УДК 519.5:681:513

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

М.З. ЗГУРОВСКИЙ, А.А. ПАВЛОВ, А.С. ШТАНЬКЕВИЧ

Предлагается эффективная методология нахождения победителя среди большого количества альтернатив в методе анализа иерархий с применением оптимизационных моделей поиска весов объектов по эмпирическим матрицам парных сравнений. Рассматриваются две разные модели эмпирических матриц парных сравнений. Приведен демонстрационный пример.

В данной работе модели оптимизации, предложенные и обоснованные в [1–4], будут использованы для расширения области применения метода анализа иерархий (МАИ) Т. Саати [5–7] на случай большого количества альтернатив (существенно превышающего их обычное количество, при котором применение МАИ считается корректным). Такая задача может возникнуть в двух случаях:

- наилучшая альтернатива не выбирается из набора реально существующих альтернатив, а альтернативы генерируются искусственно для выбора наилучшей, после чего для реализации этой альтернативы вкладываются существенные ресурсы;
- искусственно генерируются альтернативы; с помощью МАИ находятся их результирующие веса, по которым строится аналитическое описание глобальной цели.

Корректное обоснование предлагаемых модификаций МАИ возможно, когда задаются формальные модели, которым отвечают эмпирические матрицы парных сравнений последнего уровня иерархий МАИ. В этом случае можно исследовать эмпирические (статистические) свойства алгоритмов, их эффективность, а также предлагать практические рекомендации к использованию. В данной работе рассматриваются две формальные модели эмпирической матрицы парных сравнений.

Первая модель эмпирических матриц парных сравнений последнего уровня иерархии МАИ. Рассмотрим произвольные альтернативы A_i, A_j, которые сравниваются экспертом (экспертами) по эффективности относительного произвольного критерия предыдущего уровня иерархии МАИ.

В идеальном случае, т.е., когда предполагается, что на эксперта не влияют факторы, искажающие его решение (его компетентность, количество альтернатив, для которых строится эмпирическая матрица парных сравнений, неоднозначность качественного описания критерия, технология и последовательность заполнения эмпирической матрицы парных сравнений, психологические факторы и т.п.), значение эмпирического коэффициента γ_{ij} не зависит ни от количества альтернатив, из которых находится наилучшая, ни от их состава. Тогда $\gamma_{ij} = \dfrac{\omega_i}{\omega_j}$ в любой эмпирической матрице парных сравнений при парном сравнении альтернативы A_i с альтернативой A_j, $\omega_i, \omega_j \geq 0$ интерпретируются как идеальные значения весов альтернатив A_i и A_j.

Рассмотрим два матричных равенства:

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \right)_1^m \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

и

$$\left(\gamma_{i_e j_e} = \frac{\omega_{i_e}}{\omega_{j_e}} \right)_1^{m_1} \begin{pmatrix} \omega_{i_1} \\ \vdots \\ \omega_{i_{m_1}} \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} \omega_{i_1} \\ \vdots \\ \omega_{i_{m_1}} \end{pmatrix}, \; m_1 < m . \tag{2}$$

Равенству (1) соответствует идеальная эмпирическая матрица парных сравнений для множества альтернатив $\{A_i, \, i = \overline{1, m}\}$; равенству (2) соответствует идеальная эмпирическая матрица парных сравнений для множества альтернатив $\{A_{i_e}, \, e = \overline{1, m_1}\}$. Тогда компоненты собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda^* = m_1$ второй системы, на основании теоремы Фробениуса с точностью до положительной константы равны соответствующим компонентам собственного вектора, соответствующего собственному числу $\lambda^* = m$ первой системы.

Это следствие в дальнейшем позволит обосновать декомпозицию задачи нахождений весов для большего количества альтернатив.

Теперь рассмотрим случай, когда реально на решение эксперта влияют возмущающие факторы. Формально их действие предлагается описывать с помощью параметрического вероятностного распределения. Закономерности, определяющие значения и изменение значений параметров вероятностного распределения (вероятностных распределений), как и самовероятностное распределение (вероятностные распределения), являются формальной моделью факторов, искажающих решение эксперта (экспертов).

Вторая модель эмпирических матриц парных сравнений последнего уровня иерархий МАИ. В идеальном случае значение коэффициента γ_{ij} зависит от количества альтернатив и их состава. Это возможно, в частности, когда значение γ_{ij} определяется группой экспертов с помощью формального алгоритма, оперирующего с индивидуальными предпочтениями экспертов. Действительно, значения γ_{ij} каждого эксперта задают на множество альтернатив полный предпорядок. Если коллективное решение также является полным предпорядком и, очевидно, удовлетворяет аксиоме единогласия и не является правилом диктатора, то нарушается аксиома независимости (теорема Эроу [8]).

Возмущающие факторы, искажающие идеальное значение, по-прежнему будем задавать с помощью параметрических вероятностных законов.

Адаптация МАИ для второй формальной модели эмпирической матрицы парных сравнений может быть реализована с помощью моделей оптимизации [3, 4].

Сначала модификацию МАИ приведем для двухуровневой иерархии, затем полученные результаты адаптируем для общего случая. Необходимо отметить, что двухуровневая иерархия имеет самостоятельное практическое значение.

Будут рассмотрены несколько реализаций модифицированного метода анализа иерархий (ММАИ), каждая из которых соответствует типу информации (либо ее отсутствию) о закономерностях искажения эмпирических γ_{ij} (элементов эмпирической матрицы парных сравнений) относительно идеальных значений, а также используемой формальной модели эмпирической матрицы парных сравнений последнего уровня.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Пусть дерево иерархий имеет вид:

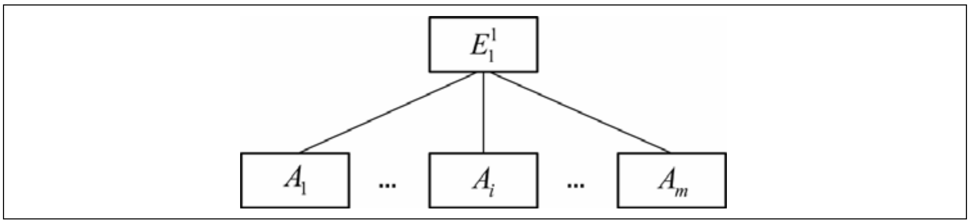

Рис. 1. Дерево иерархии с двухуровневой структурой

На рис. 1 m — количество альтернатив, достаточно большое число.

ММАИ (реализация 1)

Его используют для первой модели эмпирической матрицы парных сравнений. Ошибка в определении γ_{ij} возрастает с увеличением размерности эмпирической матрицы парных сравнений.

Этап 1. По исходной эмпирической матрице парных сравнений с использованием моделей оптимизации, приведенных в [1, 2] по значениям критериев M_1, M_2 [1, 2] (либо с применением моделей, приведенных в [3, 4]), находятся оценки весов ω_i альтернатив A_i, $i=\overline{1,m}$. Альтернативы упорядочиваются в соответствии с убыванием значений $\hat{\omega}_i$, $i=\overline{1,m}$. Пусть их порядок имеет вид $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$. Задаем число m_1, верхняя граница которого принадлежит диапазону $7 \div 9$ (максимальный размер хорошо согласованных матриц парных сравнений). Пусть число $(m-m_1)$ нацело делится на (m_1-1). $\dfrac{m-m_1}{m_1-1}=p-1$. Эксперту вновь предлагается построить эмпирическую матрицу парных сравнений Γ_1 для альтернатив A_{i_e}, $e=\overline{1,m_1}$. По матрице парных сравнений Γ_1 классическим методом (в случае ее хорошей обусловленности) либо с использованием моделей оптимизации (если она плохо обусловлена) находятся оценки весов альтернатив A_{i_e}, $e=\overline{1,m_1}$. В соответствии со значениями этих оценок находятся m_2^1 наилучшие альтернативы (альтернативы с наибольшими оценками весов); m_2^1 равно единице, если Γ_1 является хорошо согласованной и $m_2^1=\left\lfloor \dfrac{m_1}{2} \right\rfloor$, если Γ_1 плохо обусловленная матрица (операция $\lfloor\ \rfloor$ — целое от деления).

