

МЕТОДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДОВГОСТРОКОВОГО ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

О.Г. ЗРАЖЕВСЬКИЙ

Запропоновано методи щодо прогнозування фінансових часових рядів, на які накладаються зовнішні вимоги, представлено алгоритм послідовної побудови лінійних регресійних рівнянь із різними наборами регресорів. Для виконання деяких зовнішніх вимог сформульовано задачу лінійної оптимізації. Алгоритм застосовано щодо прогнозування часових рядів, що відображають вимоги банків за кредитами, наданими суб'єктам господарювання за 2007 рік.

ВСТУП

Одне із важливих завдань економіки — розробка методів прогнозування часових рядів. З цією проблемою стикаються в багатьох сферах суспільної діяльності. На практиці прогнозування часових рядів, переважно зводять до кількох етапів, які можуть здійснюватись неодноразово. Серед них найважливішими є:

- вибір стохастичної моделі;
- адаптація обраної моделі;
- знаходження прогнозу на основі обраної моделі.

Стохастичну модель, зазвичай, обирають, зважаючи на інформацію щодо явища, яке досліджується, та потреб її подальшого використання. У наш час розроблено багато різних параметричних/непараметричних, лінійних/нелінійних, стаціонарних/нестаціонарних моделей. Прикладом параметричних моделей, що часто використовують в аналізі часових рядів, є регресійні моделі, FARIMA, GARCH [1–7]. В аналізі часових рядів критеріями для вибору моделі можуть бути історичні дані, інформація щодо їх природи, зовнішні вимоги щодо результатів. На практиці вибір моделі ускладнений браком історичних даних або складністю розробленої моделі.

Інша істотна проблема — вибір найкращої, в певному сенсі, з класу моделей. Прикладом щодо цього є обрання регресійної кривої з певного класу, яка максимально повно описує історичні дані. Адаптація моделі здійснюється шляхом оцінки параметрів моделі та визначення таких її характеристик, як оцінка скінчено вимірних розподілів. Для пошуку оцінок параметрів регресійної моделі розроблені алгоритми та методи. Зокрема, метод найменших квадратів, метод найменших абсолютних відхилень, узагальнений метод найменших квадратів, алгоритм ортогональних найменших квадратів [2–7]. Прогнозування на основі обраної моделі проводять здебільшого шляхом екстраполяції, тобто продовження цієї моделі на необхідний в подальшому проміжок часу. Це можна зробити, наприклад, через використання провідних індикаторів або функції прогнозування [1, 6].

У запропонованій роботі представлено метод прогнозування набору часових рядів, який передбачає виконання певних вимог щодо результату і максимально враховує специфіку походження даних. Він базується на техніці регресійного аналізу і використовує метод найменших квадратів у визначенні моделі прогнозування. Кінцеву корекцію результатів здійснюють шляхом лінійної оптимізації. Розроблений метод можна застосувати щодо прогнозування фінансових часових рядів, а у підсумку, використати під час планування у банківській діяльності.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо набір часових рядів $\{y_\theta(t), t \in T, \theta \in \Theta\}$, кожен з яких функціональним чином пов'язаний із часом. Тобто для $\forall \theta \in \Theta$:

$$y_\theta(t) = f_\theta(t) + \xi_\theta(t), t \in T, \quad (1)$$

де $f_\theta(t) \in F$ — певна функція часу, $\xi_\theta(t)$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини, $E\xi_\theta(t) = 0$, $D\xi_\theta(t) < \infty$.

Припустимо, що досліджувані часові ряди $\{y_\theta(t), t \in T, \theta \in \Theta\}$ апріорно поділяються на два типи: $\{y_i^1(t), t \in T\}$, $i \in I$ та $\{y_j^2(t), t \in T\}$ $j \in J$ — часові ряди першого та другого рівнів відповідно, враховуючи наступне: A — умова балансу, де кожен часовий ряд першого рівня є сумою певного фіксованого набору часових рядів другого рівня: $y_i^1(t) = \sum_{j \in J_i} y_j^2(t)$, $t \in T, i \in I, J_k \cap J_l = \emptyset, k \neq l, \bigcup_{i \in I} J_i = J$.

Мета — розробка довгострокових прогнозів часових рядів першого та другого рівнів. Прогнозування часового ряду за моделлю (1) включає задачу визначення з класу F функції, яка найкращим, в певному сенсі, чином описує історичні значення часового ряду. Прогноз часового ряду обчислюють як значення обраної функції у необхідні моменти часу.

Зауважимо, що умова A наслідують умову рівності відповідних прогнозних значень. Якщо клас функцій F є замкненим щодо операції додавання, то умови балансу можна досягти шляхом прогнозування часових рядів другого рівня і, просумувавши відповідні значення, отримати прогнози для часового ряду першого рівня. В іншому випадку, умова балансу не може бути виконана шляхом використання функцій з класу F . У цьому разі пропонується прогнозувати ряди першого і другого рівнів, а умову балансу досягати шляхом корекції отриманих значень. Цей підхід задовольняє апріорні вимоги щодо прогнозних значень, не враховані при побудові моделі (1).

Прикладом тут може слугувати задача прогнозування показників банківської діяльності, які представлені у вигляді викладених часових рядів: значення статті у всьому банку, яке обчислюється як сума значень цієї ж статті у всіх філіях.

Отже, запишемо умови, яким мають відповідати прогнозні часові ряди:

Б 1 — умова балансу, аналогічна умові A на прогнозному інтервалі часу;

Б 2 — необхідність одночасного прогнозування рядів першого і другого рівнів;

Б 3 — збереження загальних тенденцій протягом значних інтервалів часу;

Б 4 — незменшення прогнозних значень в подальшому;

Б 5 — поведінка прогнозних значень повинна мати заданий ступінь гладкості;

Б 6 — модель прогнозу має підкорятись певним індикативним умовам (експертним оцінкам).

Зауважимо, що умови Б 1–Б 2 є наслідками умови А та припущення, що клас F є незамкненим щодо операції додавання. Умова Б 3 відображає специфіку довгострокового прогнозування. Умови Б 4–Б 6 є прикладами додаткових вимог щодо прогнозу часових рядів і обумовлені специфікою їх подальшого використання.

Визначимо кінцеву мету: необхідно побудувати набір прогнозів часових рядів першого та другого рівнів, які відповідають умовам Б 1–Б 6 і задані своїми історичними значеннями. Розв'язання задачі здійснюємо за наступною схемою:

- прогнозування часового ряду $\{y(t), t \in T\}$ без деталізації, до якого типу він належить (першого чи другого), з врахуванням умови Б 3 включає:
 - а) вибір моделі, яка найкращим чином описує історичні дані;
 - б) побудову прогнозу шляхом екстраполяції моделі пункту а);
- корекція прогнозів, обчислених попередньо, шляхом застосування лінійної оптимізації для задоволення вимог Б 1–Б 6.

ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВОГО РЯДУ

Розглянемо часовий ряд $\{y(t), t \in T\}$, заданий своїми історичними даними за період часу $T = \{1, \dots, N\}$. Для прогнозування цього часового ряду запропонуємо використати наступний параметричний клас функцій.

$$F = \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^p a_k x_k(t), a_k \in \Lambda, t \in T, x_k \in P \right\}.$$

Тоді рівняння (1) запишемо наступним чином:

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^p a_k x_k(t) + \xi_t, t = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де $x_k(t) \in P$, $k \in \{1, \dots, p\}$ — певний набір регресорів, які є перетвореннями індексу часу; a_k , $k \in \{1, \dots, K\}$ — параметри регресії; ξ_t — випадкова похибка, $E\xi_t = 0$, $D\xi_t < \infty$ [2–8].

