в залежності від схеми змінювати не потрібно.

Розв'яжемо задачу мінімізації (6) по $u(r)$. Для цього підставимо у (6) замість $Y(r+1)$ вираз (враховуючи (2)):

$$Y(r+1) = \tilde{Y}(r+1) + B_1 u(r) + \tilde{\zeta}(r+1),$$

$$\tilde{\zeta}(r+1) = C_0 \zeta((r+1)h) + C_1 \zeta((r+1)h - T_0) + \dots + C_{m-1} \zeta((r+1)h - (m-1)T_0).$$

Тоді

$$J_b(r+1) = (S\tilde{Y}(r+1) + SB_1 u(r) - b)^T (S\tilde{Y}(r+1) + SB_1 u(r) - b) + 2E\{(S\tilde{Y}(r+1) + SB_1 u(r) - b)^T (S\tilde{\zeta}(r+1))\} + E\{\tilde{\zeta}^T(r+1)S^T S\tilde{\zeta}(r+1)\}.$$

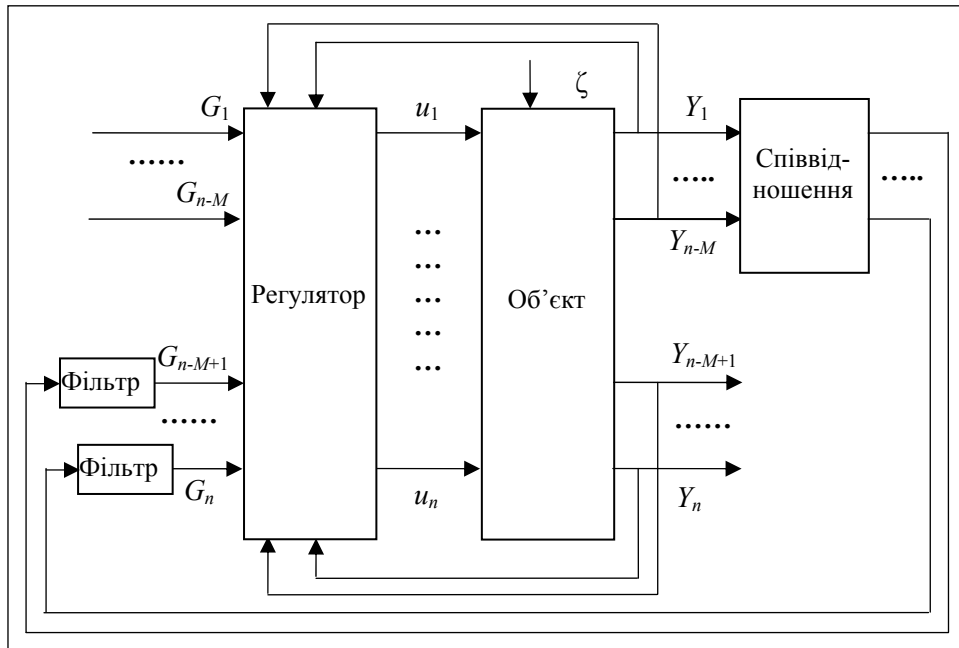


Рис. 3. Схема координуючого керування

Останній доданок не залежить від $u(r)$, і тому його під час мінімізації можна не враховувати. Передостанній доданок дорівнює нулю, тому що за припущенням вхідний шум має нульове середнє, є некорельованим і не залежить від решти змінних, отже, перший співмножник можна винести за оператор математичного сподівання, а другий співмножник після цього дорівнюватиме нулю. Перший доданок дорівнює евклідовій нормі вектора $S\tilde{Y}(r+1) + SB_1 u(r) - b$. Відомо, що норма вектора невід'ємна і дорівнює нулю тоді, і тільки тоді, коли вектор нульовий. Тому, якщо рівняння $SB_1 u(r) = -(S\tilde{Y}(r+1) - b)$ має розв'язок, то цей розв'язок є точкою глобального мінімуму критерію. За умовою, вектор $u(r)$ має розмірність n , $-(S\tilde{Y}(r+1) - b)$ — розмірність $M < n$, і $\text{rang}(SB_1) = M$. Тому за теоремою Кронекера-Капеллі [7] це рівняння має множину розв'язків, на яких і досягається мінімум критерію (6), а саме:

$$SB_1 u(r) = -(S\tilde{Y}(r+1) - b). \tag{7}$$

Взагалі, керування (4) не задовольняє рівності (7). Таким чином, маємо багатокритеріальну задачу оптимізації $u(r)$ по критеріях (3), (6), причому критерій (6) є за умовою більш пріоритетним, але має неоднозначний розв'язок.

