УДК 519.873

КАЛЕНДАРНОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МОНОТОННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ИХ МИНИМАЛЬНОГО АВАРИЙНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ

Построена полумарковская модель календарного технического обслуживания системы с монотонной структурой и учетом минимального аварийного восстановления ее элементов. Найдены стационарные характеристики надежности и экономические показатели качества функционирования системы. Определены оптимальные сроки проведения технического обслуживания ее элементов.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе функционирования сложной технической системы ухудшаются характеристики ее элементов. Одним из методов улучшения стационарных показателей качества функционирования является предупредительное техническое обслуживание (ТО) элементов. В [1] исследовано функционирование простой системы, в которой ТО проводится в определенные моменты времени, а в случае отказа системы на интервале между двумя последовательными ТО проводится лишь минимальное восстановление. При этом время восстановления системы предполагается мгновенным. В [2] указанная стратегия ТО простой системы рассмотрена с учетом времени на восстановительные работы. В данной работе результаты работы [2] переносятся на сложные системы с монотонной структурой [1]. Для построения математической модели функционирования такой системы привлекается аппарат полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний [3, 4]. В общих предположениях относительно времен безотказной работы и восстановления элементов системы определяются стационарные и экономические показатели качества функционирования системы при указанной стратегии ТО ее элементов и устанавливаются оптимальные периодичности проведения ТО.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим N-компонентную систему с монотонной структурой [1]. Монотонная система однозначно определяется своей структурной функцией $\varphi(z_1,...,z_N)$, зависящей от булевых переменных z_i:

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент работоспособен, } i=\overline{1,N}, \\ 0, & \text{если } i\text{-й элемент отказал.} \end{cases}$$

Опишем правило проведения предупредительного ТО каждого элемента. В нулевой момент времени все элементы работоспособные. Время безотказной работы i-го элемента системы — случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \le t)$, $i = \overline{1, N}$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно и начинается его минимальное аварийное восстановление (МАВ), которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t) = P(\beta_i \le t)$, $i = \overline{1, N}$. Минимальное восстановление означает, что наработка восстановленного элемента, проработавшего к моменту отказа время s_i, имеет ФР

$$F_{i,s_i}(t) = \frac{F_i(s_i + t) - F_i(s_i)}{\overline{F_i}(s_i)}. \qquad (1)$$

Таким образом, минимальное восстановление делает элемент работоспособным, но по его окончании интенсивность отказов $\lambda_i(t) = \dfrac{f_i(t)}{\overline{F_i}(t)}$ такая же, как непосредственно перед отказом. После следующего отказа и минимального восстановления «остаточная наработка» элемента по-прежнему определяется формулой (1), в которой s_i — суммарная наработка элемента с момента его эксплуатации и т.д. Кроме МАВ через заранее заданный интервал времени τ_i после начала эксплуатации i-го элемента системы, независимо от его состояния, проводится ТО элемента. Длительность ТО — СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t) = P(\beta_i^p \le t)$. После ТО все надежностные характеристики элементов полностью обновляются: время безотказной работы элемента снова определяется СВ α_i; проведение следующего ТО элемента планируется через время τ_i. Функционирование каждого элемента системы во времени описывается регенерирующим случайным процессом. Точками регенерации служат моменты возобновления его работоспособности после ТО. Поведение элемента на промежутке времени длиною τ_i после ТО описывается альтернирующим процессом минимального восстановления [2]. Предполагается, что СВ α_i, β_i, β_i^p — независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha_i$, $M\beta_i$, $M\beta_i^p$. Отключение и включение элементов в систему происходит мгновенно. Очереди на восстановление не возникает. Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО i-го элемента системы соответственно равны c_i^0, c_i, c_i^p и $i = \overline{1, N}$.

Цель работы — построить полумарковскую модель функционирования системы и определить оптимальные интервалы времени τ_i между проведением ТО элементов. В качестве критериев эффективности функционирования системы рассматриваются: стационарный коэффициент технического использования системы $K_u(\tau_1, ..., \tau_N)$; средний удельный доход $S(\tau_1, ..., \tau_N)$, приходящийся на единицу календарного времени; средние удельные затраты $C(\tau_1, ..., \tau_N)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [3, 4]. Каждый элемент системы может находиться в четырех физических состояниях:

0 — элемент находится в состоянии АВ;

1 — элемент находится в работоспособном состоянии после МАВ;

2 — элемент находится в состоянии ТО;

3 — элемент находится в работоспособном состоянии после ТО.

При кодировке состояний системы кроме указания физических состояний элементов также будем указывать время, оставшееся до ближайшего изменения состояния каждого элемента; время, прошедшее с момента окончания последнего ТО и суммарное время МАВ после ТО. Фазовое пространство полумарковских состояний системы определяется следующим образом:

$$E=\left\{i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\overline{s},\quad i=\overline{1,N}\right\}.$$

Здесь компоненты вектора $\overline{d}=(d_1,...,d_N)$ указывают на физические состояния элементов; i — номер элемента, изменившего свое физическое состояние последним. Компоненты вектора $\overline{x}^{(i)}=(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_N)$ фиксируют время с момента последнего изменения состояния i-го элемента до ближайших моментов изменения состояний соответственно остальных элементов. При этом, если $d_k=1$, то x_k — время до ближайшего аварийного отказа, если $d_k=0$, то x_k — время до окончания МАВ k-го элемента. Компоненты вектора $\overline{u}=(u_1,...,u_N)$ — времена, прошедшие с моментов окончания последних ТО элементов. Если $d_k=2$, то считается, что $u_k=\tau_k$. В момент восстановления работоспособности i-го элемента после его ТО будем полагать $u_i=0$. Компоненты вектора $\overline{s}=(s_1,...,s_N)$ указывают на суммарные времена МАВ элементов после ТО. Если $d_k=2$, то считается, что $s_k=0$. Очевидно, что $s_k=0$, если $d_k=3$. Заметим, что первому аварийному отказу i-го элемента в кодировке состояния будет соответствовать $d_k=0$ и $s_k=0$. В случае повторных аварийных отказов: $d_k=0$ и $s_k>0$. Через Ω_d^j будем обозначать совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных j.