Примечание. Число $\dfrac{m_1}{2}$ выбрано эмпирически и является статистически обоснованным компромиссом между эффективностью метода и объемом вычислений.

Пусть лучшими m_2^1 альтернативами являются A_{j_e}, $e=\overline{1,m_2^1}$. Наихудшую из всех текущих m_1 альтернатив (с наименьшим весом) обозначим через A_{k_1}. Для альтернатив $A_{k_1}, A_{m_1+1},..., A_{2m_1-1}$ эксперту предлагается снова построить эмпирическую матрицу парных сравнений Γ_2. Для матрицы Γ_2 полностью повторяется вычислительная процедура, описанная для матрицы Γ_1.

Определяются m_2^2 наилучших альтернатив и наихудшая альтернатива A_{k_2}. По альтернативам $A_{k_2}, A_{i_{2m_1}}, A_{i_{2m_1+1}},\ldots, A_{i_{3m_1-2}}$ снова строится эмпирическая матрица парных сравнений Γ_3. Определяются m_2^3 наилучших альтернатив и наихудшая альтернатива A_{k_3}. Описанный процесс продолжается для всех остальных матриц Γ_i, $i=\overline{4,p}$.

Таким образом, экспертами вновь построено p эмпирических матриц парных сравнений Γ_i, $i=\overline{1,p}$. Если для всех матриц Γ_i, число $m_2^i=1$, $i=\overline{1,p}$ (матрицы Γ_i, $i=\overline{1,p}$ хорошо согласованы), то достоверные оценки весов альтернатив A_i, $i=\overline{1,m}$ находятся следующим образом. Пусть $\hat{\omega}_{i_1}^1,\ldots,\hat{\omega}_{i_{m_1}}^1$ оценки весов альтернатив A_{i_e}, $e=\overline{1,m_1}$, найденные по матрице Γ_1, $\hat{\omega}_{k_1}^1$, — это оценка веса альтернативы A_{k_1} по матрице Γ_1. Пусть $\hat{\omega}^2{}_{k_1}, \hat{\omega}^2{}_{i_{m_1+1}},\ldots,\hat{\omega}_{i_{2m_1-1}}$ — это оценки весов альтернатив $A_{k_1}, A_{i_{m_1+1}},...$ $..., A_{i_{2m_1-1}}$, вычисленные по матрице Γ_2. В соответствии со следствием, приведенным для первой модели эмпирической матрицы парных сравнений последнего уровня иерархии, веса $\hat{\omega}_{k_1}^2, \omega_{i_{m_1+1}}^2, \ldots, \hat{\omega}_{i_{2m_1-1}}^2$ умножаем на число $\frac{\hat{\omega}_{k_1}^1}{\hat{\omega}_{k_1}^2}$. Аналогично оценки всех весов альтернатив, найденных по матрицам Γ_i, $i = \overline{3, p}$, умножаются на число $\frac{\hat{\omega}_{k_{i-1}}^{i-1}}{\hat{\omega}_{k_{i-1}}^{i}}$.

Пусть хотя бы для одной матрицы Γ_i, $i = \overline{1, p}$, число m_2^i больше единицы (хотя бы одна матрица является плохо согласованной). В этом случае переходим к следующей вычислительной процедуре.

Строим новую последовательность альтернатив таким образом. Первые m_2^1 альтернатив — это лучшие m_2^1 альтернативы, определенные по матрице Γ_1. Включаем их в новую последовательность. Если альтернатива A_{k_1} для матрицы Γ_2 оказалась наилучшей, то наилучшие m_2^2 альтернатив, определенных по матрице Γ_2, в новую последовательность альтернатив не включаются. В противном случае следующими в новой последовательности альтернатив являются m_2^2 наилучшие альтернативы, определенные по матрице Γ_2.

Если m_2^2 лучших альтернатив, определенных по матрице Γ_2, не включены в новую последовательность альтернатив, то матрица Γ_3 заменяется новой: эксперту предлагается построить эмпирическую матрицу парных сравнений для альтернатив $A_{k_1}, A_{i_{2m_1}}, A_{i_{2m_1+1}}, \ldots, A_{i_{3m_1-2}}$, по которой находится m_2^3 наилучших альтернатив и наихудшая альтернатива A_{k_3}. Для новой матрицы Γ_3 повторяется процедура, описанная ранее для матрицы Γ_2 (включение или не включение ее новых m_2^3 лучших альтернатив в новую последовательность альтернатив).

Если m_2^2 лучших альтернатив включены в новую последовательность альтернатив, то для старой матрицы Γ_3 аналогично решается задача включения или не включения ее лучших m_2^3 альтернатив в новую последовательность альтернатив путем сравнения их с альтернативой A_{k_2}. Описанный процесс повторяется (рассматриваются оставшиеся матрицы Γ_i, $i = \overline{4, p}$; строятся, в случае необходимости, новые эмпирические матрицы парных сравнений) вплоть до окончательного получения новой последовательности альтернатив.

Этап 2. Для построенной новой последовательности альтернатив на предыдущем этапе полностью повторяется этап 1-й. Если построенные на втором этапе все эмпирические матрицы парных сравнений оказались хорошо согласованными, то производится согласование весов (вычислительная процедура приведена при описании первого этапа) и альтернатива с большим весом является наилучшей. В противном случае формулируется новая последовательность альтернатив, которая будет исходной для следующего этапа.

Этап j, $j=\overline{3,k}$. Полностью реализует вычислительную процедуру предыдущих этапов с аналогичным гарантированным критерием получения наилучшей альтернативы. Этап k — последний, если количество альтернатив в его начальной последовательности альтернатив менее 7-ми. Если при этом количество альтернатив больше одного, то в качестве победителя выбирается первая (первая, включенная в новую последовательность на предыдущем этапе). Если количество альтернатив равняется $7 \div 9$, то на текущем этапе строится только одна матрица Γ_1, а следующий этап будет последним.

Модифицированный алгоритм статистически значимо решает точно задачу нахождения наилучшей альтернативы из множества A_i, $i=\overline{1,m}$, если он определяет наилучшую альтернативу на промежуточном этапе, либо если эмпирическая матрица парных сравнений последнего k-того этапа является хорошо согласованной.

Примечание. Во многих случаях можно упростить вычислительную процедуру нахождения новой последовательности альтернатив для следующего этапа алгоритма: построение новой последовательности альтернатив завершено, если худшая альтернатива, найденная по матрице Γ_i (значение индекса i минимально возможное, матрицы Γ_i, $i=\overline{2,p}$ не изменились), является лучшей альтернативой для матрицы Γ_{i+1}. Обоснование такого упрощения заключается в том, что, как показали статистические исследования моделей оптимизации [9], получаемые оценки весов альтернатив по исходной эмпирической матрице парных сравнений в целом достаточно хорошо упорядочивают последовательности альтернатив в сравнении с их идеальным упорядочиванием.

