УДК 519.873

КАЛЕНДАРНОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ПРОСТОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ МИНИМАЛЬНОГО АВАРИЙНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ

Рассмотрена стратегия минимальных восстановлений с периодически полными заменами и учетом времени восстановления. Для системы с простой структурой введен альтернирующий процесс минимального восстановления. Исследовано его асимптотическое поведение с помощью тауберовых теорем. Определены оптимальные сроки проведения полных замен.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из стратегий технического обслуживания простой системы является стратегия минимальных восстановлений с периодически полными заменами [1]. Данная стратегия предполагает полное обновление системы только в определенные моменты времени. Если же система отказывает на интервале между двумя последовательными полными восстановлениями, то производится лишь минимальное восстановление. Минимальное восстановление означает, что наработка восстановленной системы, проработавшей к моменту отказа время s, имеет следующую функцию распределения:

$$F_s(t) = \frac{F(s+t) - F(t)}{\overline{F}(s)}. \tag{1}$$

В работе [1] оптимальное планирование профилактических замен получено в предположении, что все мероприятия по восстановлению осуществляются за пренебрежительно малое время. Поэтому, при построении математической модели функционирования системы время восстановления считается равным нулю. Однако, на практике это предположение нередко не выполняется и приходится учитывать время на восстановительные мероприятия.

Цель статьи — исследование стратегии минимальных восстановлений с периодически полными заменами и учетом времени восстановления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, состоящую из одного элемента, в которой возможно проведение планового технического обслуживания (ТО) и внеплановых аварийно-профилактических ремонтов. Установим следующую очередность проведения восстановительных работ. Время безотказной работы элемента в нулевой момент времени СВ α с ФР $F(t)=P(\alpha \le t)$. После каждого отказа элемента, который обнаруживается мгновенно, начинается его минимальное аварийное восстановление (МАВ) [1]. Продолжительность МАВ–СВ β с ФР $G(t)=P(\beta \le t)$. По определению, после МАВ элемент, проработавший время s, имеет «остаточную наработку» с ФР (1).

Таким образом, МАВ делает элемент работоспособным, но по его окончании интенсивность отказов такая же, как непосредственно перед отказом. После следующего отказа и МАВ ФР «остаточной наработки» определяется по-прежнему формулой (1), в которой s — суммарное время работы элемента с начала его эксплуатации и т.д. Кроме внеплановых аварийно-профилактических ремонтов в системе проводится предупредительное ТО. Предупредительное ТО элемента планируется через время τ после начала его работы, независимо от того в работоспособном или отказовом состоянии он находится. Продолжительность ТО – СВ β^p с ФР $G^p(t)=P(\beta^p \le t)$. В результате ТО элемент полностью обновляет свои надежностные характеристики и очередное ТО планируется через время τ после обновления элемента. Временная диаграмма функционирования элемента изображена на рис. 1.

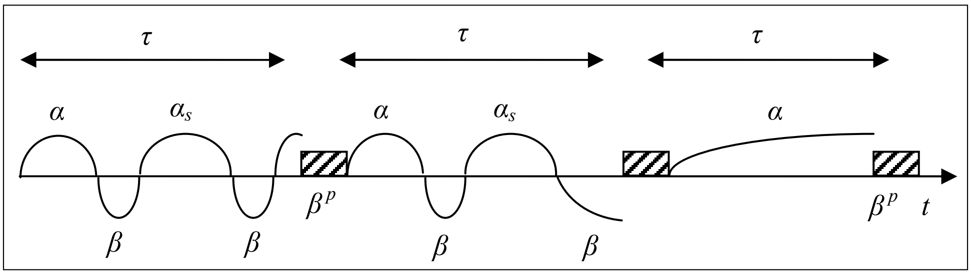

Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы

Предполагается, что СВ α, β и β^p независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\beta$, $M\beta^p$. Отключение и включение элемента происходит мгновенно. Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и плата за единицу времени ТО элемента соответственно равны c^0, c и c^p.