Времена пребывания системы в состояниях определяются формулами

$$\theta_{i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\overline{s}}=\gamma_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}\wedge\underset{k\neq i}{\Lambda}x_k\underset{k\notin\Omega_d^2}{\Lambda}(\tau_k-u_k),$$

где Λ — знак минимума;

$$\gamma_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}=\begin{cases}\alpha_i, & d_i=3,\ u_i=0,\ s_i=0,\\ \alpha_{i,u_i,s_i}, & d_i=1,\\ \beta_i, & d_i=0,\\ \beta_i^p & d_i=2,\end{cases}$$

α_{i,u_i,s_i} — СВ с ФР,

$$F_{i,u_i,s_i}(t) = \frac{F_i(u_i - s_i + t) - F_i(u_i - s_i)}{\overline{F_i}(u_i - s_i)}.$$

ФР СВ $\gamma_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}$ обозначим через $\Psi_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}(t)$, а плотность — $\psi_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}(t)$.

Опишем вероятности (плотности вероятностей) переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n,\ n \ge 0\}$. Переходы физических состояний каждого элемента системы определяются графом, показанным на рис. 1.

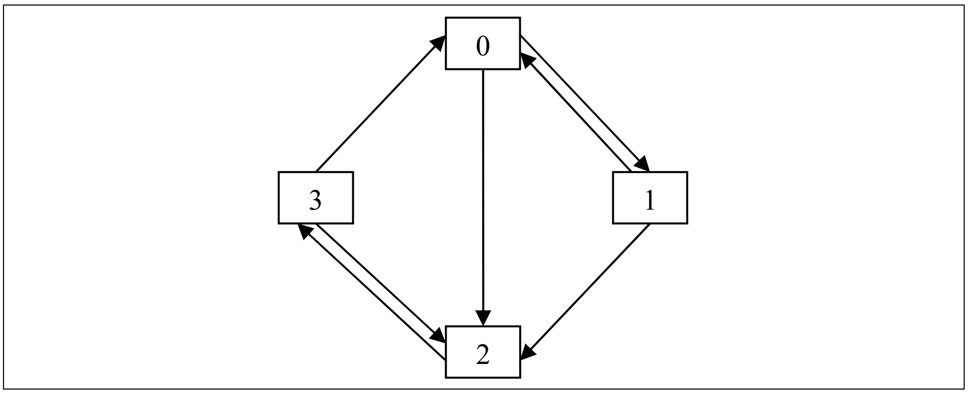

Рис. 1. Граф переходов физических состояний элемента

Обозначим $z_i = \bigwedge_{k \ne i} x_k \wedge \bigwedge_{k \notin \Omega_d^2} (\tau_k - u_k)$. Из состояния $i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\overline{s}$, $i = \overline{1,N}$, возможны переходы следующих типов:

а) в совокупность состояний $i\overline{d'}\;\overline{x}^{(i)}\overline{u's'}$, $d_i' \ne 2$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\overline{s}}^{i\overline{d'}\,\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}\,\overline{s'}} = \psi_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}(z_i - y)$, где $y < z_i$, $d_k' = d_k$, $x_k' = x_k - (z_i - y)$, $k \ne i$,

$$u_k' = \begin{cases} u_k + z_i - y, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \ne i,$$

$$u_i' = \begin{cases} u_i + z_i - y, & i \notin \Omega_d^2, \\ 0, & i \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad s_k' = \begin{cases} u_k + z_i - y, & k \notin \Omega_d^0, \\ s_k, & k \in \Omega_d^0, \end{cases}$$

б) в совокупность состояний $i\overline{d'}\;\overline{x'}^{(i)}\overline{u's'}$, $d_i = 0,1,3$; $d_i' = 2$, с вероятностью перехода

$$P_{i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\,\overline{s}}^{i\overline{d'}\,\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}\,\overline{s'}} = \overline{\Psi}_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}(\tau_i - u_i), \text{ где } d_k' = d_k,\ x_k' = x_k - (\tau_i - u_i),\ k \ne i,$$

$$u_k' = \begin{cases} u_i + \tau_i - u_i, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad s_k' = \begin{cases} s_k + \tau_i - u_i, & k \in \Omega_d^0, \\ s_k, & k \notin \Omega_d^0, \end{cases}$$