ММАИ (реализация 2)

Её используют для первой модели эмпирической матрицы парных сравнений.

Искажение величины γ_{ij} $(i \neq j)$ зависит от двух параметров — размерности эмпирической матрицы парных сравнений и величины значения $(\gamma_{ij}-1)$ ($\gamma_{ij} \geq 1$, $i \neq j$; обоснование приведено при описании ММАИ (реализация 1) с таким отличием: на всех этапах используется либо модифицированная модель 2, либо модифицированная модель (эта модель дает более точное решение, но требует большего объема вычислений).

Модифицированная модель 2

Представляет следующую задачу линейного программирования:

$$\min \sum \sum_{(ij) \in |A|} r_{ij} y_{ij} \qquad (3)$$

$$-y_{ij} \leq \underset{(i,j)\in|A|}{\omega_i - \gamma_{ij}^{*}\omega_j} \leq y_{ij}, \quad y_{ij} \geq 0,\ a \leq \omega_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где a — заданное положительное число; $a \geq 1$; ω_i, $i = \overline{1,n}$, y_{ij} $\forall (i,j) \in A$ — переменные задачи линейного программирования; r_{ij} — заданные весовые коэффициенты; γ_{ij}^{*} — элементы эмпирической матрицы парных сравнений.

Модифицированная модель 7

Представляет собой последовательность задач линейного программирования:

$$\min_{\substack{\Delta_{ij}^1, \Delta_{ij}^2 \\ \forall (ij)\in|A|}} \left(\sum_{(ij)\in|A|} \sum r_{ij}\Delta_{ij}^1 - C_{lm} \sum_{(ij)\in|A|} \sum r_{ij}\Delta_{ij}^2 \right) \tag{5}$$

$$\ln\gamma_{ij}^{*} + \Delta_{ij}^2 \leq W_i - W_j \leq \ln\gamma_{ij}^{*} + \Delta_{ij}^1,$$

$$0 \leq \Delta_{ij}^1 \leq \ln(1 + l\Delta_1(l)), \quad 0 \geq \Delta_{ij}^2 \geq \ln(1 - m\Delta_2(m)),\ W_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где W_i, Δ_{ij}^1, Δ_{ij}^2 — переменные задачи линейного программирования; l, m — натуральные числа, последовательно принимающие значения (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2) и т. д.; $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ — заданные числовые скалярные функции натурального аргумента, принимающие неотрицательные значения; C_{lm} — коэффициент, определяющийся из соотношения (7); r_{ij} — заданные весовые коэффициенты.

$$\ln(1 + l\cdot\Delta_1(l)) = C_{lm} \ln \frac{1}{\left(1 - m\cdot\Delta_2(m)\right)}. \tag{7}$$

При использовании задач (5), (6) для поиска весов функции $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ задаются таким образом, что значения $l\cdot\Delta_1(l)$ и $m\cdot\Delta_2(m)$ на каждой итерации (при каждой попытке решения задачи линейного программирования (5) и (6) возрастают в небольшом соотношении к их предыдущему значению, а на первой итерации принимают минимально возможные значения. Итерации прекращаются при первом успешном решении задачи линейного программирования (5), (6). После этого веса ω_i^{*}, $i = \overline{1,n}$ объектов находятся из соотношения $\omega_i^{*} = e^{W_i^{*}}$, $i = \overline{1,n}$.

В функционалах (3), (5) были добавлены весовые коэффициенты r_{ij}, введение которых позволяет учесть следующую особенность эмпирической матрицы парных сравнений: ее элементы γ_{ij}^{*} тем больше «зашумлены» (отклонены от истинных идеальных значений), чем больше значение $\left|\gamma_{ij} - 1\right|$ (γ_{ij} — идеальное значение эмпирического коэффициента). Соответственно, каждый весовой коэффициент r_{ij} должен принимать тем большее значение, чем меньше соответствующее ему $\left|\gamma_{ij}^{*}-1\right|$ (γ_{ij}^{*} — значение элемента эмпирической матрицы парных сравнений). Поиск эффективного варианта задания весовых коэффициентов r_{ij} — следующая задача статистического моделирования: необходимо для максимально широких допусков изменения параметров, определяющих статистический закон (статистические законы) искажения идеальных значений коэффициентов γ_{ij} как функции параметра $\left|\gamma_{ij}-1\right|$, с помощью статистического моделирования определить усредненные значения весов r_{ij} как функцию параметра $\left|\gamma_{ij}^{*}-1\right|$ (не нарушая общности, можно работать только с $\gamma_{ij}{}^{*}\geq 1$; γ_{ij}^{*} — элемент эмпирической матрицы парных сравнений, то есть искаженное значение коэффициента γ_{ij}). Тут следует предусмотреть методику опроса экспертов, позволяющую определить для каждого конкретного случая соответствующий диапазон изменения обозначенных выше параметров.

Также наряду с применением модифицированных моделей 2 и 7 в случае наличия дополнительной информации об односторонних ограничениях [3], в эмпирической матрице парных сравнений уместно применение аналогичных модификаций (введение весовых коэффициентов r_{ij} в функционал качества) моделей оптимизации для эмпирических матриц парных сравнений с односторонними ограничениями.

ММАИ (реализация 3)

Используют для первой и второй модели эмпирической матрицы парных сравнений. Отличие от ММАИ (предыдущие реализации) заключается в том, что имеется только полностью заполненная исходная эмпирическая матрица парных сравнений Γ, и никакие новые эмпирические матрицы парных сравнений построены быть не могут. Реализация 3 полностью идентична ММАИ (реал. 1) со следующими изменениями:

- выбираемые модели оптимизации зависят от заданного типа параметрического вероятностного закона искажения идеальных значений γ_{ij};
- эмпирические матрицы парных сравнений Γ_i, $i=\overline{1,p}$ строятся по исходной эмпирической матрице парных сравнений Γ.

Метод рекомендуется использовать тогда, когда на промежуточном либо последнем этапе получены хорошо согласованные эмпирические матрицы (матрица) парных сравнений.

ММАИ (реализация 4)

Эта реализация предназначена для первой модели эмпирической матрицы парных сравнений и используется, когда нужно минимизировать объем работы экспертов. Отличается от ММАИ (реал. 1–3) тем, что на первом этапе исходная последовательность альтернатив $A_i, i=\overline{1,m}$ строится не по эмпирической матрице парных сравнений Γ размерности $m\times m$ (эта матрица отсутствует), а с помощью эксперта (экспертов), то есть экспертным путем устанавливается на множества альтернатив $A_i, i=\overline{1,m}$ полный предпорядок. Он предварителен и не претендует на точное решение задачи.

Примечание. Метод может быть рекомендован к применению, если на промежуточном или последнем этапе получены хорошо согласованные эмпирические матрицы (матрица) парных сравнений.

2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Построение дерева иерархий (рис. 2), нахождение всех весов в виде $\omega_{E_t^{s-j}}^{E_e^{s-j+1}}$ реализуется в соответствии с общепризнанными требованиями к методу анализа иерархий [5]. Модификация метода относится к алгоритмам нахождения весов $E_j^s(A_i)=\omega_{E_j^s}^s$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,m}$ для варианта, когда число альтернатив достаточно велико. Рассмотрим адаптацию ММАИ, введенного для двухуровневой структуры.