Подальше завдання — обрати певний набір функцій $P^* = \{x_k(t), k = 1, \dots, s\} \subset P$ та оцінити параметри $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_s)$ регресії (2) з цим набором регресорів.

Опишемо один із загальних підходів розв'язання цієї задачі: перебираючи всі можливі набори регресорів із P , будемо регресійні рівняння типу (2) та знаходимо оцінки для параметрів. Останнє можна зробити, наприклад, за методом найменших квадратів або за методом абсолютних відхилень [3, 4, 7]. Використовуючи певний критерій якості, порівнюємо побудовані регресійні рівняння та обираємо з них найкраще в сенсі заданого критерію [3].

На практиці, при аналізі досить малої кількості даних, застосування описаного метода може призвести до неправильного вибору моделі, що обумовлюється функціональною подібністю деяких регресорів. Для усунення цієї проблеми в роботі запропоновано покроковий алгоритм вибору оптимального набору регресорів, при якому враховується специфіка досліджуваних часових рядів. За цим методом на кожному кроці використовується не весь клас регресорів, а його підмножина.

АЛГОРИТМ

- Розбиваємо клас усіх регресорів на скінченну кількість підкласів $P = P_1 \cup \dots \cup P_m$, для яких вводимо ієрархічну структуру. Тобто, $i + 1$ -й клас має перевагу перед i -м щодо можливості його застосування у аналізі даних: $P_{i+1} \succ P_i$;

- будемо оцінки параметрів для регресійного рівняння із регресорами, що належать до P_1 ;

- обираємо оптимальний в сенсі певного критерію набір регресорів із першого класу: $P_1^* \subset P_1$;

- аналізуємо залишки побудованого регресійного рівняння щодо наявності залишку корисної інформації. Якщо останнє справджується, то переходимо до наступного пункту. Якщо ні, то використовуємо побудовану регресійну модель для прогнозування;

- використовуючи залишки регресійного рівняння з попереднього пункту як нові історичні дані (відгук), повторюємо «Кроки» 2–4. При цьому застосовуємо набори регресорів з P_2 ;

- здійснюємо «Кроки» 2 і 5 необхідну кількість разів. Кінцеву модель записуємо як лінійну комбінацію відповідних регресійних рівнянь.

Зауважимо, що запропонований алгоритм сприяє контролю параметру перезгладження моделі.

Наведемо приклад застосування запропонованого алгоритма в побудові моделі прогнозування фінансових часових рядів.

Крок 1. Запропонуємо клас регресорів, які можна використати для опису фінансових часових рядів. Для цього розглянемо функції виду:

$$x(t) = t^\alpha, \quad \alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]. \quad (3)$$

Модель типу (2) з регресорами виду (3) широко застосовується в аналізі економічних та фінансових часових рядів і в економетриці має назву «модель кривих росту». Включення функцій типу (3) до класу регресорів, фактично означає введення до моделі трендової складової [6].

Оскільки багато фінансових часових рядів демонструють періодичні коливання, зокрема мають сезонну компоненту, то іншим типом функцій, які слід включити до класу регресорів, є періодичні функції:

$$x(t) = \sin(mt), \quad x(t) = \cos(mt), \quad m \in [\underline{m}, \bar{m}]. \quad (4)$$

Застосування регресорів типу (4) до аналізу часового ряду фактично наслідують можливість досліджувати часові ряди із пам'яттю, тобто вводити у модель авторегресійну складову (у даному випадку лише авторегресію 2-го порядку (див. твердження 1–2)).

Зауважимо, що клас функцій від індексу часу для регресійного рівняння (2), загалом, не обмежується функціями типів (3) та (4) [6]. Проте, не втрачаючи загальності, надалі ми будемо припускати, що зазначеного набору регресорів цілком достатньо для опису досліджуваних часових рядів.

Отже, клас функцій, які будуть застосовуватись як регресори рівняння (2), можна записати наступним чином:

$$F = \{a_0 + \sum_{k=1}^p a_k x_k(t), \quad a_k \in \Lambda, \quad t \in T, \quad x_k \in P\},$$

$$P = P_1 \cup P_2,$$

$$P_1 = \{x(t) = t^{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}], \quad k = 1, \dots, K_1\},$$

$$P_2 = \{x(t) = \sin(\beta_k t), \quad x(t) = \cos(\beta_k t), \quad \beta_k \in (0, \pi/2), \quad k = 1, \dots, K_2\}. \quad (5)$$

Зауважимо, що регресори з класу P_1 стануть основою для довгострокового прогнозу, і, тому будуть використовуватись у регресуванні першочергово. Регресійна модель із регресорами з класу P_2 є авторегресійною моделлю 2-го порядку. Тобто, її застосування до залишків першого регресійного рівняння необхідне у випадку їх закорельованості. Очевидно, що регресійна модель (2) із регресорами класу (5) добре узгоджується з умовою Б 3.

Параметри функцій класів P_1 та P_2 визначемо так:

$$\alpha_k = k h_1, \quad k = 1, \dots, K_1,$$

$$\beta_k = \frac{k h_2 \pi}{K_2}, \quad k = 1, \dots, K_2. \quad (6)$$

При достатньо малих кроках h_1 та h_2 це суттєво спростить вибір оптимального набору регресорів, а саме: призведе до можливості розглядати лише одноелементні підмножини відповідних класів (надалі $p = 1$). Необхідна кількість регресорів K_1 та K_2 в класах P_1 та P_2 визначається з практичних міркувань.

Крок 2. Запишемо регресійні рівняння (1) із регресорами з класу P_1 :

$$y(t) = a_k + b_k t^{\alpha_k} + \xi_t^k, \quad t = 1, \dots, N, \quad k \in \{1, \dots, K_1\}. \quad (7)$$

Оцінки параметрів регресійного рівняння \hat{a}_k та \hat{b}_k шукаємо за допомогою зваженого метода найменших квадратів, тобто, як значення, які мінімізують зважену середньоквадратичну похибку:

$$\sum_{t=1}^N w_t (\xi_t^k)^2 \rightarrow \min, \quad k \in \{1, \dots, K_1\}. \quad (8)$$

Оцінка для залежної змінної за регресійною моделлю (7): $\hat{y}_k(t) = \hat{a}_k + \hat{b}_k t^{\alpha_k}$. Залишки регресійної моделі: $r_k(t) = y(t) - \hat{y}_k(t)$.

Крок 3. Сформулюємо критерій якості для вибору оптимального регресійного рівняння (7), яке в середньоквадратичному сенсі найкращим чином описує історичні дані часового ряду. Для кожного регресійного рівняння (7) визначимо значення статистики Дурбіна–Ватсона та перевіримо тести Фішера, Стьюдента, Дурбіна–Ватсона та тест на основі методу складного ножа [3, 4, 5, 7].

