УДК 681.513.675

КЕРУВАННЯ ОДНОСТОРОННІМИ ПРОЦЕСАМИ ФІЛЬТРАЦІЇ В'ЯЗКИХ НАФТ ЗА НАЯВНОСТІ ГРАНИЧНОГО ГРАДІЄНТА ТИСКУ

І.В. ЖДАНОВА, О.М. НОВІКОВ

Запропоновано алгоритм керування одностороннім процесом із багатозначною перешкодою в області. Модель процесу представлено у вигляді варіаційної нерівності із негладким функціоналом відповідності. Алгоритм застосовано до задачі керування процесом фільтрації нафти в умовах наявності граничного градієнта тиску.

ВСТУП

У багатьох галузях промисловості та навколишньому середовищі зустрічаються процеси, що мають назву односторонніх. На відміну від класичних процесів математичної фізики, які називаються двосторонніми, ці процеси характеризуються наявністю специфічних ефектів односторонньої провідності границі або перешкоди в області протікання процесу. Ефективним представленням таких процесів постають варіаційні нерівності [1, 2].

Задача керування односторонніми процесами розглядалась в [3], де було запропоновано алгоритм керування одностороннім процесом із односторонньою провідністю границі (випадок товстої стінки границі) та м'якою перешкодою в області. Але розповсюдження алгоритму на клас процесів із м'якою багатозначною перешкодою в області не проводилось. Явище м'якої багатозначної перешкоди притаманне рідинам, тоді як явище м'якої перешкоди характерне для газоподібних середовищ. Аналітично в моделі процесу наявність м'якої багатозначної перешкоди описується функціоналом відповідності, який не є неперервно диференційованим.

Мета роботи — побудова алгоритму керування для класу процесів із м'якою багатозначною перешкодою в області. В роботі [4] було запропоновано підхід до моделювання процесів в умовах багатозначної функції перешкоди, яка є узагальненою похідною від негладкого функціоналу відповідності. Цей підхід використано при побудові алгоритму керування одностороннім процесом у цій роботі.

Практичне значення має задача керування односторонніми процесами із м'якою багатозначною перешкодою, зокрема, деякими з них, які мають місце у нафтодобувній промисловості. Серед цих процесів слід виокремити процеси фільтрації нафти при наявності граничних градієнтів тиску, що відбуваються у в'язких нафтах із високим вмістом парафінів та смолистих речовин [5, 6].

За допомогою співвідношень, які одержано в цій роботі, розв'язується одна з актуальних задач керування односторонніми процесами в нафтодобувній промисловості, а саме, задача керування полем тисків у околі свердловини при відомих характеристиках пласта та нафти, яка має в'язкопластичні властивості та характеризується наявністю граничного градієнта тиску.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Родовище, що розглядається, характеризується наявністю односторонніх властивостей: ці властивості представлено нелінійними ефектами, які проявляються структуруванням у нафтах. А саме, при градієнтах тиску менших за граничне значення, в нафтовому пласті утворюються зони застою, у яких нафта втрачає рухливість.

Використаємо модель у вигляді варіаційної нерівності, запропоновану в [7]. У нашому випадку вона набуває такого вигляду:

$$((\beta_c + m(z)\beta_н)\frac{\partial u}{\partial t}, v-u) - \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial z_i}b(z)k(z)\frac{\partial u}{\partial z_i}, v-u\right) + \psi(v) - \psi(u) \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{h(z)}\sum_{j=1}^{k} q_j(t)\delta(z-z^j), v-u\right) \text{ в } Q = \Omega\times[0,T] \quad \forall v \in H^1(\lambda), \qquad (1)$$

з початковою умовою $u(0) = u_0$,

де β_c — коефіцієнт стискання пористого середовища; β — коефіцієнт стискання нафти; $m(z)$ — пористість середовища; $b(z) = \dfrac{\rho}{\mu}$, де ρ — густина нафти, μ — в'язкість нафти, k — коефіцієнт проникності середовища, $z = (z_1, z_2, z_3)$, $h(z)$ — потужність пласта, $q_j(t)$ — дебіти свердловин, що діють в підобластях $\Omega_i \subset \Omega$, $j = 1..K$, K — кількість свердловин, функціонал відповідності

$$\psi = \begin{cases} \xi(t,z)u, & |\partial u/\partial z| \leq u_{\text{гран}}, \\ 0, & |\partial u/\partial z| > u_{\text{гран}}, \end{cases} \qquad (2)$$

