

**СИНТЕЗ ФУНКЦИЙ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ
СОСТОЯНИЙ НА ОСНОВЕ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

В.Д. РОМАНЕНКО, А.А. РЕУТОВ

Рассмотрены теоретические положения проектирования одностепневых и разностепневых систем прогнозирования векторов состояния и измерения на основе математических моделей в пространстве состояний при одностепневой дискретизации всех координат, а также при дискретизации векторов управления и возмущений с малыми периодами квантования, а векторов состояния и измерения — с большими. Разработаны функции прогнозирования на базе диофантовых уравнений в матричных полиномах.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–6] описаны методы прогнозирования выходных координат процессов с использованием диофантовых уравнений на основе динамических моделей временных рядов типа «вход–выход» с одностепневой и разностепневой дискретизацией. Однако в литературе практически отсутствует описание применения диофантовых уравнений для прогнозирования на основе математических моделей в пространстве состояний.

В работе [7] рассмотрен метод синтеза разностепневых систем прогнозирования динамических координат процессов на основе математических моделей динамики процесса в пространстве состояний. При этом разработка функции прогнозирования была выполнена на базе диофантовых уравнений в матричных полиномах. Данный метод обеспечивал прогнозирование на один большой период квантования h .

Постановка задачи. Выполнить обобщение метода синтеза [7] функции прогнозирования векторов состояния и измерения на произвольное число периодов квантования вперед при одностепневой и разностепневой дискретизации координат на базе использования диофантовых уравнений в матричных полиномах.

РАЗРАБОТКА ФУНКЦИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА d ПЕРИОДОВ КВАНТОВАНИЯ T_0 ПРИ ОДНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ КООРДИНАТ

Рассмотрим математическую модель состояния процесса с постоянными параметрами при одностепневой дискретизации координат

$$\bar{x}[(k+1)T_0] = F\bar{x}(kT_0) + G\bar{u}(kT_0) + \Phi\bar{v}(kT_0) + \bar{a}_0, \quad (1)$$

где $\bar{x} \in R^n$ — вектор переменных состояния; $\bar{u} \in R^m$ — вектор переменных управления; $\bar{v} \in R^l$ — вектор возмущений; F — матрица состояния ($n \times n$); G — матрица управления ($n \times m$); Φ — матрица возмущений ($n \times n$); \bar{a}_0 — величина смещения.

Уравнение измерения имеет вид:

$$y(kT_0) = C\bar{x}(kT_0) + \bar{w}(kT_0), \quad (2)$$

где $\bar{y} \in R^r$ — вектор выходных измерений; C — матрица измерения ($n \times r$). Возмущения $\bar{v}(kT_0)$ и шум измерений $\bar{w}(kT_0)$ представлены в форме дискретного белого шума.

При условии, что известно $\bar{x}(kT_0)$, разностное уравнение (1) можно решить на интервале d периодов квантования T_0 следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}[(k+d)T_0] = & F^d \bar{x}(kT_0) + F^{d-1} G \bar{u}(kT_0) + \\ & + F^{d-2} G \bar{u}[(k+1)T_0] + \dots + F G \bar{u}[(k+d-2)T_0] + G \bar{u}[(k+d-1)T_0] + \\ & + F^{d-1} \Phi \bar{v}(kT_0) + F^{d-2} \Phi \bar{v}[(k+1)T_0] + \dots + F \Phi \bar{v}[(k+d-2)T_0] + \\ & + \Phi \bar{v}[(k+d-1)T_0] + (F^{d-1} + F^{d-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выполним обратный сдвиг на dT_0 :

$$\begin{aligned} \bar{x}(kT_0) = & F^d \bar{x}[(k-d)T_0] + F^{d-1} G \bar{u}[(k-d)T_0] + \\ & + F^{d-2} G \bar{u}[(k-d+1)T_0] + \dots + F G \bar{u}[(k-2)T_0] + G \bar{u}[(k-1)T_0] + \\ & + F^{d-1} \Phi \bar{v}[(k-d)T_0] + F^{d-2} \Phi \bar{v}[(k-d+1)T_0] + \dots + F \Phi \bar{v}[(k-2)T_0] + \\ & + \Phi \bar{v}[(k-1)T_0] + (F^{d-1} + F^{d-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Тогда это уравнение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} [I - F^d z^{-d}] \bar{x}(kT_0) = & \{F^{d-1} G z^{-d} + F^{d-2} G z^{-(d-1)} + \dots \\ & \dots + F G z^{-2} + G z^{-1}\} \bar{u}(kT_0) + \{F^{d-1} \Phi z^{-d} + F^{d-2} \Phi z^{-(d-1)} + \dots \\ & \dots + F \Phi z^{-2} + \Phi z^{-1}\} \bar{v}(kT_0) + (F^{d-1} + F^{d-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0, \end{aligned}$$

где z^{-1} — оператор обратного сдвига на период квантования T_0 .