в) в совокупность состояний $j\overline{d'}\ \overline{x'}^{(j)}\overline{u'}\overline{s'}$, $j \neq i$, с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\overline{s}}^{j\overline{d'}\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}\overline{s'}} = \psi_{i,u_i,s_i}^{(d_i)}(z_i + y)$, где $y > 0$, $d'_k = d_k$, $k \neq j$, $x'_i = y$, $x'_k = x_k - z_i$, $k \neq i, j$,

$$u'_j = \begin{cases} u_j + z_i, & j \notin \Omega_d^2,\ d'_j \neq 2, \\ \tau_j, & j \notin \Omega_d^2,\ d'_j = 2, \\ 0, & j \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad u'_k = \begin{cases} u_k + z_i, & k \notin \Omega_d^2, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \neq j,$$

$$s'_j = \begin{cases} s_j + z_i, & j \in \Omega_d^0,\ d'_j \neq 2, \\ \tau_j, & j \in \Omega_d^0,\ d'_j = 2, \\ 0, & j \notin \Omega_d^0, \end{cases} \quad s'_k = \begin{cases} s_k + z_i, & k \in \Omega_d^2, \\ s_k, & k \notin \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \neq j.$$

Прежде, чем находить стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$, введем следующие характеристики альтернирующего процесса минимального восстановления

$$n_i^{(0)}(u_i, s_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_i^{*(n)}(s_i) \frac{[\Lambda_i(u_i - s_i)]^n}{n!} f_i(u_i - s_i),\ 0 \leq s_i < u_i,$$

$$n_i^{(1)}(u_i, s_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_i^{*(n)}(s_i) \frac{[\Lambda_i(u_i - s_i)]^{n-1}}{(n-1)!} f_i(u_i - s_i),\ 0 \leq s_i < u_i,$$

$$\omega_i^{(1)}(u_i, s_i, x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} g_i^{*(n)}(s_i) \frac{[\Lambda_i(u_i - s_i)]^n}{n!} f_i(u_i - s_i + x_i),$$

$$\omega_i^{(0)}(u_i, s_i, x_i) = f_i(u_i - s_i) \Bigg[g_i(s_i + x_i) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_i^{*(n)}(s_i) \frac{[\Lambda_i(u_i - s_i)]^n}{n!} \int_0^{s_i} g_i(s_i + x_i - y) g_i^{*(n)}(y) dy \Bigg],$$

где $\Lambda_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s) ds$ — накопленная интенсивность отказов i-го элемента. Введенные функции имеют следующий вероятностный смысл: $n_i^{(0)}(u_i, s_i) du_i ds_i$ $(n_i^{(1)}(u_i, s_i) du_i ds_i)$ — вероятность того, что в интервале времени $(u_i, u_i + du_i]$ произойдет аварийный отказ (закончится АВ) i-го элемента, при этом суммарное время АВ после последнего ТО попадет в интервал $(s_i, s_i + ds_i]$; $\omega_i^{(0)}(u_i, s_i, x) du_i ds_i dx_i$ $(\omega_i^{(1)}(u_i, s_i, x) du_i ds_i dx_i)$ — вероятность того, что в интервале времени $(u_i, u_i + du_i]$ i-й элемент находится в состоянии $0(1)$, при этом суммарное время АВ после последнего ТО попадет в интервал $(s_i, s_i + ds_i]$, а время, оставшееся до ближайшего попадания в состояние 1(0), заключено в интервале $(x_i, x_i + dx_i]$.

Обозначим через $\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)$ $\left(\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)$ среднее число $0-(1-)$ восстановлений альтернирующего процесса минимальных восстановлений за время τ_i [2]:

$$\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)=F_i(\tau_i)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\tau_i}G_i^{*(n)}(s)\frac{\left[\Lambda_i(\tau_i-s)\right]^n}{n!}f_i(\tau_i-s)ds\,,$$

$$\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\tau_i}G_i^{*(n)}(s)\frac{\left[\Lambda_i(\tau_i-s)\right]^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau_i-s)ds\,.$$

Теорема. Если для ВЦМ $\{\xi_n,\ n\ge 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения $\rho(\cdot)$, тогда оно определяется формулами

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{u}\,\overline{s}\right)=$$

$$=\begin{cases}\rho\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^3\\ k\ne i}}f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^0}\omega_k^{(0)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^1}\omega_k^{(1)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{G}_k^p(x_k),\ i\in\Omega_d^3,\\ \rho n_i^{(1)}(u_i,s_i)\prod\limits_{k\in\Omega_d^3}f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^0}\omega_k^{(0)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\ne i}}\omega_k^{(1)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{G}_k^p(x_k),\ i\in\Omega_d^1,\\ \rho f_i(u_i)\prod\limits_{k\in\Omega_d^3}f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\ne i}}\omega_k^{(0)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^1}\omega_k^{(1)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{G}_k^p(x_k),\ i\in\Omega_d^0,\ s_i=0,\\ \rho n_i^{(0)}(u_i,s_i)\prod\limits_{k\in\Omega_d^3}f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\ne i}}\omega_k^{(0)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^1}\omega_k^{(1)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^2}\overline{G}_k^p(x_k),\ i\in\Omega_d^0,\ s_i>0,\\ \rho\prod\limits_{k\in\Omega_d^3}f_k(u_k+x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^0}\omega_k^{(0)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{k\in\Omega_d^1}\omega_k^{(1)}(u_k,s_k,x_k)\prod\limits_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\ne i}}\overline{G}_k^p(x_k),\ i\in\Omega_d^2,\ \ i=\overline{1,N},\end{cases}$$

$$\rho=\left[\sum_{i=1}^{N}\left(2+\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)+\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)\prod_{\substack{k=1\\ k\ne i}}^{N}\left(\tau_k+M\beta_k^p\right)\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Доказательство. По определению стационарное распределение удовлетворяет следующей системе интегральных уравнений:

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{u}\,\overline{s}\right)=\sum_{\substack{j=1\\ j\notin\Omega_{d'}^3}}^{N}\int_0^{a_m}\psi_{j,u_j-t,s_j}^{(d_j')}\left(x_j+t\right)\rho\left(j\overline{d'}\left(\overline{x}^{(i)}+\overline{t}\right)^{(j)}\overline{u's'}\right)dt+$$

$$+\begin{cases}f_m(a_m+x_m)\rho\left(m\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{a_m})^{(m)}\overline{u''s''}\right), & m\in\Omega_{d'}^3,\\ g_m(a_m+x_m)\rho\left(m\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{a_m})^{(m)}\overline{u''s''}\right), & m\in\Omega_{d'}^0,\ \ i=\overline{1,N},\\ 0, & m\in\Omega_{d'}^1,\end{cases}$$

$$d_i = 0,1,3;\;\; d'_k = d_k,\;\; k \neq i;\;\; a_m = \mathop{\Lambda}_{k\in\Omega^3_{d'}} u_k \wedge \mathop{\Lambda}_{k\in\Omega^0_{d'}} s_k \wedge \mathop{\Lambda}_{k\in\Omega^1_{d'}} (u_k - s_k);$$

$$u'_k = \begin{cases} u_k - t, & k \notin \Omega^2_{d'}, \\ \tau_k, & k \in \Omega^2_{d'}, \end{cases} \qquad s'_k = \begin{cases} s_k - t, & k \in \Omega^0_{d'}, \\ s_k, & k \notin \Omega^0_{d'}, \end{cases}$$

$$u''_k = \begin{cases} u_k - a_m, & k \notin \Omega^2_{d'}, \\ \tau_k, & k \in \Omega^2_{d'}, \end{cases} \qquad s''_k = \begin{cases} s_k - a_m, & k \in \Omega^0_{d'}, \\ s_k, & k \notin \Omega^0_{d'}, \end{cases}$$

$$\rho\left(\overline{id}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{us}\right) = \int_0^{a_m} dt \int_0^{\tau_i - t} \frac{\overline{F_i}(\tau_i - s_i)}{\overline{F_i}(\tau_i - s_i - t)} \rho\left(\overline{id'}\left(\overline{x}^{(i)} + \bar{t}\right)^{(i)} \overline{u's'}\right) ds'_i +$$

$$+ \int_0^{a_m} dt \int_0^{\tau_i - t} \overline{G_i}(t) \rho\left(\overline{id''}\left(\overline{x}^{(i)} + \bar{t}\right)^{(i)} \overline{u''s''}\right) ds''_i + \int_0^{a_m} \overline{G_i}(t) \rho\left(\overline{id''}\left(\overline{x}^{(i)} + \bar{t}\right)^{(i)} \overline{u''s''}\right) dt +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\, j\neq i \\ j\notin\Omega^3_d}}^{N} \int_0^{a_m} \psi^{(d'_j)}_{j,u_j - t, s_j}\left(x_j + t\right) dt \left[\int_0^{\infty} \rho\left(\overline{jd'}\left(\bar{x} + \bar{t}\right)^{(j)} \overline{u's'}^{(i)}\right) dx_i + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\tau_i - t} ds'_i \int_0^{\infty} \rho\left(\overline{jd'}\left(\bar{x} + \bar{t}\right)^{(j)} \overline{u's'}\right) dx_i \right] +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\, j\neq i \\ j\notin\Omega^3_d}}^{N} \int_0^{a_m} \psi^{(d''_j)}_{j,u_j - t, s_j}\left(x_j + t\right) dt \int_0^{\tau_i - t} ds''_i \int_0^{\infty} \rho\left(\overline{jd''}\left(\bar{x} + \bar{t}\right)^{(j)} \overline{u''s''}\right) dx_i +$$

$$+ \begin{cases} \overline{F_i}(\tau_i) \rho\left(\overline{id'}(\overline{x}^{(i)} + \overline{a_i})^{(i)} \overline{u's'}\right), \;\; m = i, \\ f_m(a_m + x_m) \displaystyle\int_0^{\infty} \left[\rho\left(\overline{md'}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u's'}^{(i)}\right) + \int_0^{\tau_i - a_m} \rho\left(\overline{md'}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u's'}\right) ds'_i + \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\int_0^{\tau_i - a_m} \rho\left(\overline{md''}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u''s''}\right) ds''_i \right] dx_i, \;\; m \in \Omega^3_d, \\ g_m(a_m + x_m) \displaystyle\int_0^{\infty} \left[\rho\left(\overline{md'}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u's'}^{(i)}\right) + \int_0^{\tau_i - a_m} \rho\left(\overline{md'}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u's'}\right) ds'_i + \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\int_0^{\tau_i - a_m} \rho\left(\overline{md''}(\bar{x} + \overline{a_m})^{(m)} \overline{u''s''}\right) ds''_i \right] dx_i, \;\; m \in \Omega^0_d, \\ 0, \;\; m \in \Omega^1_d, \end{cases}$$

$$d_i = 2;\;\; d'_i = 1,\;\; d''_i = 0;\;\; d'_k = d''_k = d_k,\;\; k \neq i;$$

$$a_m = \tau_i \wedge \underset{k\in\Omega_d^3}{\Lambda} u_k \wedge \underset{k\in\Omega_d^0}{\Lambda} s_k \wedge \underset{k\in\Omega_d^1}{\Lambda} (u_k - s_k);$$