при цьому у виразі (2) нижня гілка описує нормальне протікання процесу фільтрації, а верхня гілка відповідає «ввімкненню» перешкоди, яка призводитиме до утворення застійних зон. Коефіцієнт ξ — коефіцієнт перешкоди, який є заздалегідь невідомим і підлягає знаходженню в процесі розв'язання задачі.

Для того, щоб перейти від варіаційної нерівності (1) до задачі оптимізації, як це показано в [2], запишемо функцію багатозначної перешкоди як похідну від функціоналу (2):

$$\varphi = \begin{cases} \xi(t,z), & |\partial u/\partial z| < u_{|\partial u/\partial z| > u_{\text{гран}}}, \\ [\xi(t,z), 0], & |\partial u/\partial z| = u_{|\partial u/\partial z| > u_{\text{гран}}}, \\ 0. & |\partial u/\partial z| > u_{|\partial u/\partial z| > u_{\text{гран}}}. \end{cases}$$

Процес фільтрації нафти в цьому випадку є одностороннім процесом із м'якою багатозначною перешкодою [5].

Розв'яжемо задачу керування одностороннім процесом фільтрації нафти при наявності граничного градієнта тиску.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Критерій штрафу, який забезпечує виконання односторонніх властивостей процесу, має вигляд:

$$J = \int_0^T \int_\Omega \left\{ \begin{array}{ll} (\partial u / \partial t)^2, & |\partial u / \partial z| \le u_{\text{гран}}, \\ (\xi(t,z)\partial u / \partial t)^2, & |\partial u / \partial z| \le u_{\text{гран}} \end{array} \right\} dzdt \to \inf .$$

Використаємо апроксимацію на етапі введення локальної форми: у випадку використання похідних від φ (у виразах, наведених нижче) замість функції перешкоди φ будемо використовувати її гладку апроксимацію φ^*.

Критерій розв'язання задачі на першому етапі (етапі керування) представимо у вигляді:

$$J_1(u,f,\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_z} \int_{\Omega_r} u(T,z) Q_T(z,r) u(T,r) dzdr +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega_z} \int_{\Omega_r} (u(t,z)Q(z,r)u(t,r) + f(t,z)R(z,r)f(t,r)) dtdzdr \to \inf , \qquad (3)$$

де $Q_T(z,r)$, $Q(z,r)$, $R(z,r)$ — відомі додатньо визначені оператори. При цьому повинно бути $J_1(u,f,\xi) \to \inf$.

Розв'язок задачі оптимального керування системою приймає вигляд:

$$f(t,z) = \int_{\Omega_r} \int_{\Omega_\rho} R^*(z,r) s(t,r,\rho) u(t,\rho) dr d\rho , \qquad (4)$$

де $R^*(z,r)$ — ядро, обернене до $R(z,r)$ таке, що $\int_\Omega R^*(z,r)R(r,\rho)dr =$ $= \delta(z-\rho)I$, а функція $s(t,z,r)$ визначається з рівняння Ріккаті та має вигляд:

$$\frac{\partial s(t,z,r)}{\partial t} = -F(z)s(t,z,r) - \frac{\partial \varphi^*(u,\xi)}{\partial u} s(t,z,r) \bigg|_z - F(r)s(t,z,r) -$$

$$- \frac{\partial \varphi^*(u,\xi)}{\partial u} s(t,z,r) \bigg|_r + \int_{\Omega_\rho} \int_{\Omega_\gamma} R^*(\gamma,\rho) s(t,z,\gamma) s(t,\rho,r) d\rho d\gamma - Q(z,r), \qquad (5)$$