МЕТОД УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ ДИСПЕРСІЇ НЕВ'ЯЗКИ СПІВВІДНО-ШЕНЬ ТА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИСПЕРСІЇ ВИХІДНИХ КООРДИНАТ

У цій роботі пропонується такий метод розв'язання поставленої задачі. Будемо розглядати рівність (7) як обмеження, що має обов'язково виконуватись при мінімізації критерію (3), тобто зведемо задачу безумовної багатокритеріальної оптимізації до задачі умовної однокритеріальної оптимізації.

Задачу умовної оптимізації будемо розв'язувати методом множників Лагранжа [6], а потім застосуємо теорему Фробеніуса для обернення блочної матриці [7]. У результаті отримуємо таку теорему.

Теорема. Нехай об'єкт керування задано у вигляді (1), і необхідно на кожному кроці формувати таке керуюче діяння, яке буде мінімізувати критерій оптимальності (3) при обмеженні (7). Тоді оптимальним буде таке значення $u(r)$:

$$u(r) = -(B_1^T B_1 + R)^{-1} \{ [I - B_1^T S^T L^{-1} S B_1 (B_1^T B_1 + R)^{-1}] + [B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) - Ru(r-1)] + B_1^T S^T L^{-1} [S\tilde{Y}(r+1) - b] \}, \quad (8)$$

якщо $B_1^T B_1 + R$ та $L = S B_1 (B_1^T B_1 + R)^{-1} B_1^T S^T$ — невироджені, $\tilde{Y}(r+1)$ задається формулою (2).

Доведення. Згідно із методом множників Лагранжа [6] для розв'язання задачі (3), (7) вводимо функцію Лагранжа:

$$l(u(r), \lambda) = J_G(r+1) + \lambda^T (S B_1 u(r) - b + S\tilde{Y}(r+1)),$$

де λ — невідомий вектор-стовпчик розмірності M . Візьмемо похідну, скориставшись правилами матричного диференціювання [7], і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial l}{\partial u(r)} = 2(B_1^T B_1 + R)u(r) + 2B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) - 2Ru(r) + B_1^T S^T \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = S B_1 u(r) - b + S\tilde{Y}(r+1) = 0.$$

Щоб розв'язати цю систему, подамо її у блочно-матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 2(B_1^T B_1 + R) & B_1^T S^T \\ S B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(r) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) + 2Ru(r-1) \\ -S\tilde{Y}(r+1) + b \end{pmatrix},$$

тоді

$$\begin{pmatrix} u(r) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(B_1^T B_1 + R) & B_1^T S^T \\ S B_1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) + 2Ru(r-1) \\ -S\tilde{Y}(r+1) + b \end{pmatrix}.$$

Скористаємось теоремою Фробеніуса про обернення блочної матриці [7], згідно з якою $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(I + BK^{-1}CA^{-1}) & -A^{-1}BK^{-1} \\ -K^{-1}CA^{-1} & K^{-1} \end{pmatrix}$, де вимагається невідродженість A та її доповнення Шура $K = D - CA^{-1}B$. Отже,

$$\begin{pmatrix} 2(B_1^T B_1 + R) & B_1^T S^T \\ SB_1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} 0,5(B_1^T B_1 + R)^{-1}[I + 0,5B_1^T S^T K^{-1}SB_1(B_1^T B_1 + R)^{-1}] & -0,5(B_1^T B_1 + R)^{-1}B_1^T S^T K^{-1} \\ -0,5K^{-1}SB_1(B_1^T B_1 + R)^{-1} & K^{-1} \end{pmatrix}, \\ K = -0,5SB_1(B_1^T B_1 + R)^{-1}B_1^T S^T.$$

Зауважимо, що до вже виконаної вимоги невідродженості $B_1^T B_1 + R$ додалась вимога невідродженості K .