Разрешим предыдущее уравнение относительно $\bar{x}(kT_0)$:

$$\begin{aligned} \bar{x}(kT_0) = & [I - F^d z^{-d}]^{-1} \{[F^{d-1} G z^{-d} + F^{d-2} G z^{-(d-1)} + \dots \\ & \dots + F G z^{-2} + G z^{-1}] \bar{u}(kT_0) + [F^{d-1} \Phi z^{-d} + F^{d-2} \Phi z^{-(d-1)} + \dots \\ & \dots + F \Phi z^{-2} + \Phi z^{-1}] \bar{v}(kT_0) + [F^{d-1} + F^{d-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0\}. \end{aligned}$$

Выполним сдвиг вперед на dT_0 :

$$\begin{aligned} \bar{x}[(k+d)T_0] = z^d [I - F^d z^{-d}]^{-1} \{ [Iz^{-1} + Fz^{-2} + \dots + F^{d-2}z^{-(d-1)} + \\ + F^{d-1}z^{-d}] G\bar{u}(kT_0) + [Iz^{-1} + Fz^{-2} + \dots + F^{d-2}z^{-(d-1)} + F^{d-1}z^{-d}] \times \\ \times \Phi\bar{v}(kT_0) + [F^{d-1} + F^{d-2} + \dots + F + I]\bar{a}_0 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем обозначение матричных полиномов:

$$\bar{A}(z^{-1}) = [I - F^d z^{-d}];$$

$$\bar{P}(z^{-1}) = [Iz^{-1} + Fz^{-2} + \dots + F^{d-3}z^{-(d-2)} + F^{d-2}z^{-(d-1)} + F^{d-1}z^{-d}].$$

Тогда выражение (4) можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{x}[(k+d)T_0] = z^d [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{P}(z^{-1}) G\bar{u}(kT_0) + \\ + z^d [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{P}(z^{-1}) \Phi\bar{v}(kT_0) + [A(z^{-1})]^{-1} P(1)\bar{a}_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Составим следующее диофантово уравнение:

$$\bar{P}(z^{-1}) = \bar{A}(z^{-1})\bar{L}(z^{-1}) + z^{-d}R(z^{-1}), \quad (6)$$

которое подставим в выражение (5). В результате, получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}[(k+d)T_0] = z^d \bar{L}(z^{-1}) G\bar{u}(kT_0) + \\ + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{R}(z^{-1}) G\bar{u}(kT_0) + z^d \bar{L}(z^{-1}) \Phi\bar{v}(kT_0) + \\ + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{R}(z^{-1}) \Phi\bar{v}(kT_0) + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{P}(1)\bar{a}_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где матричный полином $\bar{L}(z^{-1})$ имеет структуру:

$$\bar{L}(z^{-1}) = Iz^{-1} + L_1z^{-2} + \dots + L_{d-2}z^{-(d-1)}.$$

Значение матричного полинома $\bar{R}(z^{-1})$ однозначно определяется из диофантового уравнения (6) при

$$\bar{L}(z^{-1}) = \bar{P}(z^{-1}). \quad (8)$$

Тогда получим

$$\bar{R}(z^{-1}) = F^d \bar{P}(z^{-1}). \quad (9)$$

Из выражения (7), учитывая (8) и (9), определяется прогнозируемое значение вектора состояния на d периодов квантования T_0 .

$$\begin{aligned} \bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0] = F^{d-1} G\bar{u}(kT_0) + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} F^d \bar{P}(z^{-1}) \times \\ \times [G\bar{u}(kT_0) + \Phi\bar{v}(kT_0)] + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{P}(1)\bar{a}_0. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом ошибка прогнозирования будет равна

$$\bar{e}[(k+d)T_0] = [z^{d-1} + z^{d-2}F + \dots + zF^{d-2}] G\bar{u}(kT_0) + z^d \bar{P}(z^{-1}) \Phi\bar{v}(kT_0). \quad (11)$$