де оператор $F(\cdot) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial(\cdot)_i} \left(k^*(\cdot) \frac{\partial}{\partial(\cdot)_i} \right)$, а граничні та кінцеві умови мають вигляд:

$$s(t,z,r)\big|_{\Gamma_z} = 0 ,$$

$$s(t,z,r)\big|_{\Gamma_r} = 0 , \; s(T,z,r) = Q_T(z,r) . \qquad (6)$$

Перейдемо до етапу оцінювання. Нехай відомий результат першого кроку — $\{\hat{u}, \hat{s}, \hat{f}\}$. Зафіксуємо керуючу змінну f. При цьому критерій $J_2(u, s, f, \xi) \to \inf$ визначається виразом (7). В якості обмежень виступають рівняння (8), (9). На другому етапі при оцінюванні невідомого параметра процесу розглянемо задачу мінімізації функціонала

$$J_2 = \int_0^T \int_{\Omega_z} F_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dt \to \inf_{\xi} \tag{7}$$

при обмеженнях на u, s

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} k^* \frac{\partial u}{\partial z} + \phi^*(u, \xi) - \int_{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\beta} R^*(z, \alpha) s(t, \beta, \alpha) u(t, \beta) d\alpha d\beta = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} k^*(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k^*(y) \frac{\partial u}{\partial y} + \left[\left. \frac{\partial \varphi^*(u, \xi)}{\partial u} \right|_{u=u(x)} + \left. \frac{\partial \varphi^*(u, \xi)}{\partial u} \right|_{u=u(y)} \right] s(t, x, y) -$$

$$- \int_{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\beta} s(t, x, \alpha) R^*(\alpha, \beta) s(t, y, \beta) d\alpha d\beta + Q(x, y) = 0 \tag{9}$$

з початковими і граничними умовами

$$u\big|_{t=0} = u^0(z); \quad u\big|_{z \in \partial\Omega} = u^{\text{гран}},$$

$$s\big|_{t=0} = s^0(x, y), \quad s(t, x, y)\big|_{x \in \partial\Omega_x} = s^{\text{гран}},$$

$$s(t, x, y)\big|_{y \in \partial\Omega_y} = s^{\text{гран}}.$$

Введемо наступні позначення: $\psi_0 = u$, $\psi_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\psi_{i+1} = \dfrac{\partial u}{\partial z_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Вираз (8) набуде вигляду:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right) + \varphi^*(\psi_0, \xi) - \int_{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\beta} R^*(z, \alpha) s(t, \beta, \alpha) \psi_0(t, \beta) d\alpha d\beta = 0.$$

Диференціюючи (8) по t та покладаючи $\psi_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right) + \left. \frac{\partial \phi^*}{\partial u} \right|_{u=\psi_0} \psi_1 - \int_{\Omega_\alpha} \int_{\Omega_\beta} R^*(z, \alpha)[s(t, \beta, \alpha) \psi_1(t, \beta) +$$

$$+ \frac{\partial s(t, \beta, \alpha)}{\partial t} \psi_0(t, \beta) d\alpha d\beta = 0.$$

Диференціюючи (8) по z_i та покладаючи $\psi_{i+1} = \dfrac{\partial u}{\partial z_i}$ ($i = 2, 3, 4$):

$$\frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k(z) \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\psi_{i+1} \frac{\partial k}{\partial z_i}\right) + \frac{\partial \phi^*}{\partial u} \psi_{i+1} -$$

$$-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}\frac{\partial R^*(z,\alpha)}{\partial z_{i-1}}s(t,\beta,\alpha)\psi_0(t,\beta)d\alpha d\beta\,.$$

Для s маємо вихідне рівняння $(s = s(t,x,y)\equiv s^{(0)})$

$$\frac{\partial s^{(0)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial s^{(0)}}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k(y)\frac{\partial s^{(0)}}{\partial y})+B(\psi(x),\psi(y),\xi)s^{(0)}(t,x,y)+$$

$$+Q(x,y)-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}s^{(0)}(t,x,\alpha)R^*(\alpha,\beta)s^{(0)}(t,y,\beta)d\alpha d\beta=0\,,$$

де $B(\psi,\xi)\equiv\left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial u}\right|_{u=\psi_0(x)}+\left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial u}\right|_{u=\psi_0(y)}$.