Значення множників Лагранжа λ нас не цікавлять, тому випишемо тепер тільки формулу для $u(r)$:

$$u(r) = -0,5(B_1^T B_1 + R)^{-1} \{ [I + 0,5B_1^T S^T K^{-1}SB_1(B_1^T B_1 + R)^{-1}] \times \\ \times 2[B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) - Ru(r-1)] - B_1^T S^T K^{-1}[S\tilde{Y}(r+1) - b] \}.$$

Щоб позбавитись від множників 2 і 0,5, визначимо $L = SB_1(B_1^T B_1 + R)^{-1}B_1^T S^T$ і після елементарних перетворень отримаємо шукану формулу (8). Теорему доведено.

Розглянемо частковий випадок, коли R — нульова, B_1 — невідроджена і $L = SB_1(B_1^T B_1)^{-1}B_1^T S^T = SS^T$ — невідроджена. Тоді за формулою (8) у цьому частковому випадку, враховуючи, що $(B_1^T B_1 + R)^{-1}B_1^T = B_1^{-1}$, отримаємо:

$$u(r) = -(B_1^T B_1)^{-1} \{ [I - B_1^T S^T (SS^T)^{-1}S(B_1^T)^{-1}]B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) + \\ + B_1^T S^T (SS^T)^{-1}[S\tilde{Y}(r+1) - b] \} = -(B_1^T B_1)^{-1}B_1^T (\tilde{Y}(r+1) - G(r)) + \\ + B_1^{-1}S^T (SS^T)^{-1}(S\tilde{Y}(r+1) - SG(r)) - B_1^{-1}S^T (SS^T)^{-1}(S\tilde{Y}(r+1) - b).$$

При R — нульовій, із (4) випливає, що перший доданок в останній частині рівності дорівнює $u_G(r)$, тому після взаємознищення доданків з $S\tilde{Y}(r+1)$ отримаємо:

$$u(r) = u_G(r) - B_1^{-1}S^T (SS^T)^{-1}(SG(r) - b). \quad (9)$$

Якщо задавальне діяння задовольняє співвідношення (5), тобто має місце схема 1, то з (9) випливає, що у розглянутому частковому випадку $u(r) = u_G(r)$, тобто розв'язок задачі мінімізації (3) лежить на лінійному

многовиді розв'язків задачі мінімізації (6). Це легко зрозуміти, оскільки: за відсутності обмежень на керування ($R=0$) критерій (3) зводиться до того, щоб якнайкраще наблизити вихідні координати до задавального діяння, а якщо задавальне діяння саме задовольняє співвідношенням (5), то при оптимальному керуванні за критерієм (3) ці співвідношення теж будуть задовольнятись якнайкраще, тобто критерій (6) мінімізуватиметься автоматично. Утім, на практиці звичайно обмеження на керування доводиться накладати, матриця R відмінна від нульової, тоді при керуванні за формулою (4) координуючий критерій (6) може не досягати свого мінімуму (навіть для рис. 1, а тим паче для рис. 2 і 3). Оскільки за умовою задача координації є більш пріоритетною і, в першу чергу, треба досягати саме мінімуму (6), а вже потім за можливістю мінімізувати (3), то в загальному випадку отриманий нами розв'язок (8) є оптимальним для цієї задачі в цілому.

ПРИКЛАД І АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Нехай задано двовимірний об'єкт із різномовною дискретизацією типу (1) такого вигляду [8]:

$$A(z_1^{-1}) = I - A_1 z_1^{-1} - A_2 z_1^{-2}, B(z_1^{-1}) = B_1 z_1^{-1} + B_2 z_1^{-2},$$

$$C(z^{-1}) = I + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + C_3 z^{-3} + C_4 z^{-4}, \quad h = 2T_0,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1,01045 & 0 \\ 0 & 0,78855 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -0,11838 & 0 \\ 0 & -0,11844 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0,08637 & 0,27312 \\ -2,09626 & 1,1994 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0,04312 & 0,13628 \\ -1,03414 & 0,564 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1,4333 & 2,1333 \\ 0,55526 & 1,00526 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0,3455 & 1,5798 \\ -0,36112 & -0,01905 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -0,17417 & 0,48627 \\ -0,10947 & -0,2035 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} -0,0578 & 0,05298 \\ 0,0333 & 0,03716 \end{pmatrix}.$$