Необходимо определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau)$, приходящуюся на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования системы. Определить промежутки времени τ между окончанием предыдущего и началом последующего ТО элемента, для которых указанные показатели качества функционирования системы имели бы оптимальные значения.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Элемент может находиться в одном из трех физических состояний: в работоспособном состоянии, в состоянии восстановления или пребывать в состоянии ТО. Случайный процесс, описывающий эволюцию системы во времени является регенерирующим. Точками регенерации являются моменты обновления системы после ТО. Тогда коэффициент технического использования (КТИ) K_u элемента можно определить по формуле $K_u = \dfrac{MX^{(1)}}{MX}$ [2], где MX среднее время между точками регенерации, а $MX^{(1)}$ среднее время работы элемента за период между точками регенерации. В нашем случае $MX = \tau + M\beta^p$. Для нахождения $MX^{(1)}$ подготовим определенные теоретические основы, для чего введем и исследуем альтернирующий процесс минимального восстановления.

Рассмотрим следующий случайный процесс. Элемент отказывает спустя случайную наработку α_1 и осуществляется его минимальное восстановление по прошествии случайного времени β_1. Восстановленный элемент работает время α_2, затем наступает отказ и новое минимальное восстановление через время β_2 и т.д. (рис. 2). Моменты времени $T_1 = \alpha_1$, $T_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2, \ldots$, в которые элемент отказывает, назовем моментами 0-восстановлений. Моменты времени $S_1 = \alpha_1 + \beta_1$, $S_2 = \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2, \ldots$, в которые заканчиваются восстановления, назовем моментами 1-восстановления.

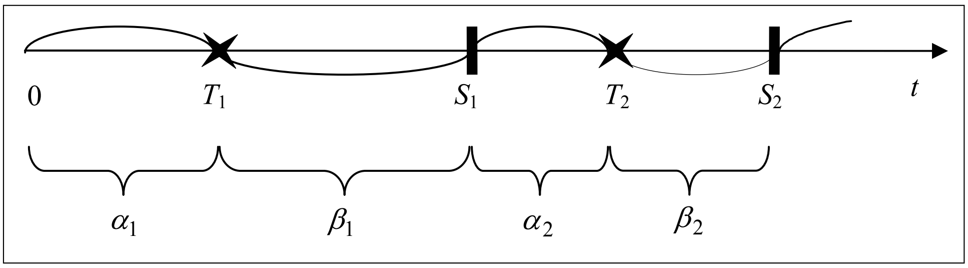

Рис. 2. Реализация альтернирующего процесса минимального восстановления

Каждая СВ из последовательности $\{\beta_n,\ n \ge 1\}$ имеет ФР $G(t)$. СВ α_1 из последовательности $\{\alpha_n,\ n \ge 1\}$ имеет ФР $F(t)$, а ФР всех остальных СВ определяются формулой (1). Последовательность $\{\alpha_n,\ n \ge 1\}$ порождает нестационарный пуассоновский процесс с параметром $\Lambda(s) = -\ln \overline{F}(s)$ [1].

Определение. Последовательность $\{(\alpha_n, \beta_n),\ n \ge 1\}$, так же как и последовательность $\{(T_n, S_n), n \ge 1\}$, назовем альтернирующим процессом минимального восстановления.

Альтернирующий процесс минимального восстановления можно эквивалентным образом описать процессом $\{Z(t),\ t \ge 0\}$ с помощью соотношения

$$Z(t)=\begin{cases}0, & t\in[T_n,S_n),\\ 1, & t\notin[T_n,S_n).\end{cases} \tag{2}$$

По определению процесс $Z(t)$ задает состояние элемента в момент t: $Z(t)=1$, если элемент работает в момент t, и $Z(t)=0$, если элемент в момент t восстанавливается (рис. 3).