Тест Фішера. Перевіряє гіпотезу про адекватність запропонованої моделі (7) історичним даним. Для цього розраховуємо рівень значущості рівняння регресії, отриманий на основі вибіркового коефіцієнта детермінації \hat{R}^2 , який вказує, наскільки залежна зміна (відгук) залежить від незалежної (регресора). Отримане значення порівнюємо з теоретичним квантилем розподілу Фішера заданого рівня достовірності α :

$$\frac{\hat{R}^2(N-2)}{1-\hat{R}^2} > f_{1, N-2, 1-\alpha}, \quad \text{тоді } F_k = 1. \quad (9)$$

У протилежному випадку $F_k = 0$.

Тест Стьюдента. Перевіряє гіпотезу про необхідність включення до регресійного рівняння (7) параметрів a_k та b_k . Для цього визначимо рівень значущості кожного параметра, який порівнюється з теоретичним квантилем розподілу Стьюдента заданого рівня достовірності α :

$$\left| \frac{\hat{a}_k \sqrt{N} S_x}{S_\xi} \right| > t_{N-2, 1-\alpha/2}, \quad \text{тоді } St_k^1 = 1, \quad \text{інакше } St_k^1 = 0,$$

$$\left| \frac{\hat{b}_k \sqrt{N} S_x}{S_\xi} \right| > t_{N-2, 1-\alpha/2}, \quad \text{тоді } St_k^2 = 1, \quad \text{інакше } St_k^2 = 0, \quad (10)$$

де S_x^2 — вибіркова дисперсія регресора t^{α_k} ; S_ξ^2 — вибіркова дисперсія залишків регресійного рівняння r_k .

Тест Дурбіна–Ватсона. Перевіряє гіпотезу про незалежність похибок. Для цього розраховуємо статистику Дурбіна–Ватсона:

$$DW = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} (r_k(j+1) - r_k(j))^2}{\sum_{j=1}^N r_k^2(j)}. \quad (11)$$

Ця величина набуває значень від 0 до 4. Якщо $DW \approx 2$, то залишки незалежні, якщо $DW < 2$, то $\text{Cov}(r_k(j), r_k(j+1)) > 0$, якщо $DW > 2$, то $\text{Cov}(r_k(j), r_k(j+1)) < 0$. Зауважимо, що якщо $\text{Cov}(r_j, r_{j+1}) \neq 0$, то залишки не є випадковим шумом, а, отже, містять залишкову корисну інформацію. Тест Дурбіна–Ватсона порівнює DW із табличними значеннями d_l та d_u . Якщо $DW < d_l$, то приймається гіпотеза про залежність залишків і $D_k = 0$. Якщо $DW > d_u$, то залишки незалежні та $D_k = 1$, в іншому випадку, коли $d_l < DW < d_u$, результат не визначений і $D_k = 0,5$.

Тест на основі метода складного ножа. Цей тест побудовано на ідеології методу складного ножа, за яким покроково відкидаються історичні дані із загального набору і будуються середньоквадратичні відхилення залишків, які порівнюють з деяким пороговим рівнем. Тест надає можливість знайти всі елементи, при відкиданні яких середньоквадратична похибка регресії більша за середньоквадратичну похибку регресії з усіма даними. Якщо є такі елементи, то значення тесту для даного регресійного рівняння дорівнює нулю: $J_k = 0$, інакше $J_k = 1$.

Кожен із описаних тестів перевіряє модель (7) на адекватність історичним даним досліджуваного часового ряду. За числовий критерій для визначення оптимального регресора оберемо зважене середнє за всіма значеннями тестів:

$$\text{criteria} = (g_1 F_k + g_2 \text{St}_k^1 + g_3 \text{St}_k^2 + g_4 D_k + g_5 J_k) / 5, \quad (12)$$

де, $g_i, i = 1, \dots, 5$ — деякі вагові коефіцієнти.

Вибір регресора здійснюється так: обираються регресійні рівняння, для яких значення criteria є максимальним. З цього набору рівнянь беремо те, в якому значення $|DW - 2|$ — мінімальне. Отримана регресійна модель є оптимальною з позицій визначеного критерію, а її залишки є найкращими щодо некорельованості.

Крок 4. Відповідно до «Кроку 3», була обрана оптимальна за критерієм (12) модель k_0 із регресорами, що належать до класу P_1 , та побудовані оцінки для її параметрів:

$$\hat{y}_{k_0}(t) = \hat{a}_{k_0} + \hat{b}_{k_0} t^{\alpha_{k_0}}, \quad t = 1, \dots, N, \quad t^{\alpha_{k_0}} \in P_1. \quad (13)$$

Залишки цієї регресії:

$$r_{k_0}(t) = y(t) - \hat{y}_{k_0}(t), \quad t = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Для оцінок параметрів регресії \hat{a}_k та \hat{b}_k використовувався метод найменших квадратів. Як відомо з регресійного аналізу, ці оцінки є ефективними за виконання умов L_2 — регресії [3]. Проте, практично може скластися так, що умова некорельованості залишків не виконується, і, відповідно, оцінки параметрів не є ефективними. Слід зауважити, що у виборі оптимальної регресії не відкидалась можливість, коли $D_{k_0} \neq 1$. Отже, можлива ситуація,

коли для обраної моделі залишки автокорельовані: $\text{Cогг}(r_{k_0}(t+1), r_{k_0}(t)) \neq 0$.
 Наразі в роботі запропоновано перейти до наступного кроку алгоритму.

Крок 5. Використаємо залишки (14) як залежні змінні у побудові нової регресійної моделі з регресорами класу P_2 . Слід зауважити, що за невиконання тесту Дурбіна–Ватсона можливі дві ситуації: $\text{Cогг}(r_{k_0}(t+1), r_{k_0}(t)) > 0$ та $\text{Cогг}(r_{k_0}(t+1), r_{k_0}(t)) < 0$, що еквівалентно $DW < 2$ та $DW > 2$. У першому випадку на практиці, зазвичай, роблять висновок про наявність циклічної складової. Доведемо наступне твердження:

Твердження 1. Розглянемо часовий ряд авторегресії 2-го порядку $\{x_j, j = 1, 2, \dots\}$, який задовольняє співвідношення:

$$x_{j+1} = q x_j - x_{j-1} + \varepsilon_{j+1}, \quad j = 2, 3, \dots, \quad 0 \leq q \leq 2, \quad (15)$$

ε_j — незалежні, однаково розподілені похибки із середнім 0.

Тоді автокореляція додатна $\text{Cогг}(x_{j+1}, x_j) \geq 0$.

Доведення. Очевидно, що $\bar{x} = 0$, оскільки в протилежному випадку $q = 2$. Розглянемо вибіркочну автокореляцію часового ряду $\{x(t), t = 1, 2, \dots\}$:

$$\begin{aligned} \hat{\text{Cогг}}(x_{j+1}, x_j) &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} x_{j+1} x_j}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N-1} (q x_j^2 - x_{j-1} x_j + \varepsilon_{j+1} x_j) + \frac{1}{N} x_2 x_1}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{N} q \sum_{j=2}^{N-1} x_j^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N-1} x_{j-1} x_j + \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{N-1} \varepsilon_{j+1} x_j + \frac{1}{N} x_2 x_1}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j^2}. \end{aligned}$$

Переходячи до межі при $N \rightarrow \infty$ та враховуючи той факт, що x_j та ε_j незалежні, отримаємо:

$$\text{Cогг}(x_{j+1}, x_j) = q - \text{Cогг}(x_{j+1}, x_j), \quad \text{тобто} \quad \text{Cогг}(x_{j+1}, x_j) = q/2 \geq 0.$$

Очевидно, що будь-який регресор з класу P_2 відповідає умові (15) із параметром $q = 2 \cos(\beta_k) \in (0, 2)$, $\beta_k \in (0, \pi/2)$.