$$u'_k = \begin{cases} u_k - t, & k \notin \Omega^2_{d'}, \\ \tau_k, & k \in \Omega^2_{d'}, \end{cases} \quad s'_k = \begin{cases} s_k - t, & k \in \Omega^0_{d'}, \\ s_k, & k \notin \Omega^0_{d'},\ k \neq i, \\ s'_i & k = i, \end{cases}$$

$$s'^{(i)}_k = \begin{cases} s_k - t, & k \in \Omega^0_{d'}, \\ s_k, & k \notin \Omega^0_{d'},\ k \neq i, \\ 0, & k = i, \end{cases}$$

$$u''_k = \begin{cases} u_k - t, & k \notin \Omega^2_{d''}, \\ \tau_k, & k \in \Omega^2_{d''}, \end{cases} \quad s''_k = \begin{cases} s_k - t, & k \in \Omega^0_{d''},\ k \neq i, \\ s_k, & k \notin \Omega^0_{d''}, \\ s''_i, & k = i. \end{cases} \tag{3}$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что соотношения (2) определяют решение системы уравнений (3). Рассмотрим подробно случай $d_i = 0,\ d'_i = 3,\ s_i = 0$.

Подставим (2) в правую часть уравнения (3) и учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega^{(1)}_k\left(u_k - t, s_k, x_k + t\right) = -\frac{f_k(u_k - s_k + x_k)}{\overline{F_k}(u_k - s_k - t)} n^{(1)}_k\left(u_k - t, s_k\right),$$

$$\omega^{(1)}_m\left(s_m, s_m, x_m + u_m - s_m\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega^{(0)}_k\left(u_k - t, s_k - t, x_k + t\right) = -g_k\left(x_k + t\right) n^{(1)}_k\left(u_k - t, s_k - t\right),$$

$$\omega^{(0)}_m\left(u_m - a_m, 0, x_m + a_m\right) = g_m\left(x_m + a_m\right) f_m\left(u_m - a_m\right).$$

Получим

$$\sum_{j\in\Omega^1_{d'}} \int_0^{a_m} \rho \frac{f_j\left(u_j - s_j + x_j\right)}{\overline{F_j}\left(u_j - s_j - t\right)} n^{(1)}_j(u_j - t, s_j) \prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'} \\ x_i = 0}} f_k(u_k + x_k) \times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} \omega^{(0)}_k(u_k - t, s_k - t, x_k + t) \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{d'} \\ k\neq j}} \omega^{(1)}_k(u_k - t, s_k, x_k + t) \times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^{\,p}_k(x_k + t) dt + \sum_{j\in\Omega^0_{d'}} \int_0^{a_m} \rho g_j\left(x_j + t\right) n^{(0)}_j(u_j - t, s_j - t) \times$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'} \\ x_i = 0}} f_k(u_k + x_k) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_{d'} \\ k\neq j}} \omega^{(0)}_k(u_k - t, s_k - t, x_k + t) \prod_{k\in\Omega^1_{d'}} \omega^{(1)}_k(u_k - t, s_k, x_k + t) \times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k+t)\,dt + \sum_{j\in\Omega^2_{d'}} \int_0^{a_m} \rho g^p_j\left(x_j+t\right) \prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'}\\ x_i=0}} f_k(u_k+x_k)\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} \omega^{(0)}_k(u_k-t,s_k-t,x_k+t) \prod_{k\in\Omega^1_{d'}} \omega^{(1)}_k(u_k-t,s_k,x_k+t)\times$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega^2_{d'}\\ k\ne j}} \overline{G}^p_k(x_k+t)\,dt + \rho \prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'}\\ x_i=0}} f_k(u_k+x_k) \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} \omega^{(0)}_k(u_k-a_m,s_k-a_m,x_k+a_m)\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^1_{d'}} \omega^{(1)}_k(u_k-a_m,s_k,x_k+a_m) \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k+a_m) =$$

$$= -\int_0^{a_m} \rho \frac{\partial}{\partial t}\left[\prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'}\\ x_i=0}} f_k(u_k+x_k) \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} \omega^{(0)}_k(u_k-t,s_k-t,x_k+t)\times\right.$$

$$\left.\times \prod_{k\in\Omega^1_{d'}} \omega^{(1)}_k(u_k-t,s_k,x_k+t) \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k+t)\right] dt +$$

$$+\rho \prod_{\substack{k\in\Omega^3_{d'}\\ x_i=0}} f_k(u_k+x_k) \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} \omega^{(0)}_k(u_k-a_m,s_k-a_m,x_k+a_m)\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^1_{d'}} \omega^{(1)}_k(u_k-a_m,s_k,x_k+a_m) \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k+a_m) =$$

$$= \rho f_i(x_i) \prod_{k\in\Omega^3_d} f_k(u_k+x_k) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_d\\ k\ne i}} \omega^{(0)}_k(u_k,s_k,x_k) \prod_{k\in\Omega^1_d} \omega^{(1)}_k(u_k,s_k,x_k)\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_d} \overline{G}^p_k(x_k) = \rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{u}\,\overline{s}\right).$$

Аналогично можно проверить, что формулы (2) определяют решение остальных уравнений системы. Постоянная ρ находится из условия нормировки.

НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Разобьем фазовое пространство E состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+ и E_-: где E_+ — подмножество работоспособных состояний, E_- — подмножество отказовых состояний. Система находится в работоспособном состоянии тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из последовательных структур минимального пути [1] работоспособна. Система считается в отказе, если, по крайней мере, одна из параллельных структур минимального сечения [1] находится в нерабочем состоянии (по причине ТО или АВ ее элементов). Предполагается, что в результате АВ или ТО какого-либо элемента не происходит отключение тех работоспособных элементов, функционально связанных с отказавшим, которые не принадлежат более ни одному работоспособному пути. Таким образом, подмножества E_+ и E_- содержат следующие состояния:

$$E_+ = \left\{ \overline{i d x}^{(i)} \overline{u},\ \overline{d} \in D_+,\ \ i = \overline{1,N} \right\},\ \ E_- = \left\{ \overline{i d x}^{(i)} \overline{u},\ \overline{d} \in D_-,\ \ i = \overline{1,N} \right\}.$$

Здесь $D_+(D_-)$ — множество векторов $\overline{d}$, компоненты которых равны кодам физических состояний элементов системы, находящейся в подмножестве работоспособных (отказовых) состояний $E_+(E_-)$. Заметим, что элемент считается в работоспособном состоянии, если он находится в состоянии 3 или 1, и в отказовом — если в состояниях 0 или 2.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u системы найдем по формулам [3, 4]:

$$\mathrm{T}_+ = \frac{\int\limits_{E_+} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{E_+} \rho(dz)P(z, E_-)},\quad \mathrm{T}_- = \frac{\int\limits_{E_-} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{E_-} \rho(dz)P(z, E_+)},\quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{4}$$

где $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \ge 0\}$, $m(z)$ — средние времена пребывания в состояниях системы, $P(z, \mathrm{E}_+)$, $(P(z, E_-))$ — вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n,\ n \ge 0\}$ из отказовых (работоспособных) состояний в работоспособные (отказовые).

Средние времена пребывания системы в состояниях определяются формулой:

$$M\theta_{\overline{i d x}^{(i)} \overline{u s}} = \int\limits_0^{z_i} \overline{\Psi}^{(d_i)}_{i, u_i, s_i}(t)dt.$$

С учетом вида стационарного распределения ВЦМ (2) формулы (4) преобразуются к виду

$$T_+ = \left[\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^3} \int\limits_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \prod_{k \in \Omega_d^1} \left(\int\limits_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int\limits_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t) \right) dt \right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k \in \Omega_d^0} \int\limits_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t) \right) dt \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p \right] \Bigg/ \left\{ \sum_{d \in D'_+} \left[\sum_{j \in G_1(d)} \widetilde{H}_j^{(1)}(\tau_j) \times \right. \right.$$

$$\times \prod_{k\in\Omega_d^3} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \prod_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\neq j}} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right) \times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p + \sum_{j\in G_3(d)} \prod_{\substack{k\in\Omega_d^3\\ k\neq j}} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega_d^1} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right) \times$$

$$\left. \left. \times \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p \right] \right\},$$

$$T_- = \left[\sum_{d\in D_-} \prod_{k\in\Omega_d^3} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \prod_{k\in\Omega_d^1} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p \right] \Big/$$

$$\Big/ \left\{ \sum_{d\in D'_-} \left[\sum_{j\in I_0(d)} \widetilde{H}_j^{(1)}(\tau_j) \prod_{k\in\Omega_d^3} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \prod_{k\in\Omega_d^1} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right) \times \right. \right.$$

$$\times \prod_{\substack{k\in\Omega_d^0\\ k\neq j}} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p + \sum_{j\in I_2(d)} \prod_{k\in\Omega_d^3} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \times$$

$$\left. \left. \times \prod_{k\in\Omega_d^1} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right) \prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{\substack{k\in\Omega_d^2\\ k\neq j}} M\beta_k^p \right] \right\},$$

$$K_u = \frac{\sum_{d\in D_+} \prod_{k\in\Omega_d^3} \int_0^{\tau_k} \overline{F_k}(t)dt \prod_{k\in\Omega_d^1} \left(\int_0^{\tau_k} F_k(t)dt - \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(\tau_k + M\beta_k^p\right)} \to$$

$$\to \frac{\prod_{k\in\Omega_d^0} \int_0^{\tau_k} \left(\widetilde{H}_k^{(0)}(t) - \widetilde{H}_k^{(1)}(t)\right)dt \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p}{} \qquad (5)$$

Здесь D'_+ — множество пограничных работоспособных физических состояний системы, т.е. множество векторов $\overline{d} \in D_+$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 1(3) на 0 или 2 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_-; $G_1(d)\big(G_3(d)\big)$ — множество номеров компонент вектора $\overline{d} \in D'_+$, изменение значения каждой из которых с 1(3) на 0 или 2 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_-; D'_- — множество пограничных отказовых состояний системы, т.е. множество векторов $\overline{d} \in D_-$, таких, что изменение некоторой одной компоненты с 0 или 2 на 1 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_+; $I_0(d)\big(I_2(d)\big)$ — множество номеров компонент вектора $\overline{d} \in D'_-$, изменение значения каждой из которых с 0 (2) на 1 переводит вектор $\overline{d}$ во множество D_+.