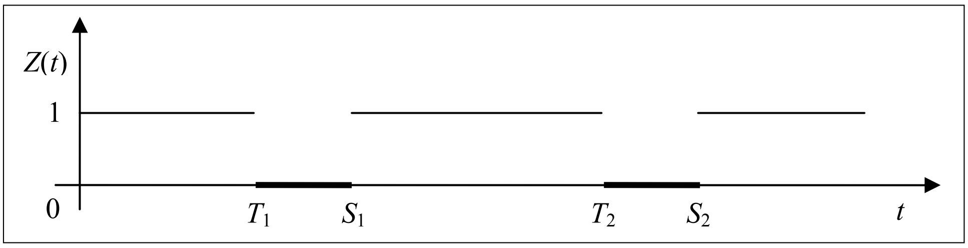

Рис. 3. Реализация процесса $\{Z(t)\}$

Отметим, что в случае экспоненциального распределения наработки альтернирующий процесс минимального восстановления есть обычный альтернирующий процесс восстановления.

Через $N_0(t)$ обозначим случайное число 0-восстановлений, а через $N_1(t)$ — случайное число 1-восстановлений на интервале $(0,t]$. Очевидно, $N_0(t)$ и $N_1(t)$ являются считающими альтернирующими процессами, для которых справедливы соотношения

$$P(N_0(t)\ge k)=P(T_k\le t)=$$

$$=\int_0^t G^{*(k-1)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^{k-1}}{(k-1)!}f(t-s)ds,\ \left(G^{*(0)}(s)\equiv 1\right),\ k\in N,$$

$$P(N_1(t)\ge k)=P(S_k\le t)=\int_0^t G^{*(k)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^{k-1}}{(k-1)!}f(t-s)ds,\quad k\in N.$$

Здесь $\Lambda(t)$ — накопленная интенсивность отказов: $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$, $\lambda(t)$ — интенсивность отказов. Отсюда средние значения 0- и 1-восстановлений на интервале $[0,t]$ задаются такими функциями восстановления:

$$\widetilde{H}^{(0)}(t)=M[N_0(t)]=F(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G^{*(n)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^n}{n!}f(t-s)ds,$$

$$\widetilde{H}^{(1)}(t)=M[N_1(t)]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t G^{*(n)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^{n-1}}{(n-1)!}f(t-s)ds.$$

Плотности 0- и 1-восстановлений определяются формулами:

$$\widetilde{h}^{(0)}(t)=\frac{d}{dt}\widetilde{H}^{(0)}(t)=f(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t g^{*(n)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^n}{n!}f(t-s)ds,$$

$$\widetilde{h}^{(1)}(t)=\frac{d}{dt}\widetilde{H}^{(1)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t g^{*(n)}(s)\frac{[\Lambda(t-s)]^{n-1}}{(n-1)!}f(t-s)ds\,.$$

Плотности восстановлений имеют следующую вероятностную интерпретацию: $\widetilde{h}^{(0)}(t)dt$ $\left(\widetilde{h}^{(1)}(t)dt\right)$. Она представляет собой вероятность того, что 0-восстановление (1-восстановление) произойдет в интервале времени $(t,\ t+dt]$.

Особый интерес представляет вероятность $P\left(Z(t)=1,\ \widetilde{V}_u^{(1)}>t\right)$, где $\widetilde{V}_u^{(1)}$ означает остаточную наработку. Очевидно $P\left(Z(t)=1,\ \widetilde{V}_u^{(1)}>t\right)$ означает вероятность того, что исправный к моменту u элемент не откажет на следующем интервале времени $(u,u+t]$.