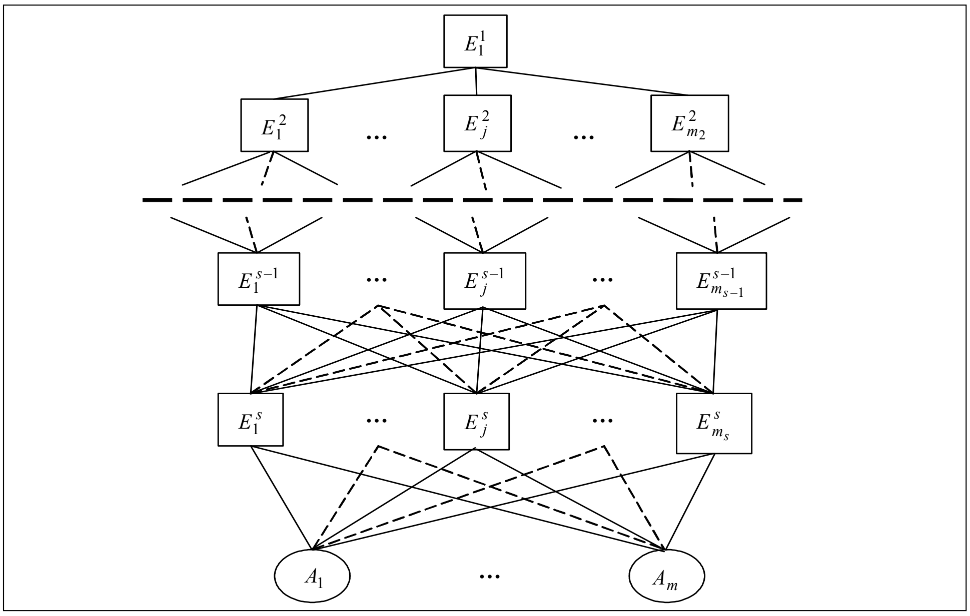

Рис. 2. Дерево иерархии Саати

В этом случае на нижнем уровне имеем m_s эмпирических матриц парных сравнений, каждая из которых соответствует одному из критериев нижнего уровня E_j^s $j=\overline{1,m_s}$. По каждой j-й ($j=\overline{1,m_s}$) эмпирической матрице парных сравнений необходимо найти веса $E_j^s(A_i)$, $i=\overline{1,m}$, которые используются для нахождения результирующих весов $\omega_1^1(A_i)$, $i=\overline{1,m}$, максимальный из которых определяет наилучшую альтернативу.

Обобщение ММАИ на общий случай является очевидным: в каждой реализации модели оптимизации строятся не по одной эмпирической матрице парных сравнений (либо предварительному полному предпорядку альтернатив — для реал. 4), а по каждой из эмпирических матриц парных сравнений (или предварительному полному предпорядку альтернатив).

При этом необходимо учесть:

- для всех реализаций ММАИ на каждом этапе должна быть проведена соответствующая нормировка оценок весов по каждой эмпирической матрице парных сравнений;
- статистическая эффективность ММАИ для общего случая в целом ниже, чем для двухуровневой структуры, поскольку сказывается эффект наложения ошибок определения весов по всем эмпирическим матрицам парных сравнений;
- может быть использована комбинация реализаций ММАИ, когда для одних эмпирических матриц парных сравнений строятся модели оптимизации реал. 1, а для других матриц — модели оптимизации реал. 2;
- должна быть создана методика экспертного опроса, позволяющая обоснованно определить закон (законы) искажения эмпирических γ_{ij} (элементов эмпирической матрицы парных сравнений), что позволит эффективно использовать ММАИ соответствующей реализации;
- формальная модель каждой эмпирической матрицы парных сравнений последнего уровня иерархии с точностью до задания параметрического вероятностного распределения искажения ее элементов одна и та же;
- в предположении, что $\omega_{E_e^{s-j}}^{E_p^{s-j+1}}$ (вклад (вес) критерия E_p^{s-j+1} в критерий E_e^{s-j}) $j=\overline{1,s-1}$, $e=\overline{1,m_{s-j}}$, $p=\overline{1,m_{s-j+1}}$ найдены достоверно, ММАИ (все реализации) корректно находит результирующие веса $E_1^1(A_i)$, $i=\overline{1,m}$ в случае, когда на первом этапе все эмпирические матрицы парных сравнений являются хорошо согласованными.

Пример. Применение ММАИ (реализация 3)

Имеется набор из 33 альтернатив, идеальные веса которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Идеальные веса альтернатив

Номер альтернативы	Вес	Номер альтернативы	Вес	Номер альтернативы	Вес
1	0,00151258	12	0,01577080	23	0,00001561
2	0,00158888	13	0,14156045	24	0,14196682
3	0,00151882	14	0,00016419	25	0,00001630
4	0,00016541	15	0,00150337	26	0,14831544
5	0,00016365	16	0,00001534	27	0,01615903
6	0,00163682	17	0,00001466	28	0,00016182
7	0,00014835	18	0,15142374	29	0,01530455
8	0,00001504	19	0,00001454	30	0,15008005
9	0,14851011	20	0,01407280	31	0,01502626
10	0,00001469	21	0,00015277	32	0,00165360
11	0,00163570	22	0,01571267	33	0,01398511

Истинный победитель — альтернатива с наибольшим весом — под номером 18 (табл. 1).

Эмпирическая матрица парных сравнений (табл. 2–3) исходна из идеальной (получаемой по табл. 1) путем наложения параметрического вероятностного «шума»: элементы γ_{ij}^{*} эмпирической матрицы получены из элементов γ_{ij} идеальной матрицы согласно соотношению (8):

$$\gamma_{ij}^{*} = \gamma_{ij} + k_{ij} \cdot \gamma_{ij}, \tag{8}$$

где модуль коэффициента $|k_{ij}|$ распределен равномерно в интервале, границы которого зависят от величины $(\gamma_{ij} - 1)$ (где $i \neq j$, $\gamma_{ij} \geq 1$) согласно табл. 4, а знак принимает равновероятно «+» или «–».