Учитывая структуру $\bar{A}(z^{-1})$ функцию прогнозирования (10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0] = & F^d \bar{x}(kT_0) + F^{d-1} G\bar{u}(kT_0) - F^{2d-1} G\bar{u}[(k-d)T_0] + \\ & + F^d \bar{P}(z^{-1})[G\bar{u}(kT_0) + \Phi\bar{v}(kT_0)] + \bar{P}(1)\bar{a}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим прогнозирование вектора состояния согласно выражению (12) при неизмеряемых возмущениях $\bar{v}(kT_0)$. Для этого определяем из исходной модели (1)

$$\Phi\bar{v}(kT_0) = \bar{x}[(k+1)T_0] - F\bar{x}(kT_0) - G\bar{u}(kT_0) - \bar{a}_0,$$

которое подставляем в (12). Тогда после преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0] = & 2F^d \bar{x}(kT_0) - F^{2d} \bar{x}[(k-d)T_0] + F^{d-1} G\bar{u}(kT_0) - \\ & - F^{2d-1} G\bar{u}[(k-d)T_0] + (1 - F^d) \bar{P}(1) \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Прогнозирование вектора измерения выходных координат производится на основе уравнения измерения (2) и функции прогнозирования (12).

$$\bar{y}^*[(k+d)T_0 | kT_0] = C\bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0]. \quad (14)$$

Определим на основе (5), (10) дисперсию ошибки прогнозирования

$$\begin{aligned} M \{ \bar{x}[(k+d)T_0] - \bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0] \}^2 = & M \{ z^d [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \cdot \\ & \cdot \bar{P}(z^{-1})[G\bar{u}(kT_0) + \Phi\bar{v}(kT_0)] + [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} P(1) \bar{a}_0 - \\ & - F^{d-1} G\bar{u}(kT_0) - [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} F^d \bar{P}(z^{-1})[G\bar{u}(kT_0) + \\ & + \Phi\bar{v}(kT_0)] - [\bar{A}(z^{-1})]^{-1} \bar{P}(1) \bar{a}_0 \}^2, \end{aligned}$$

где M — оператор математического ожидания. Используя уравнения (6) и равенства (8), (9) получим:

$$\begin{aligned} M \{ \bar{x}[(k+d)T_0] - \bar{x}^*[(k+d)T_0 | kT_0] \}^2 = \\ = M \{ z^d \bar{P}(z^{-1})[G\bar{u}(kT_0) + \Phi\bar{v}(kT_0)] - F^{d-1} G\bar{u}(kT_0) \}^2 = M \{ \bar{e}[(k+d)T_0] \}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании функции прогнозирования (10) обеспечивается минимизация дисперсии ошибки прогнозирования вектора состояния $\bar{x}[(k+d)T_0]$.

Пример 1. Уравнение состояния (1) с однотемповой дискретизацией имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T_0] \\ x_2[(k+1)T_0] \\ x_3[(k+1)T_0] \\ x_4[(k+1)T_0] \\ x_5[(k+1)T_0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT_0) \\ x_2(kT_0) \\ x_3(kT_0) \\ x_4(kT_0) \\ x_5(kT_0) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(kT_0) \\ v_2(kT_0) \\ v_3(kT_0) \\ v_4(kT_0) \\ v_5(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты равны: $f_0 = 0,53588$; $f_1 = 3,9539$; $f_2 = -1,50465$; $f_3 = -5,31682$; $f_4 = 3,3145$; $c_0 = 1$; $c_1 = 0,487$; $c_2 = -3,456$; $c_3 = -2,0297$; $c_4 = 3,241$; $a_0 = -0,188$.

Необходимо выполнить прогнозирование выходной координаты измерения y на $d = 6$ периодов квантования T_0 .