С учетом соотношения (2) по формуле полной вероятности получаем

$$\overline{\widetilde{V}}^{(1)}(u,t)=P\left(Z(t)=1,\ \widetilde{V}_u^{(1)}>t\right)=$$

$$=\overline{F}(u+t)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^u\overline{F}(u-s+t)\frac{[\Lambda(u-s)]^n}{n!}g^{*(n)}(s)ds\,. \qquad (3)$$

Выражение $\overline{\widetilde{V}}^{(1)}(u,t)=P\left(Z(t)=1,\ \widetilde{V}_u^{(1)}>t\right)$ называется нестационарным коэффициентом оперативной готовности для альтернирующего процесса минимального восстановления. Нестационарный коэффициент готовности определяется соотношением $K(u)=P\left(Z(u)=1\right)=M\left(Z(u)\right)$. Он равен вероятности того, что элемент работает в момент u. Если положить в соотношении (3) $t=0$, то для этого частного случая

$$K(u)=\overline{F}(u)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^u\overline{F}(u-s)\frac{[\Lambda(u-s)]^n}{n!}g^{*(n)}(s)ds\,.$$

Найдем среднее время работы элемента за период между точками регенерации $MX^{(1)}$. Суммарное время безотказной работы $U(\tau)$ элемента за время $(0,t]$: $U(\tau)=\int_0^{\tau}Z(t)dt$. Очевидно, что $U(\tau)$ равняется сумме наработок α_i (интерпретирующиеся здесь как рабочие периоды) до момента τ, включая, возможно, неполный рабочий период, непосредственно примыкающий к моменту τ.

$$MX^{(1)}=M\left[U(\tau)\right]=M\left[\int_0^{\tau}Z(u)du\right]=\int_0^{\tau}M[Z(u)]du=\int_0^{\tau}K(u)du=$$

$$=\int_0^{\tau}\overline{F}(u)du+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\tau}\overline{F}(u-s)\frac{[\Lambda(u-s)]^n}{n!}G^{*(n)}(s)ds\,.$$

С учетом соотношения $\overline{F}(t)\frac{[\Lambda(t)]^n}{n!}=\int_0^t f(s)\frac{[\Lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!}ds-\int_0^t f(s)\frac{[\Lambda(s)]^n}{n!}ds$, выражение в правой части последнего равенства приводится к виду:

$$MX^{(1)} = \tau - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du \,.$$

Следовательно, КТИ определяется формулой

$$K_u(\tau) = \frac{\tau - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du}{\tau + M\beta^p} \,. \qquad (4)$$

Средний удельный доход $S(\tau)$, приходящийся на единицу календарного времени, и средние удельные затраты $C(\tau)$, приходящиеся на единицу времени исправного функционирования элемента, определяются соотношениями [2]:

$$S(\tau) = \frac{c^0 MX^{(1)} - cMX^{(0)} - c^p MX^{(2)}}{MX}, \quad C(\tau) = \frac{cMX^{(0)} + c^p MX^{(2)}}{MX^{(1)}}, \qquad (5)$$

где $MX^{(0)}$, $MX^{(2)}$ среднее суммарное время АВ и среднее время ТО элемента за период регенерации соответственно. В нашем случае эти формулы принимают вид:

$$S(\tau) = \frac{c^0 \tau - (c^0 + c) \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du - c^p M\beta^p}{\tau + M\beta^p},$$

$$C(\tau) = \frac{c \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du + c^p M\beta^p}{\tau - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du}.$$

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

Определение наилучших показателей качества функционирования системы сводится к отысканию точек экстремума функций (4) и (5). Приравнивая к нулю производные этих функций, получаем уравнения:

$$\left(\tau + M\beta^p \right) \left(\widetilde{H}^{(0)}(\tau) - \widetilde{H}^{(1)}(\tau) \right) - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du = M\beta^p,$$

$$\left(\tau + M\beta^p \right) \left(\widetilde{H}^{(0)}(\tau) - \widetilde{H}^{(1)}(\tau) \right) - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du = \frac{c^0 + c^p}{c^0 + c} M\beta^p, \quad (6)$$

$$\tau \left(\widetilde{H}^{(0)}(\tau) - \widetilde{H}^{(1)}(\tau) \right) - \int_0^{\tau} \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u) \right) du +$$

$$+\frac{c^p}{c} M\beta^p \left(\widetilde{H}^{(0)}(\tau) - \widetilde{H}^{(1)}(\tau)\right) = \frac{c^p}{c} M\beta^p .$$

Для доказательства существования решений этих уравнений определим множество значений непрерывных функций в левых частях уравнений. Функции в точке $\tau = 0$ равны нулю. Для определения поведения при $\tau \to \infty$ исследуем асимптотическое поведение функций $\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)$ и $\Psi(t) \equiv t\left(\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)\right) - \int\limits_0^t \left(\widetilde{H}^{(0)}(u) - \widetilde{H}^{(1)}(u)\right) du$ при $t \to \infty$ с помощью тауберовых теорем.