Выразим стационарные характеристики T_+, T_-, $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$ системы через КТИ $K_i(\tau_i)$ элементов, которые определяются формулами [2]:

$$K_i(\tau_i) = \frac{\tau_i - \int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t) - \widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt}{\tau_i + M\beta_i^p}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Обозначим через $M_1,...,M_\omega$ все различные множества элементов путей системы [1]. Обратим внимание, что элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в нерабочих состояниях, т.е. в состояниях 0 или 2. Введем также следующие обозначения: M'_i, $i = \overline{1,\omega'}$ — множества элементов пограничных путей; $G(M'_i)$, $i = \overline{1,\omega'}$ — множества элементов пограничного пути M'_i, соответствующих номерам тех элементов, переход которых из работоспособного состояния в отказовое, приводит к отказу всей системы; Φ_i, $i = \overline{1,s}$ — множества элементов сечений; Φ'_i, $i = \overline{1,s'}$ — множества элементов пограничных сечений; $I(\Phi'_i)$, $i = \overline{1,s'}$ — множества элементов пограничного сечения Φ'_i, соответствующих номерам тех элементов, переход которых из отказового состояния в работоспособное приводит к восстановлению работоспособности всей системы.

Формулы (5) после преобразований приводится к виду:

$$T_+ = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\omega} \prod\limits_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin M'_i}}^{N} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)}{\sum\limits_{i=1}^{\omega'} \sum\limits_{j \in G(M'_i)} \frac{(1 + \widetilde{H}_j^{(1)}(\tau_j))}{\tau_j + M\beta_j^p} \prod\limits_{\substack{n \in M'_i \\ n \neq j}} K_n(\tau_n) \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin M'_i}}^{N} \big(1 - K_n(\tau_n)\big)},$$

$$T_- = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s} \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i'}}^{N} K_n(\tau_n) \prod\limits_{n \in \Phi_i} \left(1 - K_n(\tau_n)\right)}{\sum\limits_{i=1}^{s'} \sum\limits_{j \in I(\Phi_i')} \frac{(1 + \widetilde{H}_j^{(1)}(\tau_j))}{\tau_j + M\beta_j^p} \prod\limits_{\substack{n=1 \\ n \notin \Phi_i'}}^{N} K_n(\tau_n) \prod\limits_{\substack{n \in \Phi_i' \\ n \neq j}} \left(1 - K_n(\tau_n)\right)},$$

$$K_u(\tau_1, ..., \tau_N) = \sum_{i=1}^{\omega} \prod_{n \in M_i} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin M_i}^{N} \left(1 - K_n(\tau_n)\right) = \varphi\left(K_1(\tau_1), ..., K_N(\tau_N)\right). \quad (6)$$

Здесь структурная функция системы $\varphi(z_1, ..., z_n)$ задана в дизъюнктивной нормальной форме, однако ее можно представить многими эквивалентными способами, например, в линейной форме [1, 5].

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1, ..., \tau_N)$, приходящегося на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau_1, ..., \tau_N)$, приходящихся на единицу времени исправного функционирования системы, используем формулы [6]

$$S = \frac{\int\limits_{E} m(z) f_s(z) \rho(dz)}{\int\limits_{E} m(z) \rho(dz)}, \quad C = \frac{\int\limits_{E} m(z) f_c(z) \rho(dz)}{\int\limits_{E_+} m(z) \rho(dz)}, \quad (7)$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ — функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ с учетом обозначений, введенных в постановочной части статьи, имеют вид:

$$f_s(z) = \begin{cases} -\sum\limits_{k \in \Omega_d^0} c_k - \sum\limits_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, \ z \in \{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\overline{s}\}, & i = \overline{1, N}, \\ & \text{если } \Omega_d^1 \cup \Omega_d^3 = \varnothing, \\ \sum\limits_{k \in \Omega_d^1 \cup \Omega_d^3} c_k^0 - \sum\limits_{k \in \Omega_d^0} c_k - \sum\limits_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, \ z \in \{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\overline{s}\}, & i = \overline{1, N}, \\ & \text{если } \Omega_d^1 \cup \Omega_d^3 \neq \varnothing, \end{cases}$$

$$f_c(z) = \begin{cases} \sum\limits_{k \in \Omega_d^0} c_k + \sum\limits_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, \ z \in \{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\overline{s}\}, & i = \overline{1, N}, \\ & \text{если } \Omega_d^0 \bigcup \Omega_d^2 \neq \varnothing, \\ 0, \ z \in \{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\overline{s}\}, & i = \overline{1, N}, \\ & \text{если } \Omega_d^0 \bigcup \Omega_d^2 = \varnothing. \end{cases}$$

После преобразований формулы (7) приводятся к виду

$$S(\tau_1,...,\tau_N)=\sum_{i=1}^{N}S_i\left(\tau_i\right), \tag{8}$$

$$C\left(\tau_1,...,\tau_N\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i(\tau_i)K_i(\tau_i)}{K_u\left(\tau_1,...,\tau_N\right)}, \tag{9}$$

где $S_i(\tau_i)=\dfrac{c_i^0\tau_i-(c_i^0+c_i)\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt-c_i^p M\beta_i^p}{\tau_i+M\beta_i^p}$ — средний удельный доход i-го элемента, приходящийся на единицу календарного времени, а

$$C_i(\tau_i)=\frac{c_i^p M\beta_i^p+c_i\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt}{\tau_i-\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt}$$

— средние удельные затраты, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования i-го элемента.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРОКОВ ПРОВЕДЕНИЯ ТО ЭЛЕМЕНТОВ

Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций (6), (8) и (9) классическими методами математического программирования. Заметим, что для достижения максимальных значений КТИ $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$ и среднего удельного дохода $S(\tau_1,...,\tau_N)$ системы необходимо и достаточно оптимизировать величину наработки каждого элемента системы для проведения его ТО, что нельзя утверждать относительно минимальных средних удельных затрат $C(\tau_1,...,\tau_N)$ системы.