Також слід додати рівняння для $s^{(1)}\equiv\frac{\partial s}{\partial t}$, яке отримується диференціюванням за часом t:

$$\frac{\partial s^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial s^{(1)}}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(k(y)\frac{\partial s^{(1)}}{\partial y})+B(\psi,\xi)s^{(1)}(t,x,y)=$$

$$=\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}\{s^{(1)}(t,x,\alpha)R^*(\alpha,\beta)s^{(0)}(t,y,\beta)+s^{(0)}(t,x,\alpha)R^*(\alpha,\beta)s^{(1)}(t,y,\beta)\}d\alpha d\beta\,.$$

Тепер перепозначимо змінні, вводячи компоненти $S_{\varepsilon k}$, R^*_{pq}, B_{pq}, Q_{ik} таким чином, що вихідна задача, де в критерії (7) містяться похідні, зводиться до задачі:

$$J_2=\int_0^T\int_\Omega F(\psi)dzdt\to\inf_\xi\,,$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+A_z\psi_i+\varphi_i(\psi,\xi)-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}R^*_{ip}(z,\alpha)s_{pk}(t,\beta,\alpha)\psi_k(t,\beta)d\alpha d\beta=0\,,$$

$$A(\cdot)=\frac{\partial}{\partial z}k(z)\frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\,,\ \ \psi\big|_{t=0}=\psi_0(z)\,;\ \ \psi\big|_{\partial\Omega}=\psi_{\text{гран}}(z,t)\big|_{z\in\partial\Omega}\,,$$

$$\frac{\partial s_{ik}(t,x,y)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial s_{ik}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(y)\frac{\partial s_{ik}}{\partial y}\right)+B_{ir}(\psi(x),\psi(y),\xi)s_{rk}(t,x,y)+$$

$$+Q_{ik}(t,x,y)=\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta}\{s_{iq}(t,x,\alpha)R^*_{qp}(\alpha,\beta)s_{qp}(t,\beta,y)\}d\alpha d\beta\,,$$

$$s_{ik}(t,x,y)\big|_{t=0}=s^0_{ik}(x,y),\quad s_{ik}(t,x,y)\big|_{x\in\partial\Omega}=s^{\text{гран}},\ \ s_{ik}(t,x,y)\big|_{y\in\partial\Omega}=s^{\text{гран}}.$$

Розв'язуючи таку вихідну задачу методом Лагранжа, отримуємо:

$$L=\int_0^T\int_{\Omega_z}F(\psi(z))dzdt+\int_0^T\int_{\Omega_z}\Phi_i(z)\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+A_z\psi_i+\varphi_i(\psi,\xi)-\right.$$

$$-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta} R^*_{ip}(z,\alpha)s_{pk}(t,\beta,\alpha)\psi_k(t,\beta)\Bigg\}dzdt+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{\Omega_y} K_{ik}(t,x,y)\Bigg\{\frac{\partial s_{ik}}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial s_{ik}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k(y)\frac{\partial s_{ik}}{\partial y}\right)+B_{ir}(\psi(x),\psi(y),\xi)s_{rk}(t,x,y)+$$

$$+Q_{ik}(t,x,y)-\int_{\Omega_\alpha}\int_{\Omega_\beta} s_{iq}(t,x,\alpha)R^*_{pq}(\alpha,\beta)s_{pk}(t,\beta,y)d\alpha d\beta\Bigg\}dxdy\,.$$

Варіюючи L, одержимо необхідні умови екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi}=\int_0^T\int_{\Omega_z}\Phi_i(z)\frac{\partial \varphi_i^*(\psi,\xi)}{\partial \xi}dtdz+\int_0^T\int_{\Omega_x}\int_{\Omega_y}\frac{\partial B_{ir}}{\partial \xi}(\psi(x),\psi(y),\xi)\times$$

$$\times s_{rk}(t,x,y)K_{ik}(t,x,y)dxdydt. \qquad (10)$$

Невідомий параметр ξ знаходиться за допомогою градієнтної процедури

$$\xi^{i+1}=\xi^i-\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^i, \qquad (11)$$

λ — параметр градієнтної процедури,

$$\frac{\left|J_2^i-J_2^{i+1}\right|}{J_2^i}\le\varepsilon\,, \qquad (12)$$

а параметр процесу, що знаходиться таким чином, приймає значення $\hat{\xi}$. Отже, отримано розв'язок $\{\hat{u},\hat{\xi}\}$.