Теорема 1. Если существует $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)\right)$, тогда

$$\lim_{t\to\infty}\left(\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)\right) = \frac{\lambda(\infty)M\beta}{1+\lambda(\infty)M\beta}, \quad 0 \le \lambda(\infty) \le \infty . \tag{7}$$

Для доказательства этого утверждения воспользуемся предельным соотношением [3]

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu}} \varphi(t) = \lim_{p\to+0} p^{\nu+1}\hat{\varphi}(p), \quad \nu > -1 , \tag{8}$$

где $\hat{\varphi}(p)$ — преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$: $\hat{\varphi}(p) \equiv L[\varphi(t)](p) = \int\limits_0^\infty \varphi(t) e^{-pt} dt$.

Имеем

$$L\left[\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)\right](p) = L\left[F(t) - \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t g^{*(n)}(t-s)\overline{F}(s)\frac{[\Lambda(s)]^n}{n!}ds\right](p) =$$

$$= \frac{\hat{f}(p)}{p} - \sum_{n=1}^{\infty}[\hat{g}(p)]^n \int_0^\infty e^{-pt}\overline{F}(t)\frac{[\Lambda(t)]^n}{n!}dt = \frac{1}{p} - \int_0^\infty e^{-pt} e^{(1-\hat{g}(p))\Lambda(t)} dt .$$

Вычислим предел в правой части соотношения (8) в случае $\nu = 0$:

$$\lim_{p\to+0} pL\left[\widetilde{H}^{(0)}(t) - \widetilde{H}^{(1)}(t)\right](p) = 1 - \lim_{p\to+0}\int_0^\infty e^{-s} e^{-(1-\hat{g}(p))\Lambda\left(\frac{s}{p}\right)} ds .$$

Равномерная сходимость относительно p позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла. Учитывая равенство $\lim\limits_{p\to 0}(1-\hat{g}(p))\Lambda\left(\dfrac{s}{p}\right) = \lambda(\infty)sM\beta$, приходим к формуле (7).

Следствие. Если ТО элемента не проводится, тогда стационарный КТИ равен

$$K_u(\infty) = \frac{1}{1+\lambda(\infty)M\beta} .$$

Действительно,

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau-\int\limits_0^{\tau}\left(\widetilde{H}^{(0)}(u)-\widetilde{H}^{(1)}(u)\right)du}{\tau+M\beta^{p}}=\lim_{\tau\to\infty}\left[1-\left(\widetilde{H}^{(0)}(\tau)-\widetilde{H}^{(1)}(\tau)\right)\right]=\frac{1}{1+\lambda(\infty)M\beta}.$$

Таким образом, если интенсивность отказов $\lambda(t)$ стремится к нулю, тогда КТИ системы стремится к единице и ТО системы проводить нецелесообразно. В случае неограниченного возрастания интенсивности отказов КТИ системы стремится к нулю, поэтому естественно проводить ТО системы.

Далее исследуем асимптотическое поведение функции $\Psi(t)$.

Теорема 2. Если $\lambda(t)=O(t^{\varepsilon}),\ \varepsilon>0$, тогда $\Psi(t)=O(t^{\frac{1}{\varepsilon+1}})$ при $t\to\infty$.