Т а б л и ц а 2 . Столбцы 1–17 эмпирической матрицы парных сравнений

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
1	1,0000	0,9032	1,0922	5,1268	5,3012	0,8632	5,3589	52,4727	0,0169	54,6814	0,8571	0,0649	0,0076	5,4131	1,0869	141,217	57,0200
2	1,1072	1,0000	1,0855	13,9788	13,3845	0,9216	6,3642	153,211	0,0203	65,2475	1,0298	0,1669	0,0184	13,5869	1,0073	146,233	62,8188
3	0,9156	0,9212	1,0000	5,4121	13,5966	0,8494	14,9377	144,664	0,0071	53,9333	1,0252	0,0680	0,0201	12,9080	0,9643	142,385	60,4596
4	0,1951	0,0715	0,1848	1,0000	0,9275	0,1896	1,2306	15,7300	0,0019	15,6791	0,0723	0,0075	0,0008	1,0815	0,1943	15,6667	16,3955
5	0,1886	0,0747	0,0735	1,0782	1,0000	0,0695	1,1984	15,7619	0,0008	15,7666	0,0682	0,0074	0,0021	0,9453	0,0754	6,0142	6,6463
6	1,1585	1,0851	1,1772	5,2747	14,3925	1,0000	15,8818	158,809	0,0178	161,773	0,9590	0,1983	0,0189	5,2899	1,0154	56,9367	63,9528
7	0,1866	0,1571	0,0669	0,8126	0,8344	0,0630	1,0000	5,6689	0,0007	14,6180	0,0638	0,0167	0,0007	0,7980	0,1889	5,1703	14,9342
8	0,0191	0,0065	0,0069	0,0636	0,0634	0,0063	0,1764	1,0000	0,0001	0,9644	0,0166	0,0007	0,0002	0,0635	0,0072	1,0397	0,9652
9	59,2241	49,3621	140,861	532,529	1304,24	56,1463	1406,54	14308,5	1,0000	5448,51	133,874	13,1615	0,9537	1259,29	55,0730	13529,8	5922,65
10	0,0183	0,0153	0,0185	0,0638	0,0634	0,0062	0,0684	1,0369	0,0002	1,0000	0,0065	0,0015	0,0001	0,1617	0,0070	0,9205	1,0495
11	1,1667	0,9711	0,9754	13,8297	14,6729	1,0428	15,6770	60,1179	0,0075	154,159	1,0000	0,1863	0,0192	14,1328	1,1854	147,593	159,646
12	15,4150	5,9914	14,7056	134,113	135,064	5,0431	59,9247	1509,20	0,0760	649,132	5,3669	1,0000	0,1843	133,715	5,4694	563,709	643,788
13	131,405	54,3144	49,7480	1264,40	487,184	52,8423	1347,42	5193,38	1,0486	14247,2	51,9493	5,4252	1,0000	494,773	138,433	13456,3	5641,57
14	0,1847	0,0736	0,0775	0,9246	1,0578	0,1890	1,2531	15,7445	0,0008	6,1857	0,0708	0,0075	0,0020	1,0000	0,0744	6,3526	6,1772
15	0,9201	0,9928	1,0370	5,1469	13,2605	0,9848	5,2949	138,121	0,0182	143,080	0,8436	0,1828	0,0072	13,4357	1,0000	138,503	149,395
16	0,0071	0,0068	0,0070	0,0638	0,1663	0,0176	0,1934	0,9618	0,0001	1,0864	0,0068	0,0018	0,0001	0,1574	0,0072	1,0000	1,0078
17	0,0175	0,0159	0,0165	0,0610	0,1505	0,0156	0,0670	1,0361	0,0002	0,9528	0,0063	0,0016	0,0002	0,1619	0,0067	0,9923	1,0000
18	55,0642	134,997	144,046	1288,64	500,541	136,656	559,224	14202,3	1,1019	14865,9	128,479	5,0710	1,1445	1278,89	60,0599	6008,89	14269,8
19	0,0066	0,0065	0,0160	0,0599	0,0611	0,0061	0,0697	1,0699	0,0002	0,9433	0,0062	0,0007	0,0002	0,1502	0,0158	1,0054	1,0734
20	5,4734	12,8247	4,9765	120,315	50,6143	12,1148	135,915	544,905	0,0683	1410,90	12,1346	0,8181	0,0716	118,757	5,1851	1268,35	1388,41
21	0,1796	0,1786	0,1903	0,8906	0,8674	0,1739	1,0992	6,0730	0,0017	6,2932	0,0673	0,0070	0,0019	0,8956	0,1727	14,3928	6,1692
22	14,7945	5,8297	14,9738	139,571	58,6241	13,3957	151,691	572,248	0,0772	1494,62	13,5301	1,1047	0,1799	134,242	6,4566	1424,66	1515,59
23	0,0071	0,0165	0,0181	0,0675	0,0671	0,0069	0,1856	1,0025	0,0002	1,1217	0,0166	0,0017	0,0001	0,0686	0,0188	0,9590	1,1372
24	57,3303	127,518	129,905	453,268	494,334	52,5725	1342,78	13605,8	0,9095	5495,48	126,355	5,6447	0,9455	456,874	132,424	5116,87	5084,78
25	0,0204	0,0074	0,0076	0,1662	0,1858	0,0068	0,0774	1,1553	0,0001	0,9737	0,0071	0,0017	0,0002	0,0681	0,0194	1,1452	1,2236
26	53,6522	136,422	60,0577	1278,76	555,592	132,241	525,193	13811,0	0,9349	14026,8	127,384	13,1927	1,1295	523,184	52,9980	13679,3	14214,3
27	15,0222	5,9448	5,6205	144,067	143,810	14,1571	65,5115	1583,44	0,0745	1622,81	5,6147	0,9451	0,0783	137,591	15,7878	1512,43	1616,31
28	0,1760	0,1845	0,0731	0,9185	0,9187	0,1818	1,1318	15,5985	0,0020	15,8710	0,0677	0,0071	0,0020	1,0558	0,0744	15,0960	6,1054
29	5,6773	13,7759	6,2972	52,3255	131,426	12,8598	54,4732	1473,01	0,0709	1532,19	5,4135	0,9086	0,0745	129,993	14,9821	1475,07	1443,05
30	141,300	134,128	145,244	504,678	1299,63	128,549	1438,30	5989,26	0,9428	5518,62	51,2286	5,8084	1,1300	481,946	144,313	14435,6	14654,6
31	5,4500	13,6454	5,8651	50,0952	131,278	13,1286	62,7663	532,523	0,1661	1442,18	5,2417	1,0573	0,1701	50,9202	5,5638	605,117	576,787
32	1,0530	0,9691	1,0278	14,4082	5,6303	0,9433	5,9740	64,4124	0,0078	69,3033	0,9677	0,0720	0,0084	5,7375	0,9913	63,7951	166,035
33	12,8794	5,4825	13,1500	120,958	124,469	12,1924	55,7850	1307,72	0,0681	1365,06	12,0811	0,8160	0,1608	50,4810	13,3076	556,827	535,982