Подаватимемо на вхід незалежний гауссівський білий шум ζ зі стандартним відхиленням 0,1. Нехай треба забезпечити виконання співвідношення $Y_1(r) - 2Y_2(r) = 1$, тобто в (5) маємо $S = (1 - 2)$, $b = 1$. Будемо подавати задавальне діяння за схемою рис. 3, оскільки аналіз вище показав, що вона найбільш придатна на практиці. Виберемо першу координату ведучою, другу веденою, і виразимо $Y_2(r) = \frac{Y_1(r) - 1}{2}$. Візьмемо в якості низькочастотного фільтра звичайне ковзне середнє з «вікном», рівним шести великим періодам дискретизації, тобто фільтр має передаточну функцію $\frac{1 + z_1^{-1} + z_1^{-2} + z_1^{-3} + z_1^{-4} + z_1^{-5}}{6}$. Змоделюємо два випадки — систему стабілізації та слідкуючу систему. У системі стабілізації виберемо задавальне

діяння по каналу ведучої координати $G_1 = 7$ (тоді, згідно із заданим співвідношенням, ведена координата має стабілізуватись на рівні 3). У слідкуючій системі візьмемо вхідний сигнал $G_1(r) = 7 \sin \frac{\pi r}{36}$. У критерії (2) нехай

$$R = \begin{pmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Моделювання виконувалось у середовищі Matlab 7.9.0. Порівняємо алгоритм (8), запропонований у цій роботі, із алгоритмом (4), що базується винятково на критерії (3) без врахування співвідношення, тобто без власне координуючого керування. На рис. 4, 5 показано першу і другу вихідні координати відповідно для системи стабілізації, на рис. 6 показано нев'язку по співвідношенню для цього алгоритму, тобто значення $\varepsilon(r) = Y_1(r) - 2Y_2(r) - 1$.

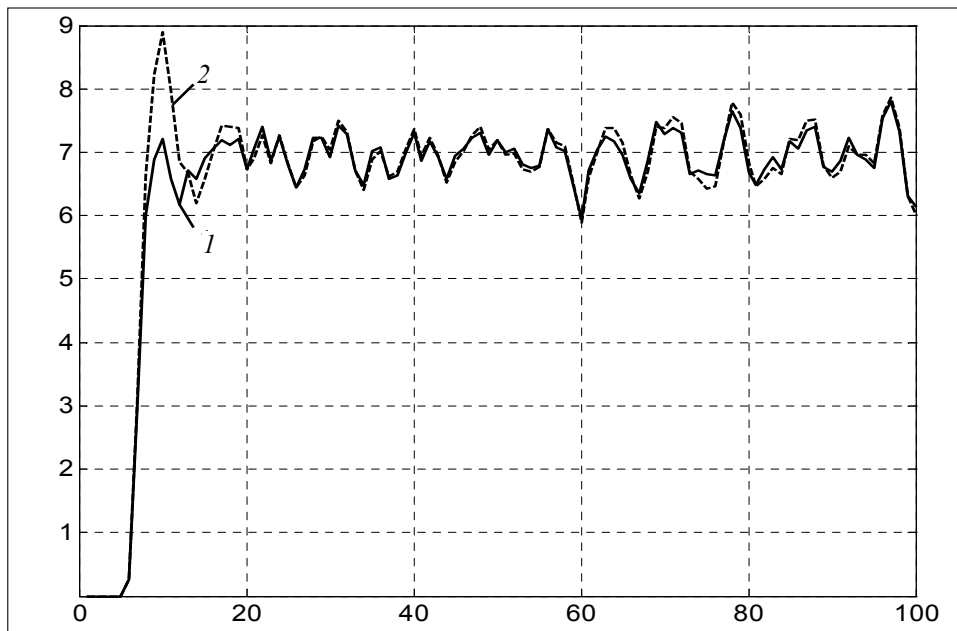


Рис. 4. Моделювання системи стабілізації: 1 — графік $Y_1(r)$ з координацією, 2 — графік $Y_1(r)$ без координації