Отже, коли $D_{k_0} = 0$, та $DW < 2$, спираючись на результати «Твердження 1», записуємо нову регресійну модель:

$$r_{k_0}(t) = u_p + v_p \sin(\beta_p t) + w_p \cos(\beta_p t) + \xi_t^p, \quad t = 1, \dots, N, \quad p \in \{1, \dots, K_2\}. \quad (16)$$

Вибір оптимального регресора та пошук оцінок параметрів регресійного рівняння (16) здійснюється аналогічно дослідженням регресійного рівняння (7) за «Кроками 2–3». Зауважимо, що за необхідності можна побудувати ще один клас регресорів P_3 та дослідити залишки оптимальної

регресійної моделі (16). Проте, з практичних міркувань та заради зменшення ймовірності перезгладження, в цій роботі пропонуємо обмежитись двома описаними класами (5) і (6).

При переході від регресійного рівняння (7) до (16) середньоквадратична похибка та автокореляція залишків не зростає. Доведено це у наступному твердженні.

Твердження 2. Розглянемо таку регресійну модель:

$$y(t) = a_1 + b_1 x(t) + \varepsilon(t), \quad r(t) = a_2 + b_2 z(t) + \eta(t), \quad t = 1, \dots, N. \quad (17)$$

де $\varepsilon(t)$ та $\eta(t)$ — випадкові похибки, що відповідають умовам L_2 — регресії; $x(t)$, $z(t)$ — регресори, до того, як $z(t+1) = qz(t) - z(t-1)$, $0 \leq q \leq 2$; $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ — залишки першого регресійного рівняння у застосуванні до нього МНК: $\hat{y}(t) = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 x(t)$, до того ж $\text{Cov}(\hat{r}(j+1), \hat{r}(j)) \geq 0$; $u(t) = r(t) - \hat{r}(t)$ — залишки другого регресійного рівняння при застосуванні до нього МНК: $\hat{r}(t) = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 z(t)$. Тоді:

1. $S_u^2 \leq S_r^2$,
2. $|\text{Cov}(u(t+1), u(t))| \leq \text{Cov}(r(t+1), r(t))$, за умови, що

$$\frac{\frac{q}{2} \text{Cov}(z(j), r(j))^2}{2 - \text{Cov}(z(j), r(j))^2} \leq \text{Cov}(r(j+1), r(j)) \leq \frac{q}{2}.$$

Доведення. Оскільки $\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r(j) = 0$ за побудовою, то легко показати, що $\bar{\hat{r}} = \bar{u} = 0$.

Відповідно до теорії регресійного аналізу, оцінки коефіцієнтів рівнянь (17) за МНК запишемо так:

$$\hat{a}_2 = \bar{r} - \hat{b}_2 \bar{z}, \quad \hat{b}_2 = \frac{\widehat{\text{Cov}}(r(t), z(t))}{S_z^2}.$$

1. Доведемо перше твердження:

$$\begin{aligned} S_u^2 &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u^2(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r^2(j) - 2 \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r(j) \hat{r}(j) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{r}^2(j), \\ \sum_{j=1}^N r(j) \hat{r}(j) &= \sum_{j=1}^N r(j) (\hat{a}_2 + \hat{b}_2 z(j)) = \hat{b}_2 \sum_{j=1}^N r(j) z(j) = \frac{N \widehat{\text{Cov}}(r(j), z(j))^2}{S_z^2}, \\ \sum_{j=1}^N \hat{r}^2(j) &= \hat{b}_2^2 \left(\sum_{j=1}^N z(j) \hat{a}_2 + \sum_{j=1}^N z^2(j) \hat{b}_2 \right) = \hat{b}_2^2 \left(- \sum_{j=1}^N z(j) \bar{z} + \sum_{j=1}^N z^2(j) \right) = \\ &= \hat{b}_2^2 N S_z^2 = \frac{N \widehat{\text{Cov}}(r(j), z(j))^2}{S_z^2} \end{aligned}$$

Тоді $S_u^2 = S_r^2 - \frac{\widehat{\text{Cov}}(r(j), z(j))^2}{S_z^2}$. Оскільки другий доданок завжди не-
додатний, то $S_u^2 \leq S_r^2$.

$$2. \widehat{\text{Cov}}(u(t+1), u(t)) = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} u(j+1)u(j)}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N u^2(j)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} u(j+1)u(j) &= \sum_{j=1}^{N-1} r(j+1)r(j) + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{r}(j+1)\hat{r}(j) - \\ &- \sum_{j=1}^{N-1} \hat{r}(j+1)r(j) - \sum_{j=1}^{N-1} r(j+1)\hat{r}(j), \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \hat{r}(j+1)r(j) = \sum_{j=1}^{N-1} \hat{b}_2(qz(j) - z(j-1))r(j)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} r(j+1)\hat{r}(j) = \sum_{j=1}^{N-1} r(j+1)\hat{b}_2 z(j).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \hat{r}(j+1)\hat{r}(j) &= \frac{N-1}{N} \hat{b}_2^2 \bar{z}^2 - \frac{1}{N} \hat{b}_2^2 \bar{z} \sum_{j=1}^{N-1} (qz(j) - z(j-1) + z(j)) + \\ &+ \frac{1}{N} \hat{b}_2^2 \sum_{j=1}^{N-1} (qz^2(j) - z(j-1)z(j)) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \hat{b}_2^2 \left(qS_z^2 - \widehat{\text{Cov}}(z(j-1), z(j)) \right). \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} z(j-1)r(j) \underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} z(j)r(j+1)$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} u(j+1)u(j) = \widehat{\text{Cov}}(r(j+1), r(j)) - \frac{\widehat{\text{Cov}}(z(j), r(j))^2 \widehat{\text{Cov}}(z(j-1), z(j))}{S_z^2} \underset{N \rightarrow \infty}{\approx}$$

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\approx} \widehat{\text{Cov}}(r(j+1), r(j)) - \frac{q \widehat{\text{Cov}}(z(j), r(j))^2}{2 S_z^2}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Cov}}(u(j+1), u(j)) &= \\ &= \frac{1}{S_r^2 \left(1 - \widehat{\text{Cov}}(r(j), z(j))^2 \right)} \left(\widehat{\text{Cov}}(r(j+1), r(j)) - \frac{q \widehat{\text{Cov}}(z(j), r(j))^2}{2 S_z^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^2\right)} \left(\widehat{\text{Corr}}(r(j+1), r(j)) - \frac{q}{2} \widehat{\text{Corr}}(z(j), r(j))^2 \right).$$

Оскільки $\widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^2 < 1$, то, базуючись на сумі нескінченної арифметичної прогресії, останній вираз можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Corr}}(u(j+1), u(j)) &= \left(\widehat{\text{Corr}}(r(j+1), r(j)) - \frac{q}{2} \widehat{\text{Corr}}(z(j), r(j))^2 \right) \times \\ &\times \left(1 + \widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^2 + \widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^4 + \dots \right) = \widehat{\text{Corr}}(r(j+1), r(j)) + \\ &+ \left(\widehat{\text{Corr}}(r(j+1), r(j)) - \frac{q}{2} \right) \times \left(\widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^2 + \widehat{\text{Corr}}(r(j), z(j))^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Отже, переходячи до межі $N \rightarrow \infty$, отримаємо $\text{Corr}(u(t+1), u(t)) \leq \leq \text{Corr}(r(t+1), r(t))$ за умови, що $\text{Corr}(r(j+1), r(j)) \leq \frac{q}{2}$.