Загальний алгоритм оптимального керування та оцінювання параметра функції відповідності приймає вигляд:

1. Для кроку поточної ітерації $i=0$ процедури оцінювання параметра функції відповідності, задаємо даному невідомому параметру початкове довільне значення ξ^0.

2. Для відомого фіксованого значення ξ^i розв'язується задача оптимального керування.

3. Для відомого f^i на основі (10) визначаємо $\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^i$, де u^i визначається у п. 2, Φ, K визначаються умовами $\frac{\delta L}{\delta \psi_i}=0$, $\frac{\delta L}{\delta s}=0$.

4. Для кроку $i+1$ на основі (11) визначаємо значення ξ^{i+1}.

5. Перевіряємо умову (12). Якщо вона виконується, переходимо до п. 6, якщо вона не виконується — покладаємо $\xi^{i+1}:=\xi^i$ та переходимо до п. 2.

6. Закінчення алгоритму.

На основі запропонованих співвідношень було проведено обчислювальний експеримент. Результати експерименту показали, що коефіцієнт перешкоди в результаті градієнтної процедури настроюється до ненульових значень в областях, в яких виконуються такі умови: градієнт тиску менше граничного та спостерігається збурення тиску від свердловин. В околі розташування свердловин градієнт у більшості випадків перевищує граничне значення. Відповідно, у цьому околі коефіцієнт перешкоди дорівнює нулю, також близькі до нульових значення відповідають областям, де вплив від джерел збурення тиску стає майже непомітним.

При проведенні експерименту використано наступні вихідні дані: вихідний стан $u_0 = 100$ Па; граничне значення градієнта тиску $u_{\max} = 0{,}5$ Па; коефіцієнт проникності $k = 62{,}5$ кг/м^3; густина $\rho = 800$ кг/м^3; в'язкість $\mu = 10^{-3}$ Па·с; інтенсивність добувної свердловини $f = 40$ м^3/добу; позиції свердловин: (30,50), (40,50), (40,40), (40,60), (40,70), (40,100), (50,40), (50,50), (50,60), (50,70), (60,40), (60,50); розміри пласта 300 м$\times$300м; потужність пласта $h = 1$ м; пористість $m = 20\%$; коефіцієнт стискання середовища $\beta_c = 10^{-1}\,\text{Па}^{-1}$; коефіцієнт стискання нафти $\beta_н 10^{-1}\,\text{Па}^{-1}$.

Під час обчислень було використано такі параметри градієнтної процедури: точність — $\varepsilon = 10^{-2}$; початкове значення параметра перешкоди — $\xi^0 = 0$; крок градієнтної — процедури $\lambda = 10^{-4}$. Критерій оптимального керування має вигляд: $J_1 = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T (u(t,z) - u_{\text{задане}})^2\, dtdz$; $u_{\text{задане}} = 80$.

На рис. 1–2 поведінка процесу ілюструється на ділянці, яка вміщує джерела від'ємного нагнітання тиску. На етапі розробки пласта, що розглядається, наявні лише добувні свердловини, а нагнітаючі свердловини, які слугують для «підтискання» нафти до добувних свердловин шляхом закачування у пласт води, відсутні. При цьому; $u^*(t) = u(z_1^*, z_2^*, t)$; $z_1^* = 50м$; $z_2^* = 80м$, $q(t)$ — дебіт свердловини, k — крок ітераційної процедури.