Щоб отримати чисельну характеристику якості керування, будемо обчислювати оцінки стандартних відхилень (квадратних коренів з дисперсії) вихідних координат від задавальних діянь та стандартних відхилень нев'язки співвідношення за формулами відповідно:

$$\sigma(Y_i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (Y_i(r) - G_i(r))^2}, \quad \sigma(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (SY(r) - b)^2},$$

де N — кількість великих періодів дискретизації, протягом яких відбувалось моделювання. Отримано такі значення:

Стандартне відхилення $(Y_1 - G_1)$ — 0,404418.

Стандартне відхилення $(Y_2 - G_2)$ — 0,22996.

Стандартне відхилення $(Y_1 - G_1)$ без координації — 0,45776.

Стандартне відхилення $(Y_2 - G_2)$ без координації — 0,2076.

Стандартне відхилення нев'язки — 0,23435.

Стандартне відхилення нев'язки без координації — 0,41521.

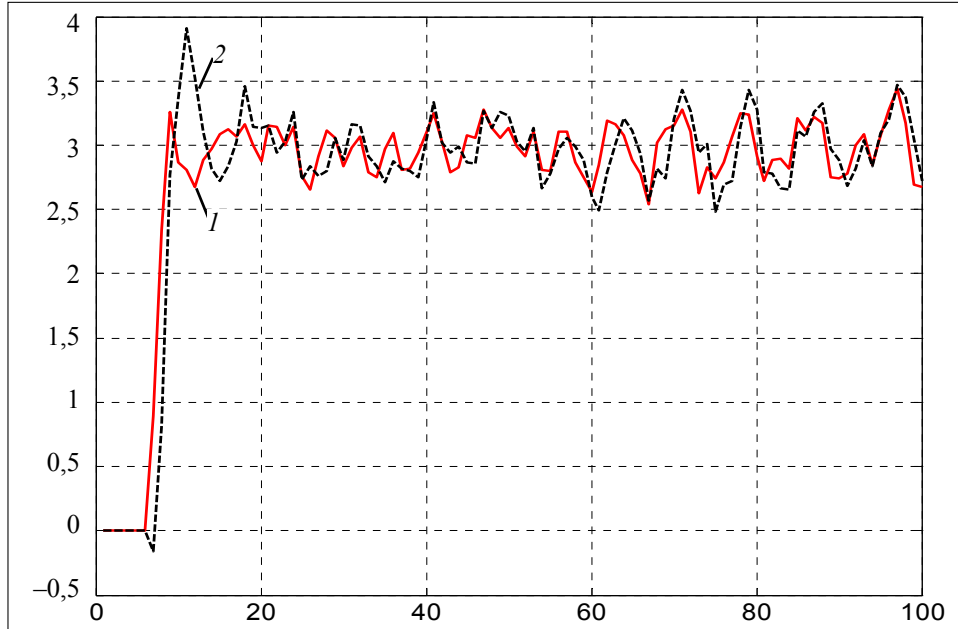


Рис. 5. Моделювання системи стабілізації: 1 — графік $Y_2(r)$ з координацією, 2 — графік $Y_2(r)$ без координації

Із отриманих результатів можна зробити висновок, що врахування співвідношення в критерії оптимальності майже не змінює якість стабілізації системи, але при цьому приблизно в 1,8 разу зменшується стандартне відхилення нев'язки співвідношення. Отже, покращення якості відпрацювання співвідношення, що і було основною метою цієї розробки, досягнуто.