Т а б л и ц а 3 . Столбцы 18–33 эмпирической матрицы парных сравнений

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	0,0182	151,324	0,1827	5,5691	0,0676	140,814	0,0174	49,1247	0,0186	0,0666	5,6832	0,1761	0,0071	0,1835	0,9497	0,0776
2	0,0074	153,609	0,0780	5,5989	0,1715	60,4597	0,0078	135,642	0,0073	0,1682	5,4189	0,0726	0,0075	0,0733	1,0319	0,1824
3	0,0069	62,5001	0,2009	5,2560	0,0668	55,1863	0,0077	131,055	0,0167	0,1779	13,6821	0,1588	0,0069	0,1705	0,9729	0,0760
4	0,0008	16,7016	0,0083	1,1228	0,0072	14,8126	0,0022	6,0163	0,0008	0,0069	1,0888	0,0191	0,0020	0,0200	0,0694	0,0083
5	0,0020	16,3731	0,0198	1,1528	0,0171	14,9002	0,0020	5,3831	0,0018	0,0070	1,0885	0,0076	0,0008	0,0076	0,1776	0,0080
6	0,0073	163,543	0,0825	5,7488	0,0747	145,479	0,0190	148,014	0,0076	0,0706	5,5004	0,0778	0,0078	0,0762	1,0601	0,0820
7	0,0018	14,3560	0,0074	0,9098	0,0066	5,3881	0,0007	12,9140	0,0019	0,0153	0,8836	0,0184	0,0007	0,0159	0,1674	0,0179
8	0,0001	0,9346	0,0018	0,1647	0,0017	0,9975	0,0001	0,8656	0,0001	0,0006	0,0641	0,0007	0,0002	0,0019	0,0155	0,0008
9	0,9075	5366,99	14,6319	579,599	12,9572	5418,26	1,0995	12731,3	1,0697	13,4217	499,591	14,1114	1,0607	6,0203	128,133	14,6872
10	0,0001	1,0601	0,0007	0,1589	0,0007	0,8915	0,0002	1,0270	0,0001	0,0006	0,0630	0,0007	0,0002	0,0007	0,0144	0,0007
11	0,0078	160,312	0,0824	14,8481	0,0739	60,3212	0,0079	139,880	0,0079	0,1781	14,7762	0,1847	0,0195	0,1908	1,0334	0,0828
12	0,1972	1532,69	1,2223	142,878	0,9052	594,062	0,1772	586,625	0,0758	1,0581	140,640	1,1006	0,1722	0,9458	13,8819	1,2255
13	0,8737	6036,28	13,9660	519,634	5,5600	12744,6	1,0577	4904,05	0,8854	12,7782	499,453	13,4211	0,8850	5,8774	119,720	6,2179
14	0,0008	6,6591	0,0084	1,1166	0,0074	14,5858	0,0022	14,6810	0,0019	0,0073	0,9472	0,0077	0,0021	0,0196	0,1743	0,0198
15	0,0167	63,1439	0,1929	5,7916	0,1549	53,2085	0,0076	51,4141	0,0189	0,0633	13,4465	0,0667	0,0069	0,1797	1,0087	0,0751
16	0,0002	0,9947	0,0008	0,0695	0,0007	1,0428	0,0002	0,8732	0,0001	0,0007	0,0662	0,0007	0,0001	0,0017	0,0157	0,0018
17	0,0001	0,9316	0,0007	0,1621	0,0007	0,8793	0,0002	0,8173	0,0001	0,0006	0,1638	0,0007	0,0001	0,0017	0,0060	0,0019
18	1,0000	14797,2	6,0413	550,998	5,4545	5344,10	1,0219	13403,8	1,0980	5,2230	1369,41	5,5642	0,9388	5,5042	49,8354	15,5512
19	0,0001	1,0000	0,0018	0,1732	0,0016	0,8903	0,0001	0,8169	0,0002	0,0016	0,0635	0,0017	0,0002	0,0007	0,0158	0,0007
20	0,1655	551,261	1,0000	128,594	0,9810	1256,69	0,1645	1232,18	0,1766	0,7869	51,1350	0,8576	0,0648	0,9842	4,5847	0,9681
21	0,0018	5,7741	0,0078	1,0000	0,0069	5,7021	0,0020	5,2601	0,0007	0,0179	1,0359	0,0172	0,0019	0,0193	0,0634	0,0185
22	0,1833	634,813	1,0193	144,469	1,0000	604,452	0,1811	1355,20	0,1811	1,0278	140,042	1,0608	0,1751	1,1108	13,0403	1,3205
23	0,0002	1,1232	0,0008	0,1754	0,0017	1,0000	0,0001	1,0247	0,0001	0,0007	0,1600	0,0007	0,0001	0,0007	0,0067	0,0019
24	0,9785	14432,9	6,0801	499,559	5,5226	13127,0	1,0000	4950,99	0,9922	12,0660	1233,99	5,6742	1,0398	5,2543	122,766	14,2274
25	0,0001	1,2242	0,0008	0,1901	0,0007	0,9759	0,0002	1,0000	0,0001	0,0018	0,1824	0,0018	0,0001	0,0020	0,0070	0,0020
26	0,9107	5733,81	5,6613	1347,02	5,5223	13983,1	1,0079	12850,1	1,0000	5,7723	535,334	5,7781	1,0836	13,8538	131,441	6,0048
27	0,1915	631,701	1,2708	55,7118	0,9729	1519,92	0,0829	542,225	0,1732	1,0000	144,654	0,9694	0,1972	0,9897	5,2898	0,9429
28	0,0007	15,7580	0,0196	0,9653	0,0071	6,2517	0,0008	5,4823	0,0019	0,0069	1,0000	0,0072	0,0008	0,0075	0,0699	0,0083
29	0,1797	602,966	1,1660	58,0659	0,9427	1406,08	0,1762	568,216	0,1731	1,0316	138,049	1,0000	0,1931	0,9734	5,1820	0,9956
30	1,0652	6340,40	15,4400	514,920	5,7095	14156,2	0,9617	12710,3	0,9228	5,0699	1299,40	5,1776	1,0000	13,9316	127,020	6,6037
31	0,1817	1466,18	1,0160	51,7025	0,9002	1391,22	0,1903	502,672	0,0722	1,0104	133,945	1,0273	0,0718	1,0000	5,3942	0,9849
32	0,0201	63,4354	0,2181	15,7815	0,0767	149,834	0,0081	142,343	0,0076	0,1890	14,3007	0,1930	0,0079	0,1854	1,0000	0,0869
33	0,0643	1400,65	1,0329	54,1126	0,7573	533,254	0,0703	497,316	0,1665	1,0605	120,031	1,0044	0,1514	1,0153	11,5027	1,0000

Т а б л и ц а 4 . Интервалы равномерного распределения модуля коэффициента зашумления, в зависимости от величины элементов идеальной матрицы парных сравнений

Интервал принадлежности γ_{ij} $(i \neq j,\ \gamma_{ij} \geq 1)$	**Интервал принадлежности $\lvert k_{ij} \rvert$**
1	0
(1,0; 1,1]	(0,030; 0,100)
(1,1; 1,3]	(0,070; 0,190)
(1,3; 1,6]	(0,110; 0,343)
(1,6; 2,0]	(0,180; 0,388)
(2,0; 2,5]	(0,220; 0,329)
(2,5; 3,1]	(0,250; 0,367)
(3,1; 3,8]	(0,280; 0,400)
(3,8; 4,6]	(0,300; 0,428)
(4,6; 5,5]	(0,320; 0,450)
(5,5; 6,5]	(0,340; 0,465)
(6,5; 7,6]	(0,350; 0,473)
(7,6; 8,8]	(0,360; 0,477)
(8,8; 10,1]	(0,370; 0,478)
(10,1; ∞)	(0,380; 0,479)

С помощью модифицированной модели 2 (весовые коэффициенты r_{ij} заданы согласно табл. 5) получаем предварительное упорядочивание альтернатив (табл. 6).

Таблица 5. Выбираемые значения весовых коэффициентов функционала модифицированной модели 2, в зависимости от величины элементов эмпирической матрицы парных сравнений

Интервал принадлежности γ_{ij}^* ($i \neq j$, $\gamma_{ij}^* \geq 1$)	**Значение** r_{ij}
1	200
(1,0; 1,1)	150
(1,1; 1,3)	120
(1,3; 1,6)	90
(1,6; 2,0)	60
(2,0; 2,5)	50
(2,5; 3,1)	40
(3,1; 3,8)	30
(3,8; 4,6)	20
(4,6; 5,5)	15
(5,5; 6,5)	12
(6,5; 7,6)	10
(7,6; 8,8)	8
(8,8; 10,1)	5
(10,1; ∞)	1

Таблица 6. Веса альтернатив, полученные из эмпирической матрицы парных сравнений с помощью модифицированной модели 2, упорядоченные по убыванию

Позиция при упор. по убыв.	**Вес**	**Номер альтерн.**	**Позиция при упор. по убыв.**	**Вес**	**Номер альтерн.**	**Позиция при упор. по убыв.**	**Вес**	**Номер альтерн.**
1	0,10210659	9	12	0,01608996	33	23	0,01557709	15
2	0,09750607	18	13	0,01557709	3	24	0,01557709	16
3	0,09626518	30	14	0,01557709	23	25	0,01557709	17
4	0,09545778	26	15	0,01557709	32	26	0,01557709	19
5	0,09471102	24	16	0,01557709	1	27	0,01557709	28
6	0,08519208	13	17	0,01557709	2	28	0,01557709	6
7	0,01776083	12	18	0,01557709	4	29	0,01557709	7
8	0,01752419	22	19	0,01557709	5	30	0,01557709	8
9	0,01696048	31	20	0,01557709	10	31	0,01557709	20
10	0,01678634	27	21	0,01557709	11	32	0,01557709	21
11	0,01652056	29	22	0,01557709	14	33	0,01557709	25

В табл. 7 приведены упорядоченные по убыванию веса альтернатив, найденные с помощью классической процедуры (поиск весов как элементов собственного вектора матрицы парных сравнений, отвечающего её максимальному собственному числу). В наборе весов, полученном с помощью классической процедуры, истинный победитель занял четвертую позицию по весу, что на две позиции хуже результата применения модифицированной модели 2 (табл. 6).