На основе (12) прогнозируемое значение вектора состояния вычисляется по следующей рекуррентной процедуре:

$$\begin{aligned} \bar{x}^*[(k+6)T_0] &= F^6 \bar{x}(kT_0) + F^6 \bar{P}(z^{-1}) \Phi \bar{v}(kT_0) + \\ &+ P(1) \bar{a} = F^6 \bar{x}(kT_0) + F^6 \Phi \bar{v}[(k-1)T_0] + F^7 \Phi \bar{v}[(k-2)T_0] + \\ &+ F^8 \Phi \bar{v}[(k-3)T_0] + F^9 \Phi \bar{v}[(k-4)T_0] + F^{10} \Phi \bar{v}[(k-5)T_0] + \\ &+ F^{11} \Phi \bar{v}[(k-6)T_0] + (I + F + \dots + F^5) \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Прогнозируемые значения вектора состояния $\bar{x}^*[(k+6)T_0]$ сравниваются с вычисленными значениями согласно (3) при $d = 6$.

$$\begin{aligned} \bar{x}[(k+6)T_0] &= F^6 \bar{x}(kT_0) + F^5 \Phi \bar{v}(kT_0) + \\ &+ F^4 \Phi \bar{v}[(k+1)T_0] + F^3 \Phi \bar{v}[(k+2)T_0] + F^2 \Phi \bar{v}[(k+3)T_0] + \\ &+ F \Phi \bar{v}[(k+4)T_0] + \Phi \bar{v}[(k+5)T_0] + (F^5 + F^4 + \dots + F + I) \bar{a}_0. \end{aligned}$$

Результаты сравнения вычисленной выходной координаты измерения $y[(k+6)T_0]$ на основе уравнения (2) и ее прогнозируемого значения $y^*[(k+6)T_0 | kT_0]$ согласно (13), (14) приведены на рис. 1.

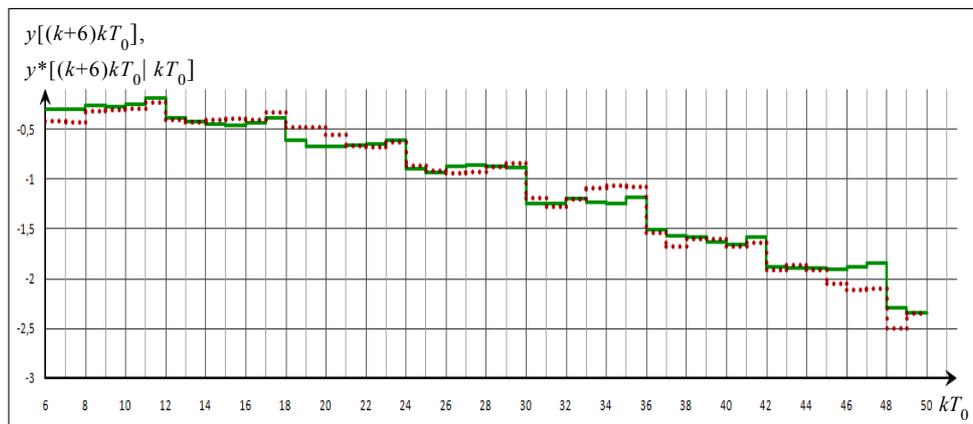


Рис. 1. График моделирования выходной координаты изменения $y[(k+6)kT_0]$ при односторонней дискретизации (—) и ее прогнозируемого значения $y^*[(k+6)kT_0 | kT_0]$ (.....)

**РАЗРАБОТКА ФУНКЦИИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА d ПЕРИОДОВ
КВАНТОВАНИЯ h ПРИ РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ
КООРДИНАТ**

Рассмотрим математическую модель состояния процесса (1) в форме представления с большим и малым периодами квантования:

$$\bar{x}[rh + (i + 1)T_0] = F\bar{x}(rh + iT_0) + G\bar{u}(rh + iT_0) + \Phi\bar{v}(rh + iT_0) + \bar{a}_0. \quad (15)$$

При этом увеличенный период квантования

$$h = mT_0, \quad (16)$$

где m — целое число, большее единицы, а $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$. Номер отсчетов r с увеличенным периодом квантования h формируется как целое число от деления номера дискретного отсчета k с базовым периодом квантования T_0 на коэффициент m , т. е. $\left[\frac{k}{m} \right]$.