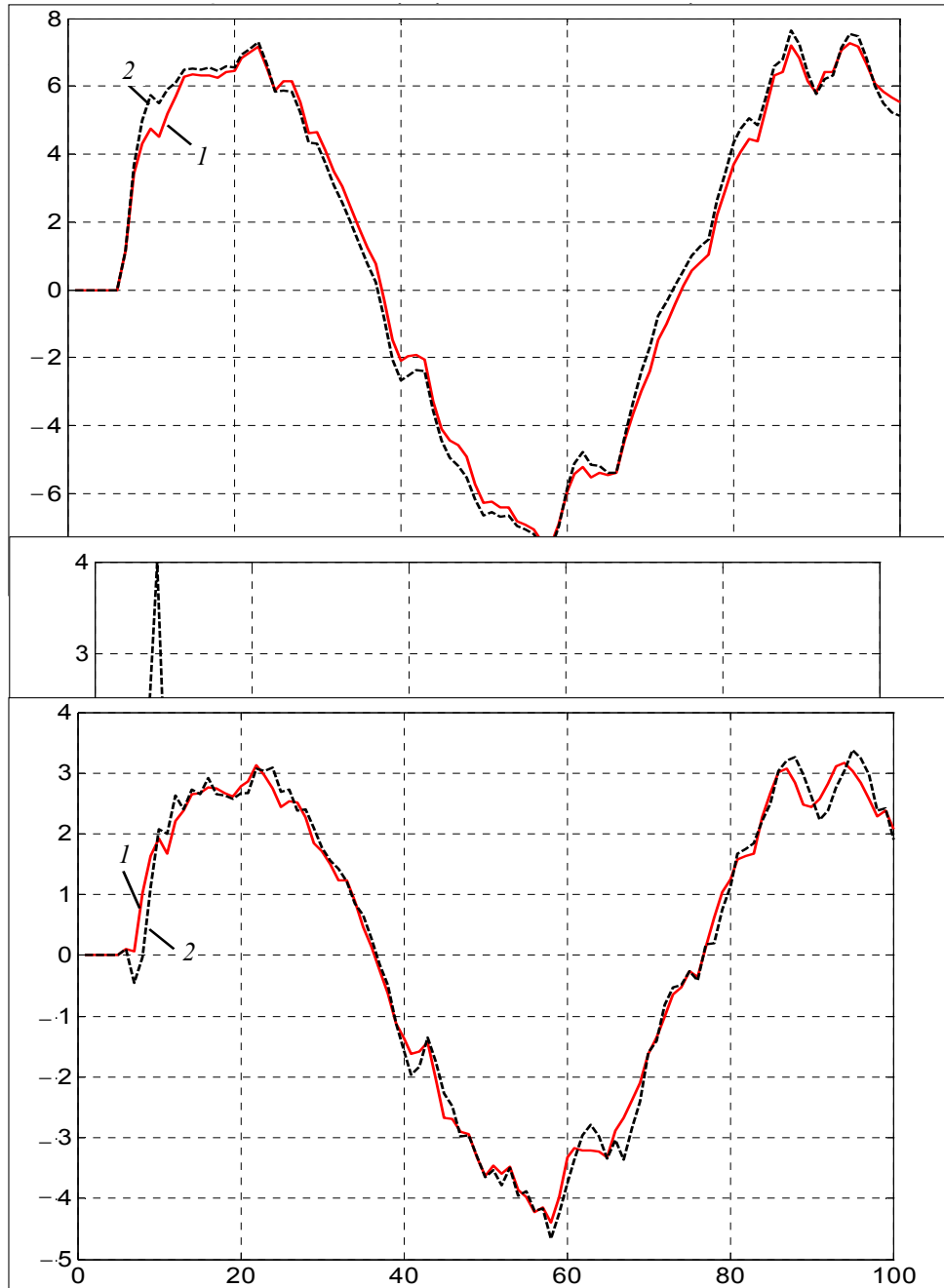


Рис. 8. Модування слідкуючої системи: 1 — графік $Y_2(r)$ з координацією, 2 — графік $Y_2(r)$ без координації

Стандартне відхилення $(Y_1 - G_1)$ — 0,95504.

Стандартне відхилення $(Y_2 - G_2)$ — 0,56802.

Стандартне відхилення $(Y_1 - G_1)$ без координації 0,69307.

Стандартне відхилення $(Y_2 - G_2)$ без координації — 0,3074.

Стандартне відхилення нев'язки — 0,23615.

Стандартне відхилення нев'язки без координації — 0,6148.