Для доказательства существования решений этих оптимизационных задач приравняем нулю частные производные функций $K_u(\tau_1,\ldots,\tau_N)$, $S(\tau_1,\ldots,\tau_N)$ и $C(\tau_1,\ldots,\tau_N)$. Получаем соответственно системы уравнений для определения оптимальных значений наработок τ_i^k, τ_i^s, τ_i^c, $i=\overline{1,N}$.

$$\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)-\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)-\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt=M\beta_i^p,\ i=\overline{1,N}, \tag{10}$$

$$\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)-\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)-$$
$$-\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt=\frac{(c_i^p+c_i^0)M\beta_i^p}{(c_i+c_i^0)},\quad i=\overline{1,N}, \tag{11}$$

$$c_i\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)-\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)-c_i\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt-$$

$$-\frac{\partial}{\partial K_i}\ln\varphi\left(K_1(\tau_1),\ldots,K_N(\tau_N)\right)\left[\sum_{j=1}^{N}C_j(\tau_j)K_j(\tau_j)\right]\times$$

$$\times\left[M\beta_i^p-\left(M\beta_i^p+\tau_i\right)\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i)-\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i)\right)+\int\limits_0^{\tau_i}\left(\widetilde{H}_i^{(0)}(t)-\widetilde{H}_i^{(1)}(t)\right)dt\right]=$$

$$=c_i^p M\beta_i^p,\quad i=\overline{1,N}. \tag{12}$$

Достаточные условия существования конечных решений уравнений (10)–(12) приводятся в работе [2]. В случае существования единственных решений систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами

$$K_{u\max}=\varphi\left(K_1(\tau_1^k),\ldots,K_N(\tau_N^k)\right),\quad K_i(\tau_i^k)=1-\widetilde{H}_i^{(0)}(\tau_i^k)+\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i^k),$$

$$S_{\max}=\sum_{i=1}^{N}S_i(\tau_i^s),\qquad S_i(\tau_i^s)=c_i^0+\left(c_i^0+c_i\right)\left(\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i^s)-\widetilde{H}_i^{(1)}(\tau_i^s)\right),$$

$$C_{\min}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}C_i\left(\tau_i^c\right)K_i\left(\tau_i^c\right)}{K_u\left(\tau_1^c,\ldots,\tau_N^c\right)}.$$

Если системы уравнений имеют несколько решений, то оптимальные значения показателей качества находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них. Достижение экстремума при $\tau_i\to\infty$ говорит о том, что проводить предупредительное ТО i-го элемента нецелесообразно, поскольку его проведение ухудшает показатель качества функционирования системы.

В заключение приведем пример применения полученных результатов. Рассмотрим систему из четырех элементов (рис. 2). Наработки на отказ элементов имеют распределения Вейбулла-Гнеденко с плотностями $f_i(t)=$ $=\dfrac{\lambda_i}{\theta_i}\left(\dfrac{t}{\theta_i}\right)^{\lambda_i-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\lambda_i}}$, $i=\overline{1,4}$. Времена аварийного восстановления элементов распределены по закону Эрланга порядка m: $g_i(t)=\dfrac{\mu_i(\mu_i t)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\mu_i t}$, $i=\overline{1,4}$.

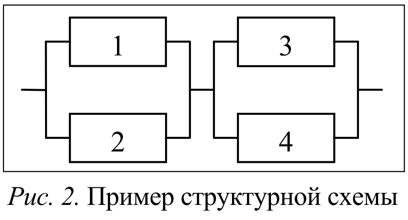

Рис. 2. Пример структурной схемы

Структурная функция системы имеет вид: $\varphi(z_1,z_2,z_3,z_4)=$ $=\left(z_1+z_2-z_1z_2\right)\left(z_3+z_4-z_3z_4\right)$.

Исходные данные и результаты расчетов приводятся в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Исходные данные в примере

№	λ_i	θ_i	$M\alpha_i$, ч	μ_i	m	$M\beta_i$, ч	$M\beta_i^p$, ч	c_i^0, грн/ч	c_i, грн/ч	c_i^p, грн/ч
1	2,5	20	17,745	0,9	4	4,444	1	3	3	2
2	1,4	30	27,343	2,1	4	1,905	0,6	6	4	3
3	1,3	40	36,943	1	3	3	1	7	5	3
4	1,7	15	13,384	1,5	3	2	0,5	8	2	1

Таблица 2. Результаты расчетов

τ_i^k, ч	$K_u^{\max}$	τ_i^s, ч	$S^{\max}$, ч	τ_i^c, ч	$C^{\min}$, грн/ч
10,578	0,981	9,882	20,545	9,053	1,110
24,908		22,832		19,692	
41,693		35,069		25,740	
8,200		7,606		5,246	

Предполагаемое направление для дальнейших исследований — решение задач оптимизации надежностных показателей системы при ограничении на стоимостные показатели и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
2. *Песчанский А.И.* Календарное техническое обслуживание простой системы с учетом минимального аварийного восстановления // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 2. — С. 106–117.
3. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.
4. *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И., Турбин А.Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
5. *Половко А.М., Гуров С.В.* Основы теории надежности. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 704 с.
6. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. — М.: Наука, 1989. — 336 с.

Поступила 12.01.2009