Доказательство. Используем предельное соотношение (8) в случае $\nu=\dfrac{1}{\varepsilon+1}$. Заметим, что

$$\Psi(t)=\int\limits_0^{t}u\left(\widetilde{h}^{(0)}(u)-\widetilde{h}^{(1)}(u)\right)du\,,$$

$$L\left[\Psi(t)\right](p)=\frac{1}{p}\int\limits_0^{\infty}e^{-pt-(1-\hat{g}(p))\Lambda(t)}\left(1-pt+p\hat{g}'(p)\Lambda(t)\right)dt\,.$$

Имеем

$$\lim_{p\to0}p^{\frac{1}{\varepsilon+1}+1}\hat{\psi}(p)=\lim_{p\to0}p^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\int\limits_0^{\infty}e^{-pt-(1-\hat{g}(p))\Lambda(t)}\left(1-pt+p\hat{g}'(p)\Lambda(t)\right)dt=$$

$$=\left[t=\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\right]=\lim_{p\to0}p^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\int\limits_0^{\infty}\left(1-p\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}+\right.$$

$$\left.+\,p\hat{g}'(p)\Lambda\left[\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\right]\right)\frac{e^{-p\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}-(1-\hat{g}(p))\Lambda\left[\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\right]}}{(\varepsilon+1)\left(1-\hat{g}(p)\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}}x^{\frac{1}{\varepsilon+1}-1}dx\,.$$

Совершим предельный переход под знаком интеграла и учтем, что

$$\lim_{p\to0}p\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}=0,\quad \lim_{p\to0}\left(1-\hat{g}(p)\right)\Lambda\left[\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\right]=$$

$$=\frac{Kx}{1+\varepsilon},\quad \lim_{p\to0}p\Lambda\left[\left(\frac{x}{1-\hat{g}(p)}\right)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}\right]=\frac{Kx}{(1+\varepsilon)M\beta}\,.$$

Получаем

$$\lim_{p\to 0} p^{\frac{1}{\varepsilon+1}+1}\hat{\psi}(p)=\frac{1}{(\varepsilon+1)(M\beta)^{\frac{1}{\varepsilon+1}}}\int_0^\infty e^{-\frac{K}{\varepsilon+1}x}\left(1-\frac{K}{\varepsilon+1}x\right)x^{\frac{1}{\varepsilon+1}-1}dx=$$

$$=\frac{1}{(\varepsilon+1)}\left(\frac{\varepsilon+1}{KM\beta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\int_0^\infty e^{-s}(1-s)s^{\frac{1}{\varepsilon+1}-1}ds=\frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2}\left(\frac{\varepsilon+1}{KM\beta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\Gamma\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{1+\varepsilon}+1\right)\psi(t)}{t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}}=\frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2}\left(\frac{\varepsilon+1}{KM\beta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\Gamma\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right),$$

$$\psi(t)\sim\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\left(\frac{\varepsilon+1}{KM\beta}\right)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}t^{\frac{1}{1+\varepsilon}},\quad \psi(t)=O\left(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right).$$

Заметим, что условия этой теоремы удовлетворяют СВ, имеющие усеченное слева нормальное распределение, а также распределенные по закону Вейбулла-Гнеденко с плотностью $f(t)=\frac{\lambda}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\lambda-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\lambda}},\ \ \theta>0,\ \lambda>1$.

Для исследования асимптотического поведения функции $\Psi(t)$ в случае ограниченного возрастания функции интенсивности $\lambda(t)$ нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Если $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{\ln t}$ существует, то существует $\lim\limits_{p\to+0}\frac{-p}{\ln(\gamma p)}\hat{\varphi}(p)$, где $\gamma=e^C$, $C=-\Gamma'(1)$, $C=0{,}577215...$ — постоянная Эйлера, и эти пределы равны.