Уравнение измерения (2) принимает вид:

$$\bar{y}(rh + iT_0) = C\bar{x}(rh + iT_0) + \bar{w}(rh + iT_0). \quad (17)$$

При условии, что известно $\bar{x}(rh)$, разностное уравнение (15) можно решить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}(rh + iT_0) = & F^i\bar{x}(rh) + F^{i-1}G\bar{u}(rh) + F^{i-2}G\bar{u}(rh + T_0) + \dots \\ & \dots + FG\bar{u}[rh + (i - 2)T_0] + G\bar{u}[rh + (i - 1)T_0] + F^{i-1}\Phi\bar{v}(rh) + \\ & + F^{i-2}\Phi\bar{v}(rh + T_0) + \dots + F\Phi\bar{v}[rh + (i - 2)T_0] + \\ & + \Phi\bar{v}[rh + (i - 1)T_0] + (F^{i-1} + F^{i-2} + \dots + F + I)\bar{a}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим динамические процессы, в которых выходные координаты и переменные состояния определяются только в дискретные моменты времени с увеличенными периодами квантования h по сравнению с малыми периодами T_0 при дискретизации входных сигналов управления и возмущающих воздействий. К указанным процессам можно отнести финансово- и социально-экономические процессы, где выходные координаты измеряются в дискретные моменты с периодами квантования, равными декаде, месяцу, полугодию или году. Периоды квантования фиксируемых управлений и входных возмущений соответственно равны одним суткам, неделе или месяцу. В многомерных технологических объектах управления некоторые выходные координаты, которые характеризуют состав и качество продукта, невозможно измерить с требуемым малым периодом квантования. В таких случаях для описания динамики этих процессов в дискретном времени необходимо применять математические модели с разнотемповой дискретизацией координат.

При соотношении периодов квантования (16) равенство (18) для $i = m$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= F^m \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left\{ F^{m-1} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ F^{m-2} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \dots + F G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right] + \\
 &+ G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] \left. \right\} + \left\{ F^{m-1} \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ F^{m-2} \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \dots + F \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right] + \\
 &+ \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] \left. \right\} + (F^{m-1} + F^{m-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Это выражение представляет собой уравнение состояния при разнотемповой дискретизации координат, когда переменные состояния \bar{x} определяются в дискретные моменты времени $\left[\frac{k}{m} \right] h$, а сигналы управления и возмущения фиксируются в моменты времени nT_0 .

При условии, что известно $\bar{x}(rh) = \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, уравнение (19) будет иметь следующее решение:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= F^{dm} \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left\{ F^{dm-1} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ F^{dm-2} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \dots + F^2 G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-3)T_0 \right] + \\
 &+ F G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-2)T_0 \right] + G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-1)T_0 \right] \left. \right\} + \\
 &+ \left\{ F^{dm-1} \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + F^{dm-2} \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \right. \\
 &+ \dots + F^2 \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-3)T_0 \right] + F \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-2)T_0 \right] + \\
 &+ \Phi\bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (dm-1)T_0 \right] \left. \right\} + (F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Выполним обратный сдвиг на dh .

$$\bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] \right) h \right] = F^{dm} \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h \right] + \left\{ F^{dm-1} G\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + F^{dm-2} G\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + T_0 \right] + \dots + F^2 G\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-3)T_0 \right] + \\
 & + FG\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-2)T_0 \right] + G\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-1)T_0 \right] \Big\} + \\
 & + \left\{ F^{dm-1} \Phi\bar{v} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h \right] + F^{dm-2} \Phi\bar{v} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + T_0 \right] + \dots \right. \\
 & \dots + F^2 \Phi\bar{v} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-3)T_0 \right] + FG\bar{v} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-2)T_0 \right] + \\
 & \left. + G\bar{v} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h + (dm-1)T_0 \right] \right\} + (F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I) \bar{a}_0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Введем оператор обратного сдвига z_1^{-1} на величину $1h$. Тогда при соотношении периодов квантования (16) получим:

$$z_1^{-1} = z^{-m},$$

где z^{-m} — оператор обратного сдвига на $1h = mT_0$.

Тогда уравнение (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & \left[I - F^{dm} z^{-dm} \right] \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \left\{ F^{dm-1} Gz^{-dm} + F^{dm-2} Gz^{-(dm-1)} + \dots \right. \\
 & \left. \dots + F^2 Gz^{-3} + FGz^{-2} + Gz^{-1} \right\} \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left\{ F^{dm-1} \Phi z^{-dm} + \right. \\
 & + F^{dm-2} \Phi z^{-(dm-1)} + \dots + F^3 \Phi z^{-4} + F^2 \Phi z^{-3} + F \Phi z^{-2} + \Phi z^{-1} \Big\} \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
 & + \left\{ F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I \right\} \bar{a}_0.
 \end{aligned}$$