Якщо $\text{Corr}(u(t+1), u(t)) < 0$, то $-\text{Corr}(u(t+1), u(t)) \leq \text{Corr}(r(t+1), r(t))$

виконується за умови, що $\text{Corr}(r(j+1), r(j)) \geq \frac{\frac{q}{2} \text{Corr}(z(j), r(j))^2}{2 - \text{Corr}(z(j), r(j))^2}$.

Зауважимо, що за «Твердженням 2-м», автокореляція залишків не зростає лише тоді, коли $\text{Corr}(r(j+1), r(j)) \leq \frac{q}{2}$. Оскільки перехід від регресійної моделі (7) до (16) відбувається лише у випадку, коли $D_{k_0} = 0$, тобто статистика Дурбіна–Ватсона (11): $DW < d_l$, то $\text{Corr}(r(j+1), r(j)) > 2 - d_l$. Таким чином, клас регресорів P_2 має бути звужений, виходячи з умови: $\frac{q}{2} > 2 - d_l$, що еквівалентно умові: $\text{Cos}(\beta_k) > 2 - d_l$. Друга умова незбільшення автокореляції залишків може бути перевірена за практичній реалізації алгоритму.

Крок 6. Кінцева модель, яка використовується у моделюванні прогнозних значень, визначається моделями (7) та (16) (звичайно у випадку, коли регресійна модель (16) будується). Функція прогнозування на s кроків вперед задається наступним чином:

$$\begin{aligned} \hat{y}(N+s) &= \hat{a}_{k_0} + \hat{b}_{k_0} (N+s)^{\alpha_{k_0}} + \hat{u}_{p_0} + \hat{v}_{p_0} \text{Sin}(\beta_{p_0} (N+s)) + \\ &+ \hat{w}_{p_0} \text{Cos}(\beta_{p_0} (N+s)), \end{aligned} \quad (18)$$

де $s=1, \dots, M$; M — необхідна кількість прогнозованих значень (за довгостроковому прогнозуванні $M > N/2$).

Окрім дослідження якості моделі, яка описує емпіричні дані, на практиці іноді корисно перевірити якість побудованого за цією моделлю прогнозу. Для цього розіб'ємо історичні дані на дві групи: $\{y(t), t = 1, \dots, N\}$ — навчаюча вибірка, тобто дані, за якими оцінюється модель, та $\{y(t), t = N + 1, \dots, N + M\}$ — тестова вибірка, тобто дані з якими буде порівнюватись прогноз $\{\hat{y}(t), t = N + 1, \dots, N + M\}$. У літературі запропоновані різні міри точності прогнозу [2]. Опишемо деякі із них:

відносна похибка прогнозу

$$RE(k) = \frac{y(k) - \hat{y}(k)}{y(k)} 100\%, \quad k = N + 1, \dots, N + M; \quad (19)$$

середньоквадратична похибка прогнозу

$$MSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^M (y(k + N) - \hat{y}(k + N))^2}{M}}; \quad (20)$$

середньоабсолютна процента похибка прогнозу

$$MAPE = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |RE(k + N)|; \quad (21)$$

коефіцієнт невідповідності (коефіцієнт Тейла)

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^M (y(k + N) - \hat{y}(k + N))^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^M y^2(k + N) + \sum_{k=1}^M \hat{y}^2(k + N)}}. \quad (22)$$

Крім точкового прогнозу, побудованого за допомогою функції прогнозування (18), на практиці іноді виникає потреба у побудові інтервальних прогнозів. Використовуючи моделі регресійного аналізу, задача обчислення (розробки) інтервальних прогнозів зводиться до пошуку довірчих інтервалів з їх подальшою екстраполяцією [4, 5]. Розглянемо дві методики побудови довірчих інтервалів із заданим рівнем достовірності α :

- для індивідуального значення:

$$\hat{y}(j) \pm t\left(N - 2, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) S_{\xi} \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(x(j) - \bar{x})^2}{NS_X^2}}, \quad (23)$$

де S^2 — вибіркова дисперсія залишків; S_X^2 — вибіркова дисперсія регресора; $t\left(N - 2, 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ — теоретичний квантіль рівня $1 - \frac{\alpha}{2}$ розподілу Стюдента з $n - 2$ ступенями вільності;

- для середнього значення:

$$\hat{y}(j) \pm t\left(N - 2, 1 - \frac{\alpha}{2}\right) S_{\xi} \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x(j) - \bar{x})^2}{NS_X^2}}. \quad (24)$$

КОРЕКЦІЯ ПРОГНОЗІВ ШЛЯХОМ ВИКОРИСТАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

У попередньому розділі було розроблено метод прогнозування часових рядів. Запропонована модель відповідає умові Б 3, проте не гарантує виконання інших умов. Для вирішення цієї проблеми пропонуємо використати методи лінійної оптимізації і здійснити корекцію побудованих прогнозів.

За приклад візьмемо перший часовий ряд першого рівня та відповідний набір часових рядів другого рівня: $y(t) = \sum_{j \in J} y_j(t)$, $t = 1, \dots, N$. Нехай, шляхом використання алгоритму з минулого пункту, для них були обрані оптимальні функції $\hat{f}, \hat{f}_j \in F$ та побудовані прогнози $\hat{y}(t) = \hat{f}(t)$, $\hat{y}_j(t) = \hat{f}_j(t)$, $t = N + 1, \dots, N + M$. Оскільки клас F не є замкненим щодо операції додавання, то умова Б 1 не виконується: $\hat{f}(t) \neq \sum_{j \in J} \hat{f}_j(t)$.

Додамо до прогнозів часових рядів деякі величини $x(t)$, $x_j(t)$, визначені умовою балансу Б 1:

$$\hat{f}(t) + x(t) = \sum_{j \in J} \hat{f}_j(t) + x_j(t). \quad (25)$$

Зауважимо, що при $t = 1, \dots, N$ за $x(t)$ та $x_j(t)$ можна взяти залишки регресійних рівнянь $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, $r_j(t) = y_j(t) - \hat{y}_j(t)$. При $t = N + 1, \dots, N + M$ величини $r_j(t)$, $j \in J_1$ невідомі, але їх можна визначити з тої самої умови, що і на історичному періоді часу. А саме: будемо вимагати, щоб для отриманих прогнозів часових рядів $\tilde{y}_j(t) = \hat{f}_j(t) + x_j(t)$ оцінки $\hat{f}_j(t)$ були оптимальними в середньоквадратичному сенсі. Таким чином, величини $x_j(t)$, $j \in J_1$ будемо шукати як значення, що мінімізують функціонали

$\frac{1}{M} \sum_{i=N+1}^{N+M} x_j^2(i) \rightarrow \min$. Зауважимо, що аналогічним чином можна отримати і величини $x(t)$, $t = N + 1, \dots, N + M$, додатково наклавши умову (25). Для простоти в даній роботі пропонується визначити відхилення для часового ряду першого рівня наступним чином: $x(t) = \sum_{j \in J} (\hat{f}_j(t) + x_j(t)) - \hat{f}(t)$, $t = N + 1, \dots, N + M$.