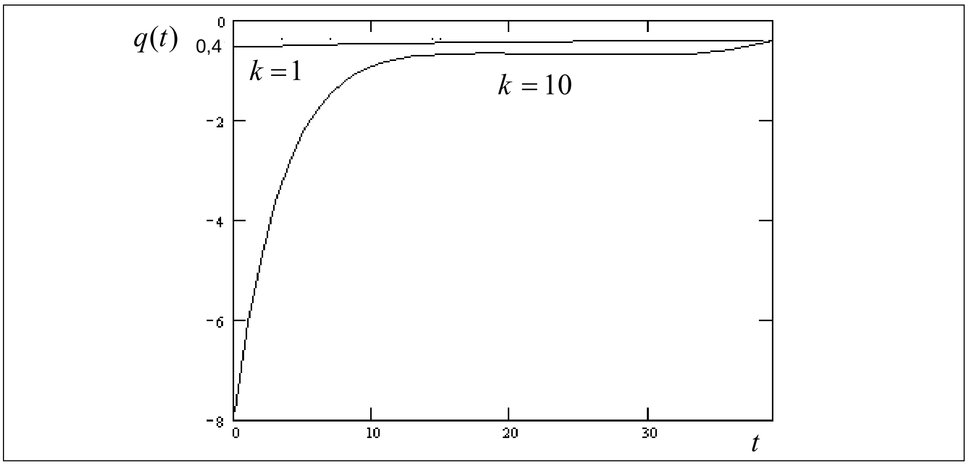

Рис. 1. Налаштування зовнішнього впливу під час градієнтної прецедури (дебіт свердловини)

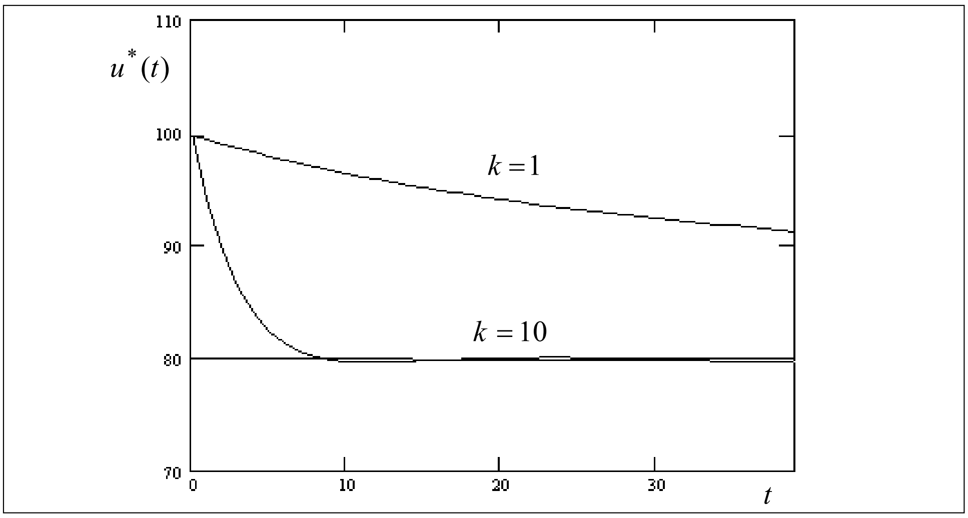

Рис. 2. Тиск у характерній точці на першому ($k=1$) та останньому ($k=10$) кроках градієнтної процедури

Між рис. 3 та рис. 4 спостерігається наступна відповідність (див. останній крок процедури): коли модуль градієнта менший за критичне значення (відмітка 0,5), вмикається функція перешкоди, коефіцієнт якої приймає ненульове значення — це відповідає утворенню застійних явищ у нафті. Перешкода зникає при значеннях градієнта більших за 0,5.