Разрешим это уравнение относительно $\bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$.

$$\begin{aligned}
 & \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \left[I - F^{dm} z^{-dm} \right]^{-1} \left\{ \left[F^{dm-1} Gz^{-dm} + F^{dm-2} Gz^{-(dm-1)} + \dots \right. \right. \\
 & \left. \dots + F^2 Gz^{-3} + FGz^{-2} + Gz^{-1} \right] \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[F^{dm-1} \Phi z^{-dm} + \right. \\
 & + F^{dm-2} \Phi z^{-(dm-1)} + \dots + F^3 \Phi z^{-4} + F^2 \Phi z^{-3} + F \Phi z^{-2} + \Phi z^{-1} \Big] \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
 & \left. + \left[F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I \right] \bar{a}_0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Выполним сдвиг вперед на $dh = dmT_0$.

$$\begin{aligned} \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + dmT_0 \right] = z^{dm} \left[I - F^{dm} z^{-dm} \right]^{-1} \times \\ &\times \left\{ \left[Gz^{-1} + FGz^{-2} + F^2Gz^{-3} + \dots + F^{dm-2}Gz^{-(dm-1)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. F^{dm-1}Gz^{-dm} \right] \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[\Phi z^{-1} + F\Phi z^{-2} + F^2\Phi z^{-3} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. F^3\Phi z^{-4} + \dots + F^{dm-2}\Phi z^{-(dm-1)} + F^{dm-1}\Phi z^{-dm} \right] \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\ &\left. + \left[F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I \right] \bar{a}_0 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем обозначения матричных полиномов.

$$\bar{B}(z^{-1}) = [I - F^{dm} z^{-dm}]. \quad (23)$$

$$\bar{D}(z^{-1}) = [Iz^{-1} + Fz^{-2} + F^2z^{-3} + \dots + F^{dm-2}z^{-(dm-1)} + F^{dm-1}z^{-dm}]. \quad (24)$$

Тогда выражение (22) можно записать в форме:

$$\begin{aligned} \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= z^{dm} \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} \bar{D}(z^{-1}) G \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ z^{dm} \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} \bar{D}(z^{-1}) \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} [F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Составим диофантово уравнение:

$$\bar{D}(z^{-1}) = \bar{B}(z^{-1}) \bar{L}(z^{-1}) + z^{-dm} \bar{R}(z^{-1}), \quad (26)$$

правую часть которого подставляем в выражение (25) вместо $\bar{D}(z^{-1})$. В результате, получим

$$\begin{aligned} \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= z^{dm} \bar{L}(z^{-1}) G \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} \bar{R}(z^{-1}) G \bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ z^{dm} \bar{L}(z^{-1}) \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} \bar{R}(z^{-1}) \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ \left[\bar{B}(z^{-1}) \right]^{-1} [F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Значение матричного полинома $\bar{R}(z^{-1})$ определяется из диофантового уравнения (26) при $\bar{L}(z^{-1}) = \bar{D}(z^{-1})$. Тогда получим

$$\bar{R}(z^{-1}) = F^{dm} \bar{D}(z^{-1}) = F^{dm} [Iz^{-1} + Fz^{-2} + F^2z^{-3} + \dots]$$

$$\dots + F^{dm-2} z^{-(dm-1)} + F^{dm-1} z^{-dm}] .$$

В результате уравнение (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{x} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= z^{dm} \bar{D}(z^{-1}) \left\{ G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} + \\ &+ [\bar{B}(z^{-1})]^{-1} F^{dm} \bar{D}(z^{-1}) G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + [\bar{B}(z^{-1})]^{-1} F^{dm} D(z^{-1}) \times \\ &\times \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + [\bar{B}(z^{-1})]^{-1} [F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0, \end{aligned} \quad (29)$$

откуда с учетом (24) прогнозируемое значение вектора состояния определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}^* \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= F^{dm-1} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + [\bar{B}(z^{-1})]^{-1} F^{dm} \bar{D}(z^{-1}) \times \\ &\times \left\{ G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} + [\bar{B}(z^{-1})]^{-1} [F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно выражению (29), вектор ошибок прогнозирования будет равен:

$$\begin{aligned} \bar{e} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] &= z^{dm} [I z^{-1} + F z^{-1} + \dots + F^{dm-2} \times \\ &\times z^{-(dm-1)}] G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + z^{dm} D(z^{-1}) \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]. \end{aligned}$$