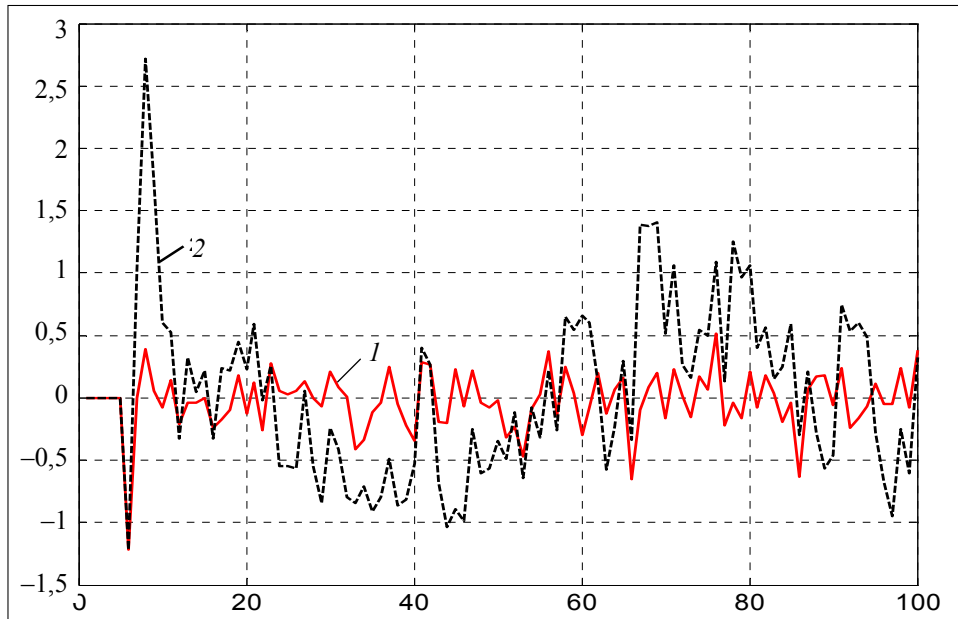


Рис. 9. Моделювання слідкуючої системи: 1 — графік $\varepsilon(r)$ з координацією, 2 — графік $\varepsilon(r)$ без координації

Як бачимо, цього разу стандартні відхилення вихідних координат дещо зросли, проте стандартне відхилення нев'язки співвідношення зменшилось приблизно у 2,6 разу, що для координуючої системи значно важливіше, ніж незначна втрата точності слідкування. Таким чином, можна зробити висновок, що розроблений алгоритм координуючого керування задовільно виконує покладені на нього функції.

ВИСНОВКИ

У цій роботі досліджено задачу координуючого керування різномірним об'єктом у стохастичному середовищі.

1. Запропоновано новий критерій оптимальності координуючого управління — критерій мінімуму дисперсії нев'язки співвідношень вихідних координат багатовимірного процесу.

2. Розроблено метод умовної мінімізації дисперсії нев'язки співвідношень та узагальненої дисперсії вихідних координат, а також рекурентний

алгоритм оптимального цифрового керування відносно запропонованого критерію.

3. Проведено дослідження розробленого методу й алгоритмів оптимального координуючого керування шляхом цифрового моделювання двовимірної системи при постійному та змінному задавальному діянні ведучої координати, що підтвердило ефективність і практичну цінність отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бойчук Л.М.* Синтез координирующих систем автоматического управления. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 160 с.
2. *Мирошник И.В.* Согласованное управление многоканальными системами. — Л.: Энергоатомиздат, 1990. — 129 с.
3. *Романенко В.Д.* Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей временных рядов с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 2. — С. 23–41.
4. *Романенко В.Д.* Методи автоматизації прогресивних технологій: підруч. — Київ: Вища шк., 1995. — 519 с.
5. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. — М.: Мир, 1984. — 541 с.
6. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. — М.: Наука, 1986. — 248 с.
7. *Магнус Я., Нейдекер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. — М.: Физматлит, 2002. — 495 с.
8. *Романенко В.Д.* Синтез и адаптивная настройка функций прогнозирования динамических процессов в приращениях переменных для моделей с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 4. — С. 15–25.

Надійшла 26.07.2010