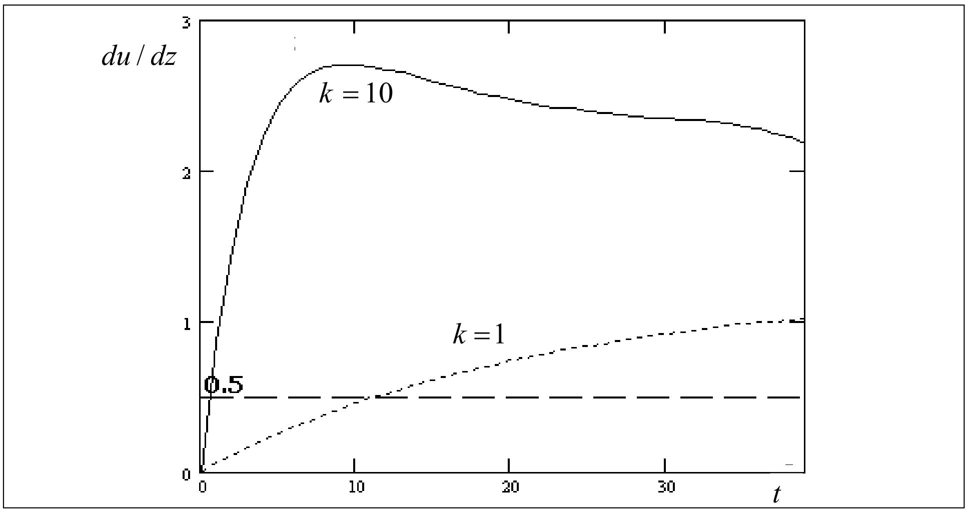

Рис. 3. Модуль градієнта тиску на першому ($k=1$) та останньому ($k=10$) кроках градієнтної процедури

Період прогнозування складав 40 діб, процедуру настройки завершено при значенні критерію завершення 10^{-2} одиниць.

ВИСНОВКИ

Серед одержаних результатів особливе значення має відновлення місцезнаходження меж перешкоди, на яких значення градієнта тиску приймає граничне значення, а тиск неперервно змінюється при переході крізь таку границю. Знаходження розташування границі, яка розмежовує області із класичною поведінкою, та області із проявленням односторонніх ефектів дає змогу визначити місцезнаходження застійних зон. Такі дані відіграють важливу роль у керуванні процесом видобутку нафти.

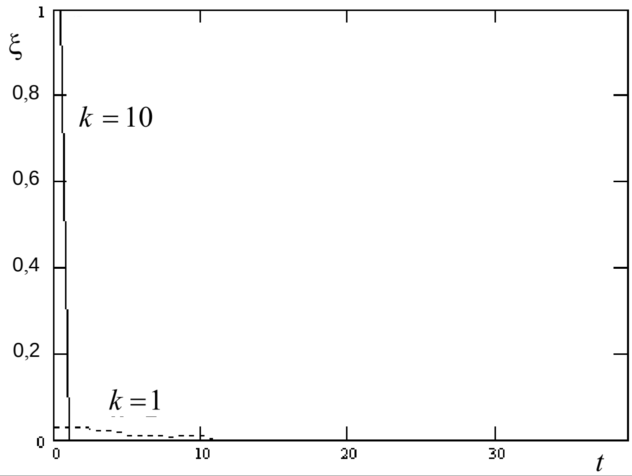

Рис. 4. Коефіцієнт перешкоди на першому ($k = 1$) та останньому ($k = 10$) кроках градієнтної процедури

Отримані в роботі результати можуть бути в подальшому розвинені на випадок, коли керування має не миттєвий вплив на процес, а середовище реагує на нього із деяким запізненням.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 588 с.
3. *Згуровский М.З., Новиков А.Н.* Анализ и управление односторонними физическими процессами. — Киев: Наук. думка, 1996. — 327 с.
4. *Жданова І.В., Новіков О.М.* Апроксимаційний підхід до розв'язання односторонніх задач із негладкими функціоналами відповідності // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2004. — № 5. — С. 127–135.
5. *Бернадинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М.: Наука, 1975. — 200 с.
6. *Скворцов Э.В.* Подземная гидромеханика аномальных жидкостей. — Казань: Изд-во. Казан. ун-та, 1985. — 220 с.
7. *Жданова І.В., Новіков О.М.* Моделювання процесів фільтрації нафти з наявністю граничного градієнту тиску // Системні технології. — 2004. — № 5(34). — С. 111–119.

Надійшла 08.10.2009