Прогнозирование вектора измеряемых выходных координат производится на основе (17), (30).

$$\bar{y}^* \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = C x^* \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]. \quad (31)$$

Учитывая значение матричного полинома $\bar{B}(z^{-1})$, согласно (23) функцию прогнозирования (30) можно записать так:

$$\begin{aligned} \bar{x}^* \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + d \right) h \right] \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= F^{dm} \bar{x} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + F^{dm-1} G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \\ &- F^{2dm-1} G\bar{u} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - d \right) h \right] + F^{dm} \bar{D}(z^{-1}) \times \\ &\times \left\{ G\bar{u} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} + [F^{dm-1} + F^{dm-2} + \dots + F + I] \bar{a}_0. \end{aligned} \quad (32)$$

Для использования функции прогнозирования (32) при неизмеряемых возмущениях $\bar{v}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - iT_0\right]$, где $i = 1, 2, \dots, dm$, определяем из выражения

$$(15) \text{ при } i=0 \quad \Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \bar{x}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h + T_0\right] - F\bar{x}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - G\bar{u}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \bar{a}_0,$$

которое подставляем в (32). После преобразований получим:

$$\begin{aligned} \bar{x}^*\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] + d\right)h\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= 2F^{dm}\bar{x}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - F^{2dm}\bar{x}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - d\right)h\right] + \\ &+ F^{dm-1}G\bar{u}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - F^{2dm-1}G\bar{u}\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - d\right)h\right] + \\ &+ (1 - F^{dm})(1 + F + F^2 + \dots + F^{dm-2} + F^{dm-1}). \end{aligned} \quad (33)$$

Для реализации функций прогнозирования (12), (32), (33) необходима информация о векторах состояния $\bar{x}(kT_0)$, $\bar{x}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ в данный момент времени, которые в общем случае не измеряются. Для решения этой проблемы необходимо применять фильтр Калмана, с помощью которого производится оценивание векторов $\hat{x}(kT_0)$, $\hat{x}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$.

Пример 2. Уравнение состояния с разнотемповой дискретизацией (19) при $m = 4$, $\bar{u}(\bullet) = 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{x}\left[\left(\left[\frac{k}{4}\right] + 1\right)h\right] &= F^4\bar{x}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h\right] + F^3\Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h\right] + F^2\Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h + T_0\right] + \\ &+ F\Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h + 2T_0\right] + \Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h + 3T_0\right] + [F^3 + F^2 + F + I]\bar{a}_0, \end{aligned}$$

где значения матриц F , Φ и векторов \bar{x} , \bar{v} приведены в «Примере 1».

Необходимо выполнить прогнозирование вектора состояния $\bar{x}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h\right]$ на $d = 3$ периодов квантования h . Сравнить прогнозируемое значение выходной измеряемой координаты $y^*\left[\left(\left[\frac{k}{4}\right] + 3\right)h\left[\frac{k}{4}\right]h\right]$ согласно (31) с ее вычисленным значением $y\left[\left(\left[\frac{k}{4}\right] + 3\right)h\right] = C\bar{x}\left[\left(\left[\frac{k}{4}\right] + 3\right)h\right]$.

На основе (20) можно записать

$$\bar{x}\left[\left(\left[\frac{k}{4}\right] + 3\right)h\right] = F^{12}\bar{x}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h\right] + F^{11}\Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h\right] + F^{10}\Phi\bar{v}\left[\left[\frac{k}{4}\right]h + T_0\right] + \dots$$

$$\dots + F^2 \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h + 9T_0 \right] + F \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h + 10T_0 \right] + \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h + 11T_0 \right] + [F^{11} + F^{10} + \dots + F^2 + F + I] \bar{a}_0.$$

Функцию прогнозирования (32) при $m = 4$, $d = 3$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}^* \left[\left(\left[\frac{k}{4} \right] + 3 \right) h \right] &= F^{12} \bar{x} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h \right] + F^{12} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - T_0 \right] + \\ &+ F^{13} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - 2T_0 \right] + \dots + F^{20} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - 9T_0 \right] + \\ &+ F^{21} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - 10T_0 \right] + F^{22} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - 11T_0 \right] + \\ &+ F^{23} \Phi \bar{v} \left[\left[\frac{k}{4} \right] h - 12T_0 \right] + [F^{11} + F^{10} + \dots + F^2 + F + I] \bar{a}_0. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены результаты сравнения вычисленного значения выходной измеряемой координаты $y \left[\left(\left[\frac{k}{4} \right] + 3 \right) h \right]$ и ее прогнозируемого значения $y^* \left[\left(\left[\frac{k}{4} \right] + 3 \right) h \left| \left[\frac{k}{4} \right] h \right. \right]$ на основе (31).