Доказательство. Пусть существует $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t)}{\ln t}=A$. В силу условия теоремы для любого положительного числа ε существует такое $N>1$, что $\left|\frac{\varphi(t)}{\ln t}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ для всех $t>N$. Тогда из равенства

$$\frac{p}{-\ln(\gamma p)}\int_0^\infty\varphi(t)e^{-pt}dt-A=\frac{p}{\Gamma'(1)-\ln p}\int_0^\infty\varphi(t)e^{-pt}dt-$$

$$-A\frac{\Gamma'(1)-\ln p}{\Gamma'(1)-\ln p}=\frac{p}{\Gamma'(1)-\ln p}\int_0^\infty\varphi(t)e^{-pt}dt-$$

$$-\frac{A}{\Gamma'(1)-\ln p}\left(\int_0^\infty e^{-s}\ln s ds-\ln p\int_0^\infty e^{-s}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma'(1)-\ln p}\left(p\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt - A\int_0^\infty \ln\left(\frac{s}{p}\right)e^{-s}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma'(1)-\ln p}\left(p\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt - Ap\int_0^\infty \ln t\, e^{-pt}dt\right)=$$

$$=\frac{p}{-\ln(\gamma p)}\left(\int_0^N (\varphi(t)-A\ln t)e^{-pt}dt+\int_N^\infty e^{-pt}\left(\frac{\varphi(t)}{\ln t}-A\right)\ln t\,dt\right)$$

имеем

$$\left|\frac{p}{-\ln(\gamma p)}\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt - A\right| \le \frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_0^N |\varphi(t)-A\ln t|dt+\frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_N^\infty e^{-pt}\left|\frac{\varphi(t)}{\ln t}-A\right||\ln t|dt \le$$

$$\le \frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_0^N |\varphi(t)-A\ln t|\,dt+\frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_N^\infty e^{-pt}\ln t dt\,\frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для всех $0 < p < \delta$ выполнялись неравенства

$$\frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_0^N |\varphi(t)-A\ln t|dt < \frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{p}{|\ln(\gamma p)|}\int_N^\infty e^{-pt}\ln t dt \le 1.$$

В таком случае получаем

$$\left|\frac{p}{-\ln(\gamma p)}\int_0^\infty \varphi(t)e^{-pt}dt - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \text{ при } 0<p<\delta.$$

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)=\lambda$ и $t\lambda(t)-\Lambda(t)=O(\ln t)$, тогда $\Psi(t)=$ $=O(\ln t)$ при $t\to\infty$.

Для доказательства этого утверждения используем лемму. Имеем

$$\lim_{p\to 0}\frac{-p}{\ln(\gamma p)}\hat\psi(p)=-\lim_{p\to 0}\frac{1}{\ln(\gamma p)}\int_0^\infty e^{-pt-(1-\hat g(p))\Lambda(t)}\left(1-pt+p\hat g'(p)\Lambda(t)\right)dt=$$

$$=[pt=x]=-\lim_{p\to 0}\frac{1}{p\ln(\gamma p)}\int_0^\infty e^{-x-(1-\hat g(p))\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)}\left(1-x+p\hat g'(p)\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)\right)dx=$$

$$=-\lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\ln(\gamma p)}\int_0^\infty e^{-x-(1-\hat g(p))\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)}\left[\hat g''(p)p\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)+\right.$$

$$\left.+x\lambda\left(\frac{x}{p}\right)\frac{p\hat g'(p)-\hat g(p)+1}{p^2}\left(1-x+p\hat g'(p)\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)\right)\right]dx+$$

$$+\lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\ln(\gamma p)}\int_0^\infty e^{-x-(1-\hat g(p))\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)}\left[\hat g'(p)\left(\frac{x}{p}\lambda\left(\frac{x}{p}\right)-\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)\right)\left(2-x+p\hat g'(p)\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)\right)\right]dx\,.$$

При вычислении этих пределов учтем, что

$$\lim_{p\to 0}p\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)=\lambda x,\quad \lim_{p\to 0}(1-\hat g(p))\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)=\lambda M\beta x\,,$$

$$\lim_{p\to 0}\frac{p\hat g''(p)-\hat g'(p)+1}{p^2}=\frac{\hat g''(0)}{2},\quad -\lim_{p\to 0}\frac{\frac{x}{p}\lambda\left(\frac{x}{p}\right)-\Lambda\left(\frac{x}{p}\right)}{1+\ln(\gamma p)}=K\,,$$

где K — константа.