Виходячи із зазначених міркувань, запишемо цільову функцію:

$$\sum_{j \in J_1} \nu_j \sum_{t=N+1}^{N+M} x_j^2(t) + \lambda \sum_{j \in J_1} \sum_{t=N+2}^{N+M-1} |\tilde{y}_j''(t)| \rightarrow \min, \quad (26)$$

де $\tilde{y}_j''(t) = \tilde{y}_j(t-1) - 2\tilde{y}_j(t) + \tilde{y}_j(t+1)$ — скінченно-різницева друга похідна $\tilde{y}_j(t) = \hat{y}_j(t) + x_j(t)$ в момент часу t , ν_j — вага j -го часового ряду, λ — коефіцієнт штрафу гладкості.

Зауважимо, що друга похідна із деяким штрафом гладкості додається до цільової функції для виконання умови Б 5.

Запишемо обмеження:

1. Обмеження на неспадання, що постає з умови Б 4 (наступне значення прогнозу завжди не менше попереднього):

$$(\hat{y}_j(t+1) + x_j(t+1)) - (\hat{y}_j(t) + x_j(t)) \geq 0, \quad t = N+1, \dots, N+M, \quad j \in J_1.$$

2. Обмеження на неспадання щодо останнього історичного значення $y_j(N)$ (умова Б 4):

$$\hat{y}_j(N+1) + x_j(N+1) \geq y_j(N), \quad j \in J_1.$$

3. Обмеження балансу щодо часового ряду першого рівня:

$$-\Delta y^-(t) + \hat{y}(t) \leq \sum_{j \in J_1} (\hat{y}_j(t) + x_j(t)) \leq \hat{y}(t) + \Delta y^-(t), \quad t = N+1, \dots, N+M.$$

де $\Delta y^\pm(t) (\geq 0)$ — допустимі межі для виконання балансу.

4. Індивідуальні обмеження:

$$-\Delta_j^-(t) \leq x_j(t) \leq \Delta_j^+(t), \quad j \in J_1, \quad t = N+1, \dots, N+M,$$

де $\Delta_j^\pm(t) (\geq 0)$ — допустимі межі для прогнозів часових рядів другого рівня.

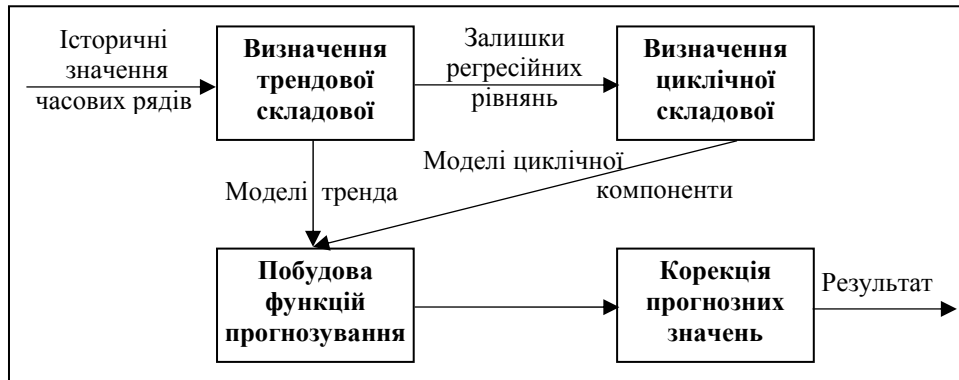


Рис. 1. Схема прогнозування часових рядів за розробленим алгоритмом

Сформульована задача (26) належить до задач лінійного програмування, і для її розв'язання у наш час розроблено багато різних алгоритмів. Наприклад — симплекс-метод.

Визначимо допустимі межі $\Delta y^\pm(t) (\geq 0)$ та $\Delta_j^\pm(t) (\geq 0)$ для зміни прогнозів першого та другого рівнів. Як допустимі межі відхилень можна запропонувати довірчі інтервали. Проте, на практиці може виникнути ситуація, коли названих меж недостатньо для задовільнення умови балансу. В

цьому випадку постає необхідність для їхнього розширення на мінімально можливу величину. В цій роботі запропоновано ітераційну процедуру для встановлення оптимальних меж. Вона полягає у збільшенні довірчих інтервалів з певним кроком до отримання сумісного розв'язку оптимізаційної задачі.

Використання оптимальної моделі дозволяє задовольняти індикативні умови, що накладаються на прогноз Б 6, наприклад, експертні висновки) через введення в цільову функцію оптимізаційної задачі умов із заданим коефіцієнту штрафу.

ДОВГОСТРОКОВИЙ ПРОГНОЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ. ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД.

Розглянемо приклад застосування наведеного в роботі методу прогнозування часових рядів (рис. 1). З цією метою представлено часові ряди, які відображають вимоги банків за кредитами, наданими суб'єктам господарювання за 2007 рік. Часовим рядом першого рівня є сумарні значення кредитів суб'єктів господарювання в Україні. Часовими рядами другого рівня — значення з 26 регіонів. Подібне розбиття часових рядів на групи природний, відповідно до умови А. Необхідно побудувати довгостроковий прогноз на 12 місяців наперед для 27-ми часових рядів, використовуючи історичні значення, зібрані за 12 місяців. Отримані результати порівняємо із фактичними значеннями за перші 4 місяці 2008 року. Зауважимо, що зараз доступні дані за весь 2008 рік, проте використовувати їх для аналізу якості прогнозів не бажано через економічну кризу в країні. Додамо, що поділ даних на навчальну та тестову вибірки було зроблено, зважаючи на економічні вимоги щодо подальшого застосування результатів у плануванні банківської діяльності, при якому за означений період береться увесь 2008 рік.

Побудуємо прогнози для часових рядів, використовуючи модель (7), для якої крок та кількість регресорів з класу P_1 (6): $h_1 = 0,1$ та $K_1 = 20$ відповідно. При застосуванні зваженого методу найменших квадратів (8) ваги підбиралися з практичних міркувань: $w_1 = 0,01$, $w_2 = 0,1$, $w_3 = 0,5$, $w_{11} = 2$, $w_{12} = 3$, інші рівні 1. Ваги для тестів при виборі оптимального регресора приймалися рівними: $g_4 = 2$, інші рівні 1.

Для прикладу наведено результати з моделювання прогнозів для 5-ти часових рядів: загальна сума по країні та значення в Луганській, Миколаївській, Донецькій та Волинській областях. Обрані за критерієм якості (12) оптимальні регресори з класу P_1 разом зі значеннями тестів Фішера (9), Стьюдента (10), Дурбіна–Ватсона, тесту на основі метода складного ножа та статистикою Дурбіна–Ватсона (11) наведені в табл. 1. Побудовані за обраними регресійними рівняннями прогнозні значення зіставлені з фактичними значеннями за допомогою характеристик якості (20)–(22). Результати відображені в табл. 1.