Таблица 7. Веса альтернатив, полученные из эмпирической матрицы парных сравнений с помощью классической процедуры Саати, упорядоченные по убыванию

Позиция при упор. по убыв.	Вес	Номер альтерн.	Позиция при упор. по убыв.	Вес	Номер альтерн.	Позиция при упор. по убыв.	Вес	Номер альтерн.
1	0,15417270	30	12	0,01526088	20	23	0,00017919	14
2	0,15318277	9	13	0,01463576	31	24	0,00017688	5
3	0,14917823	26	14	0,00197034	11	25	0,00017261	7
4	0,14698100	18	15	0,00170721	2	26	0,00016859	28
5	0,13525557	24	16	0,00168041	32	27	0,00001927	25
6	0,13280951	13	17	0,00167079	15	28	0,00001773	23
7	0,01930557	22	18	0,00166100	6	29	0,00001749	17
8	0,01740384	27	19	0,00162948	3	30	0,00001690	19
9	0,01672484	12	20	0,00149014	1	31	0,00001640	16
10	0,01667751	29	21	0,00019562	4	32	0,00001610	8
11	0,01540729	33	22	0,00018249	21	33	0,00001590	10

Далее в примере будем использовать только данные табл. 6, а данные табл. 7 приведены лишь для сравнения полученного результата.

Этап 1. Формируем матрицы Γ_i, положим $m_1 = 9$, $m_2 = 4$. Альтернативы для новых матриц парных сравнений отбираются в порядке, заданном табл. 6 (сортировка по убыванию найденных весов). Матрицы Γ_i размерности 9×9 наполняются соответствующими элементами исходной большой эмпирической матрицы парных сравнений.

В данном примере Γ_1 (табл. 8) наполняется элементами исходной эмпирической матрицы парных сравнений, которые являются отношениями альтернатив с номерами 9, 18, 30, 26, 24, 13, 12, 22, 31. Веса, найденные по Γ_1 с помощью модифицированной модели 2, приведены в табл. 9.

Таблица 8. Эмпирическая матрица Γ_1 этапа 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0000	0,9075	1,0607	1,0697	1,0995	0,9537	13,1615	12,9572	6,0203
2	1,1019	1,0000	0,9388	1,0980	1,0219	1,1445	5,0710	5,4545	5,5042
3	0,9428	1,0652	1,0000	0,9228	0,9617	1,1300	5,8084	5,7095	13,9316
4	0,9349	0,9107	1,0836	1,0000	1,0079	1,1295	13,1927	5,5223	13,8538
5	0,9095	0,9785	1,0398	0,9922	1,0000	0,9455	5,6447	5,5226	5,2543
6	1,0486	0,8737	0,8850	0,8854	1,0577	1,0000	5,4252	5,5600	5,8774
7	0,0760	0,1972	0,1722	0,0758	0,1772	0,1843	1,0000	0,9052	0,9458
8	0,0772	0,1833	0,1751	0,1811	0,1811	0,1799	1,1047	1,0000	1,1108
9	0,1661	0,1817	0,0718	0,0722	0,1903	0,1701	1,0573	0,9002	1,0000

Т а б л и ц а 9. Веса, найденные по матрице Γ_1 этапа 1

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
9	0,06097410	2
18	0,06259275	1
30	0,05748584	3
26	0,05700369	4
24	0,05655775	5
13	0,05468794	6
12	0,01147551	7
22	0,01147551	8
31	0,01147551	9

В новую последовательность добавляем m_2 лучших (с наибольшим весом) альтернатив – альтернативы с номерами 18, 9, 30, 26. Худшая альтернатива (с наименьшим весом) — под номером 31 — будет первой альтернативой при формировании Γ_2. Остальные 8 для Γ_2 берутся из табл. 6. Итак, Γ_2 (табл. 10) формируется из парных сравнений альтернатив под номерами 31, 27, 29, 33, 3, 23, 32, 1, 2.

Т а б л и ц а 10. Эмпирическая матрица Γ_2 этапа 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0000	1,0104	1,0273	0,9849	5,8651	1391,2246	5,3942	5,4500	13,6454
2	0,9897	1,0000	0,9694	0,9429	5,6205	1519,9229	5,2898	15,0222	5,9448
3	0,9734	1,0316	1,0000	0,9956	6,2972	1406,0836	5,1820	5,6773	13,7759
4	1,0153	1,0605	1,0044	1,0000	13,1500	533,2543	11,5027	12,8794	5,4825
5	0,1705	0,1779	0,1588	0,0760	1,0000	55,1863	0,9729	0,9156	0,9212
6	0,0007	0,0007	0,0007	0,0019	0,0181	1,0000	0,0067	0,0071	0,0165
7	0,1854	0,1890	0,1930	0,0869	1,0278	149,8346	1,0000	1,0530	0,9691
8	0,1835	0,0666	0,1761	0,0776	1,0922	140,8144	0,9497	1,0000	0,9032
9	0,0733	0,1682	0,0726	0,1824	1,0855	60,4597	1,0319	1,1072	1,0000

Т а б л и ц а 11. Веса, найденные по матрице Γ_2 этапа 1

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
31	0,00110418	2
27	0,00105706	4
29	0,00109047	3
33	0,00112105	1
3	0,00018837	8
23	0,00018837	9
32	0,00019983	6
1	0,00018977	7
2	0,00020448	5

Поскольку альтернатива под номером 31 не является лучшей в полученном наборе весов (табл. 11), то в новую последовательность добавляем альтернативы с номерами 33, 31, 29, 27. Строим Γ_3 по аналогии с Γ_2 (табл. 12).

Таблица 12. Эмпирическая матрица Γ_3 этапа 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0000	0,0675	0,0671	1,1217	0,0166	0,0686	0,0188	0,9590	1,1372
2	14,8126	1,0000	0,9275	15,6791	0,0723	1,0815	0,1943	15,6667	16,3955
3	14,9002	1,0782	1,0000	15,7666	0,0682	0,9453	0,0754	6,0142	6,6463
4	0,8915	0,0638	0,0634	1,0000	0,0065	0,1617	0,0070	0,9205	1,0495
5	60,3212	13,8297	14,6729	154,1597	1,0000	14,1328	1,1854	147,5933	159,6461
6	14,5858	0,9246	1,0578	6,1857	0,0708	1,0000	0,0744	6,3526	6,1772
7	53,2085	5,1469	13,2605	143,0801	0,8436	13,4357	1,0000	138,5036	149,3953
8	1,0428	0,0638	0,1663	1,0864	0,0068	0,1574	0,0072	1,0000	1,0078
9	0,8793	0,0610	0,1505	0,9528	0,0063	0,1619	0,0067	0,9923	1,0000

Таблица 13. Веса, найденные по матрице Γ_3 этапа 1

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
23	0,00090574	6
4	0,00605951	3
5	0,00529639	5
10	0,00090574	7
11	0,03697101	1
14	0,00560263	4
15	0,03118792	2
16	0,00090574	8
17	0,00090574	9

Поскольку альтернатива под номером 23 не является лучшей в полученном наборе весов (табл. 13), то в новую последовательность добавляем альтернативы с номерами 11, 15, 4, 14. Строим Γ_4 по аналогии с Γ_3 (табл. 14).