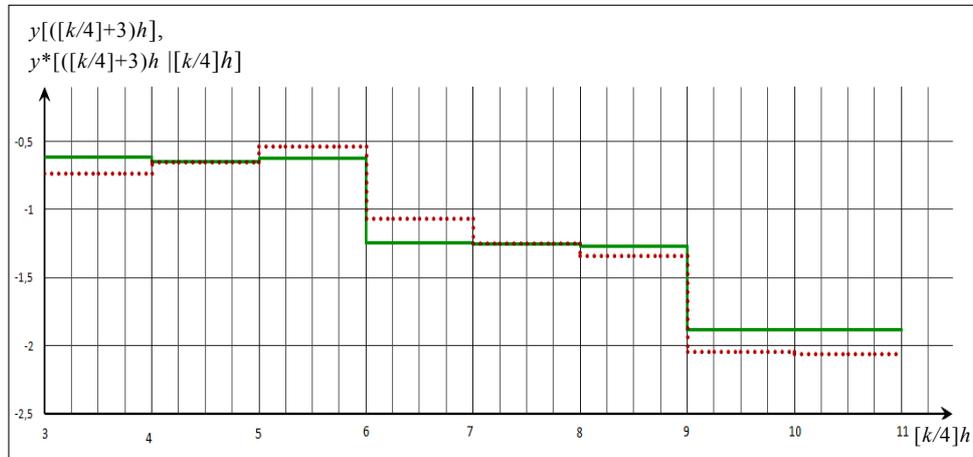


Рис. 2. График моделирования выходной координаты изменения $y \left[\left(\left[\frac{k}{4} \right] + 3 \right) h \right]$ при разнотемповой дискретизации (—) и ее прогнозируемого значения $y^* \left[\left(\left[\frac{k}{4} \right] + 3 \right) h \left| \left[\frac{k}{4} \right] h \right. \right]$ (.....)

ВЫВОДЫ

1. Разработана методика прогнозирования вектора состояния и вектора измерения динамических процессов на d периодов квантования T_0 на основе представления модели динамики в пространстве состояний с одното-

повой дискретизацией путем применения диофантовых уравнений в матричных полиномах.

2. Разработана модель динамики процесса в пространстве состояний с разнотемповой дискретизацией, в которой координаты управления и возмущения представлены в дискретные моменты времени с малым периодом квантования T_0 , а координаты векторов состояния и измерения — большим периодом квантования $h = mT_0$, где $m > 1$.

3. Разработана методика прогнозирования векторов состояния и измерения на d периодов квантования h на основе модели динамики процесса в пространстве состояний с разнотемповой дискретизацией путем применения диофантовых уравнений в матричных полиномах при измеряемых и неизменяемых возмущениях.

4. Проведено исследование точности прогнозирования, которое заключается в том, что использование разработанной функции прогнозирования обеспечивает минимизацию дисперсии ошибки прогнозирования вектора состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 319 с.
2. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. — М.: Мир, 1987. — 480 с.
3. *Романенко В.Д., Игнатенко Б.В.* Адаптивное управление технологическими процессами на базе микроЭВМ. — Киев: Вища школа, 1990. — 334 с.
4. *Koivo H.M.* A multivariable self-tuning controller // *Automatica*. — 1980. — **16**. — P. 351–366.
5. *Clarke D.W., Phil M.A., Gawthrop P.J.* Self-tuning controller // *Proceedings of the institution of electrical engineers: Control science*. — 1975. — **122**. — № 9. — P. 929–935.
6. *Goodwin G.C., Sin K.S.* Adaptive filtering prediction and control. — Prentice Hall, 1984. — 539 p.
7. *Романенко В.Д., Реутов А.А.* Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей в пространстве состояний с разнотемповой дискретизацией // *Автоматика* — 2008: Доповіді XV Міжнар. конф. з автомат. керув., 23–26 вересня 2008 р. — Одеса: ОНМА. — С. 484–487.

Поступила 10.03.2009