Таблиця 1. Результати з моделювання прогнозів

P	$x(t)$	Характеристики якості моделі							Характеристики якості прогнозу		
		F	St^1	St^2	St^3	D	J	DW	MSE	MAPE	U
Сумарні значення кредитів суб'єктів господарювання в Україні											
P_1	1,3	1	1	1		1	1	1,63	19395	4,22%	0,03
P_2											
Кінцевий прогноз									19686	4,31%	0,03
Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Луганській області											
P_1	1	1	1	1		1	1	1,38	139,99	2,97%	0,021
P_2											
Кінцевий прогноз									104,66	2,23%	0,016
Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Миколаївській області											
P_1	1,2	1	1	1		1	1	2,13	82,55	1,91%	0,014
P_2											
Кінцевий прогноз									53,29	1,28%	0,009
Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Донецькій області											
P_1	1,5	1	1	1		0,5	1	1,09	807,24	2,45%	0,022
P_2	$\pi/6$	1	1	1	0	0,5	1	1,11			
Кінцевий прогноз									1029,94	3,75%	0,028
Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Волинській області											
P_1	1,1	1	1	1		0,5	1	1,32	184,26	4,47%	0,032
P_2	$5\pi/24$	1	0	0	1	1	1	1,67			
Кінцевий прогноз									87,12	2,12%	0,015

Результати, отримані шляхом моделювання обраного регресійного рівняння, разом з довірчими інтервалами (23), (24) та історичними даними для часових рядів сумарного значення по усій країні та Волинській області, зокрема зображені на рис. 2, 3.

Зауважимо, що для Донецької та Волинської областей тест Дурбіна–Ватсона не дав чіткої відповіді і одержана статистика менша 2-х. У цих випадках робиться припущення щодо наявності циклічної складової і для залишків відповідних регресійних рівнянь складаються регресійні рівняння (16). При цьому для визначення класу P_2 параметри приймалися наступними (6): $h_2 = 1/2$, $K_2 = 12$. Ваги для методу найменших квадратів усі дорівнюють 1, а ваги тестів для вибору оптимальних регресорів такі самі, як і у випадку регресійних рівнянь (7).

Обрані за критерієм якості (11) оптимальні регресори з класу P_2 разом зі значеннями тестів та статистикою Дурбіна–Ватсона (11) наведені в табл. 1. Результати, отримані шляхом моделювання обраного регресійного рівняння разом з довірчими інтервалами (23), (24) та історичними даними для часового ряду кредитів суб'єктів господарювання в Волинській області

зображені на рис. 4. Слід зауважити, що автокореляція залишків при застосуванні регресорів із класу P_2 зменшилася.

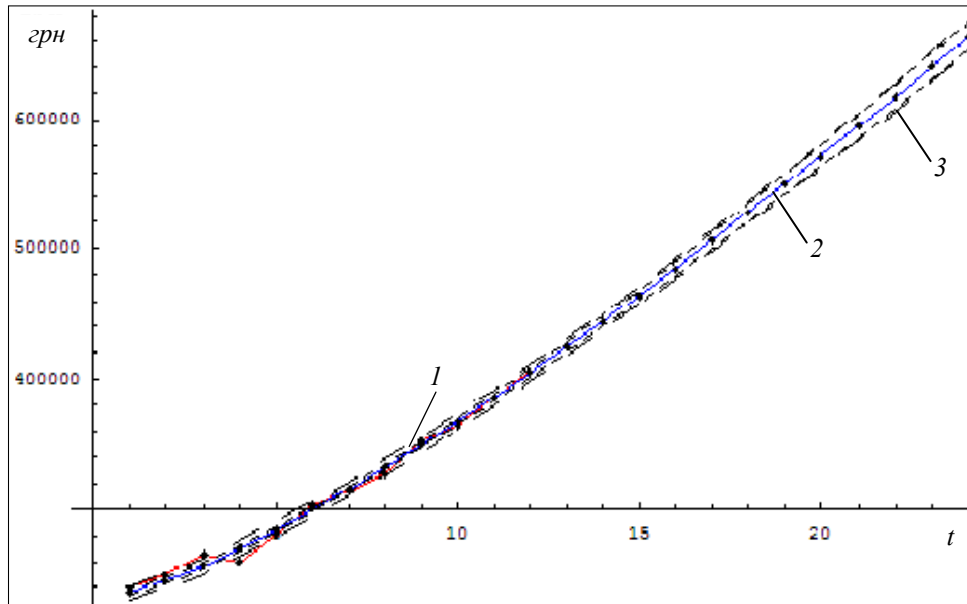


Рис. 2. Часовий ряд сумарних значень кредитів суб'єктів господарювання в Україні: 1 — історичні дані; 2 — змодельовані значення; 3 — довірчі інтервали

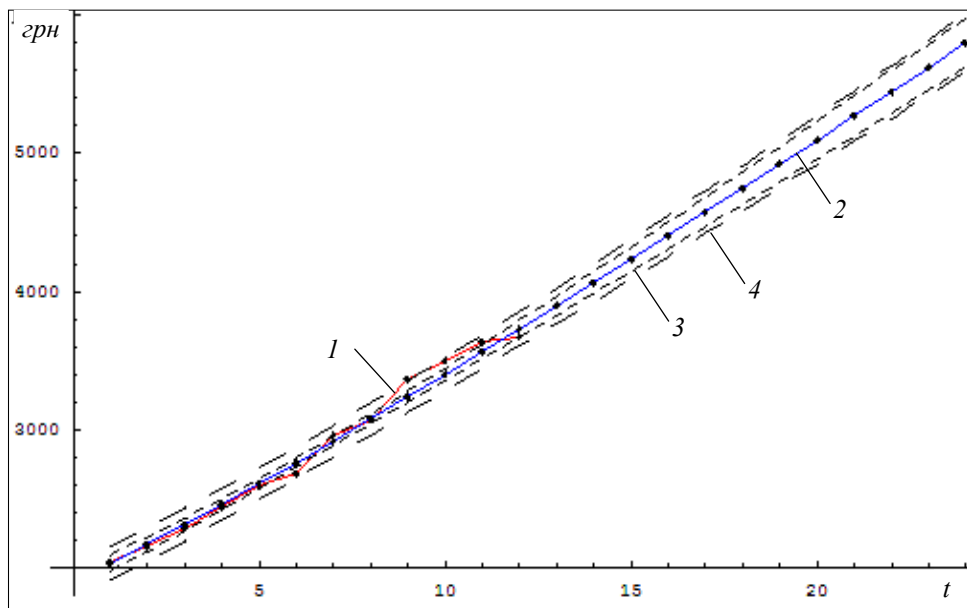


Рис. 3. Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання у Волинській області: 1 — історичні дані; 2 — змодельовані значення; 3, 4 — довірчі інтервали

Наголосимо, що для аналізу часового ряду кредитів у Волинській області подальші дослідження можна не проводити, адже автокореляція похибок за тестом Дурбіна–Ватсона достатньо мала ($D = 1$). Для Донецької області тест Дурбіна–Ватсона не дав бажаного результату і, загалом, є необхідність у побудові нової моделі із регресорами з певного класу P_3

для залишків регресійного рівняння (16). У цій роботі подібні дослідження не проводились, зважаючи на можливість ймовірного перезгладження моделі.