Таблица 14. Эмпирическая матрица Γ_4 этапа 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0000	0,9316	0,1638	0,0156	0,0670	1,0361	0,0007	0,1621	0,8173
2	1,0734	1,0000	0,0635	0,0061	0,0697	1,0699	0,0018	0,1732	0,8169
3	6,1054	15,7580	1,0000	0,1818	1,1318	15,5985	0,0196	0,9653	5,4823
4	63,9528	163,5431	5,5004	1,0000	15,8818	158,8093	0,0825	5,7488	148,0140
5	14,9342	14,3560	0,8836	0,0630	1,0000	5,6689	0,0074	0,9098	12,9140
6	0,9652	0,9346	0,0641	0,0063	0,1764	1,0000	0,0018	0,1647	0,8656
7	1388,4185	551,2618	51,1350	12,1148	135,9155	544,9050	1,0000	128,5940	1232,1875
8	6,1692	5,7741	1,0359	0,1739	1,0992	6,0730	0,0078	1,0000	5,2601
9	1,2236	1,2242	0,1824	0,0068	0,0774	1,1553	0,0008	0,1901	1,0000

Таблица 15. Веса, найденные по матрице $Г_4$ этапа 1

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
17	0,00030470	8
19	0,00032706	6
28	0,00150134	3
6	0,00838226	2
7	0,00132653	5
8	0,00030568	7
20	0,18029530	1
21	0,00145808	4
25	0,00030470	9

Поскольку альтернатива под номером 17 не является лучшей в полученном наборе весов (табл. 15), то в новую последовательность добавляем альтернативы с номерами 20, 6, 28, 21.

В завершении первого этапа новая последовательность альтернатив содержит альтернативы с номерами 18, 9, 30, 26, 33, 31, 29, 27, 11, 15, 4, 14, 20, 6, 28, 21.

Этап 2. Матрица $Г_1$ этапа 2 (табл. 16) формируется по аналогии с $Г_1$ первого этапа с учетом новой последовательности альтернатив.

Таблица 16. Эпирическая матрица $Г_1$ этапа 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,0000	1,1019	0,9388	1,0980	15,5512	5,5042	5,5642	5,2230	128,4790
2	0,9075	1,0000	1,0607	1,0697	14,6872	6,0203	14,1114	13,4217	133,8741
3	1,0652	0,9428	1,0000	0,9228	6,6037	13,9316	5,1776	5,0699	51,2286
4	0,9107	0,9349	1,0836	1,0000	6,0048	13,8538	5,7781	5,7723	127,3846
5	0,0643	0,0681	0,1514	0,1665	1,0000	1,0153	1,0044	1,0605	12,0811
6	0,1817	0,1661	0,0718	0,0722	0,9849	1,0000	1,0273	1,0104	5,2417
7	0,1797	0,0709	0,1931	0,1731	0,9956	0,9734	1,0000	1,0316	5,4135
8	0,1915	0,0745	0,1972	0,1732	0,9429	0,9897	0,9694	1,0000	5,6147
9	0,0078	0,0075	0,0195	0,0079	0,0828	0,1908	0,1847	0,1781	1,0000

Таблица 17. Веса, найденные по матрице Γ_1 этапа 2

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
18	0,01047626	1
9	0,01020534	2
30	0,00962151	3
26	0,00954081	4
33	0,00189101	6
31	0,00190231	5
29	0,00188278	7
27	0,00188278	8
11	0,00188278	9

В полученном наборе весов (табл. 17) альтернатива под номером 18 сохранила свою позицию лучшей альтернативы. Она участвует в формировании Γ_2 (табл. 18), для построения которой также используются альтернативы 15, 4, 14, 20, 6, 28, 21. Альтернативу 18 включаем в новую последовательность, поскольку это лучшая альтернатива по первой матрице. Матрица Γ_2 этапа 2 имеет размерность 8×8 .

Таблица 18. Эмпирическая матрица Γ_2 этапа 2

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,0010	0,0601	1,2886	1,2789	0,0060	0,1367	1,3694	0,5510
2	0,0000	0,0010	0,0051	0,0134	0,0002	0,0010	0,0134	0,0058
3	0,0000	0,0002	0,0010	0,0011	0,0000	0,0002	0,0011	0,0011
4	0,0000	0,0001	0,0009	0,0010	0,0000	0,0002	0,0009	0,0011
5	0,0002	0,0052	0,1203	0,1188	0,0010	0,0121	0,0511	0,1286
6	0,0000	0,0010	0,0053	0,0053	0,0001	0,0010	0,0055	0,0057
7	0,0000	0,0001	0,0009	0,0011	0,0000	0,0002	0,0010	0,0010
8	0,0000	0,0002	0,0009	0,0009	0,0000	0,0002	0,0010	0,0010

Таблица 19. Веса, найденные по матрице Γ_2 этапа 2

Номер альтернативы	Вес	Позиция по убыванию
11	0,15275427	1
15	0,00150174	4
4	0,00027723	5
14	0,00027723	6
20	0,02528520	2
6	0,00152488	3
28	0,00027723	7
21	0,00027723	8

В полученном наборе весов (табл. 19) альтернатива под номером 11 сохранила свою позицию лучшей альтернативы. В новую последовательность ничего не включаем.

В завершении второго этапа новая последовательность альтернатив содержит лишь одну альтернативу под номером 18.

Этап 3. Последовательность содержит лишь одну альтернативу (под номером 18), которая и выбирается в качестве победителя.

Альтернатива 18 — победитель, что совпадает с исходным идеальным набором весов. Задача нахождения победителя решена правильно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 2. — С. 13–21.
2. *Павлов А.А., Лищук Е.И., Кут В.И.* Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений // Вісник НТУУ «КПІ».

Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — Киев: ВЕК+, 2007. — № 46. — С. 84–88.

3. *Павлов А.А., Кут В.И., Штанькевич А.С.* Нахождение весов по матрице парных сравнений с односторонними ограничениями // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — Киев: ВЕК+, 2008. — № 46. — 8 с.
4. *Павлов А.А., Кут В.И.* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 3. — С. 3–22.
5. *Саати Т.Л.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 316 с.
6. *Saaty T.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process. — N.Y.: McGraw Hill International, 1980. — 300 p.
7. *Саати Т.Л., Кернс П.К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1991. — 223 с.
8. *Экланд И.* Элементы математической экономики. — М.: Мир, 1983. — 245 с.
9. *Павлов А.А., Штанькевич А.С., Иванова А.А., Логинов М.И., Кут В.И.* Система моделирования оптимизационных методов нахождения весов объектов в задаче многокритериального выбора по матрицам парных сравнений // Адаптивные системы автоматического управления. — 2008. — № 32. — С. 104–111.

Поступила 23.11.2009