Имеем

$$\lim_{p\to 0}\frac{-p}{\ln(\gamma p)}\hat\psi(p)=0+KM\beta\int_0^\infty e^{-x-\lambda M\beta x}(2-x+\lambda M\beta x)dx=\frac{KM\beta}{1+\lambda M\beta}\,.$$

Следовательно, $\Psi(t)\sim\dfrac{KM\beta\ln t}{1+\lambda M\beta}$ при $t\to\infty$.

Отметим, что условиям теоремы удовлетворяют СВ, распределенные по закону Эрланга.

Если выполняются условия теорем 2 и 3, тогда функции в правых частях уравнений (6) неограниченно возрастают и, следовательно, эти уравнения имеют решения. Тогда оптимальные показатели качества функционирования системы определяются формулами

$$K_u^{\max}=1-\left(\widetilde H^{(0)}(\tau^u)-\widetilde H^{(1)}(\tau^u)\right),$$

$$S^{\max}=c^0-\left(c^0+c\right)\left(\widetilde H^{(0)}(\tau^s)-\widetilde H^{(1)}(\tau^s)\right),$$

$$C^{\min}=\frac{c\left(\widetilde H^{(0)}(\tau^c)-\widetilde H^{(1)}(\tau^c)\right)}{1-\left(\widetilde H^{(0)}(\tau^c)-\widetilde H^{(1)}(\tau^c)\right)},$$

где τ^u, τ^s, τ^c — точки абсолютных экстремумов соответственно функций $K(\tau)$, $S(\tau)$, $C(\tau)$.

Приведем пример применения формул (4) и (5). Пусть наработка на отказ имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с плотностью $f(t)=$ $=\dfrac{\lambda}{\theta}\left(\dfrac{t}{\theta}\right)^{\lambda-1}e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\lambda}}$, а время аварийного восстановления имеет гамма-распределение с плотностью $g(t)=\mu\dfrac{(\mu t)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}e^{-\mu t}$.

Исходные данные и результаты расчетов приводятся в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Исходные данные в примере

№	λ	θ	$M\alpha$	μ	ν	$M\beta$	$M\beta^p$	c^0	c	c^p
1	2	5	13,395	0,5	0,2	0,4	0,2	3	2	1
2	1,5	15	33,272	1,2	0,8	0,667	0,1	3	2	1
3	3	20	72,512	2	1,3	0,65	0,3	4	3	2

Таблица 2. Результаты расчетов

τ_u	T_+^u	T_-^u	$K_u^{\max}$	τ_s	T_+^s	T_-^s	$S^{\max}$	τ^c	$C^{\min}$	T_+^c	T_-^c
2,096	1,771	0,252	0,875	1,935	1,677	0,24	2,467	1,685	0,176	1,513	0,225
2,262	2,571	0,143	0,947	2,541	2,389	0,134	2,773	2,163	0,07	2,067	0,121
7,922	7,472	0,371	0,953	7,627	7,241	0,36	3,706	7,203	0,109	6,898	0,347

ВЫВОДЫ

Найдены стационарные надежностные и экономические характеристики однокомпонентной восстанавливаемой системы в случае минимальных аварийных восстановлений после ее отказов и полных обновлений после календарного ТО на основании введенного альтернирующего процесса минимальных восстановлений. Решены задачи по определению оптимальной периодичности проведения ТО системы с учетом найденных надежностных и экономических критериев. Установлены достаточные условия существования конечных решений этих задач.

Предполагаемое направление для дальнейших исследований — перенесение рассмотренной стратегии технического обслуживания на системы со сложной структурой и решение задач оптимизации надежностных показателей системы при ограничении на стоимость показатели и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
2. *Каштанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
3. *Черкесов Г.Н.* Надежность аппаратно-программных комплексов. Учебное пособие. — СПб.: Питер, 2005. — 479 с.

Поступила 19.11.2008