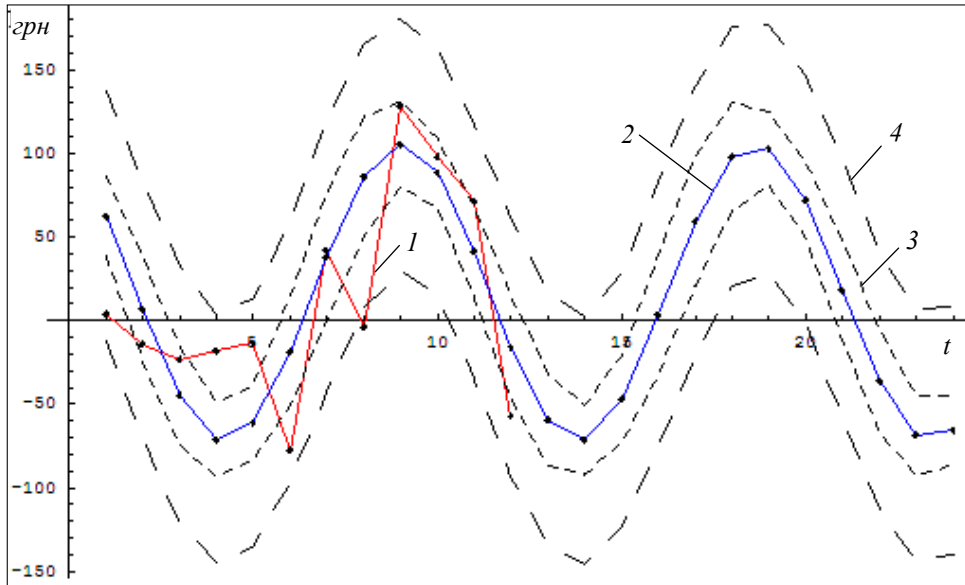


Рис. 4. Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Волинській області: 1 — залишки першого регресійного рівняння; 2 — змодельовані значення; 3, 4 — довірчі інтервали

Після отримання прогнозів за моделями (7) та (16) для всіх описаних вище 27-ми часових рядів, була розв'язана задача лінійної оптимізації (26). Кінцеві результати разом із історичними даними, фактичними даними за перші 4 місяці 2008 року, довірчими інтервалами (18), (19) та початковим прогнозом для Волинської області зображено на рис. 5.

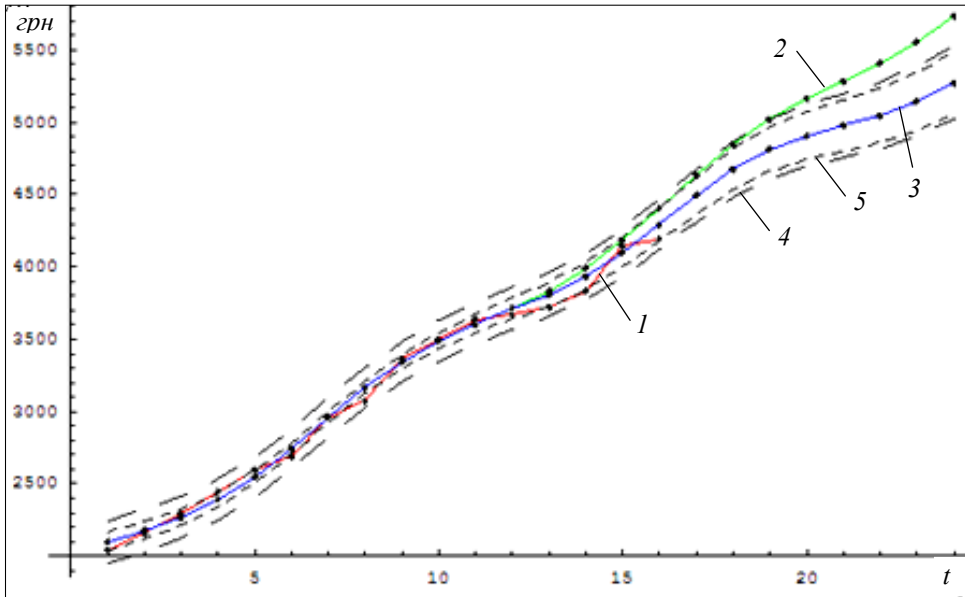


Рис. 5. Часовий ряд кредитів суб'єктів господарювання в Волинській області: 1 — історичні дані; 2 — початковий прогноз; 3 — кінцевий прогноз; 4, 5 — довірчі інтервали

Підсумкові прогнози для сумарного значення по країні та по чотирьом областях порівнювались із фактичними значення за допомогою характеристик якості (20)–(22). Результати наведені в табл. 1.

ВИСНОВКИ

Метою роботи є розробка методу прогнозування набору часових рядів зі специфічною структурою та деякими зовнішніми вимогами. Для вирішення проблеми було побудовано алгоритм послідовного знаходження лінійних регресійних рівнянь із різними наборами регресорів. Для аналізу фінансових часових рядів було запропоновано використати два класи регресорів, а саме: клас кривих зростання та клас циклічних перетворень часового індексу. Оцінки параметрів регресійних рівнянь будувались за допомогою зваженого методу найменших квадратів. Щоб обрати оптимальний регресор із відповідного класу, довелось розробити критерій якості, що базується на стандартних методах перевірки якості регресійного рівняння, зважаючи на її адекватність історичним даним. За перший набір регресорів брали криві зростання, що обумовлено специфікою довгострокового прогнозування. Рішення про необхідність побудови регресійних моделей для залишків першого регресійного рівняння ухвалювалося на основі тесту Дурбіна–Ватсона та знаку вибіркової автокореляції. Доведено, що при корельованості залишків із додатною автокореляцією можна використовувати регресори циклічного виду для покращення моделі з погляду зменшення вибіркової дисперсії похибок та статистики Дурбіна–Ватсона. Для виконання зовнішніх вимог щодо прогнозних значень була сформульована задача лінійної оптимізації.

Як приклад у роботі розглянуто прогнозування часових рядів, які відображають вимоги банків за кредитами, наданими суб'єктам господарювання за 2007 рік. Результати характерні для загального показника по усій країні та по 4-х областях: Луганська, Миколаївська, Донецька, Волинська. Для сумарного показника та двох областей — Луганської та Миколаївської — було розроблено модель, що базується на кривих росту. А на основі тесту Дурбіна–Ватсона зроблено висновок про недоцільність подальшого аналізу. Для двох інших областей — Донецької та Волинської, окрім кривих росту, було побудовано регресійну модель для залишків з циклічними регресорами. Прогнози для досліджуваних часових рядів отримані шляхом екстраполяції відповідних регресійних моделей на 12 місяців навперед (2008 рік). Корекція прогнозів, з метою задоволення поставлених вимог, проведена за допомогою розв'язання лінійної оптимізаційної задачі. Перші чотири значення остаточного прогнозу були порівняні з фактичним використанням трьох характеристик: середньоквадратичної похибки прогнозу, середньоабсолютної процентної похибки прогнозу, коефіцієнта невідповідності. Результати прогнозування наведено в графічному вигляді. Всі алгоритми були запрограмовані в пакеті Mathematica 5.2.

Кризисна ситуація в країні не дає змоги використовувати чисто статистичні методи для прогнозування економічних та фінансових часових рядів. Проте запропонований метод може враховувати ряд зовнішніх експертних вимог, і результати, отримані за його допомогою, можуть стати основою для подальшого планування діяльності фінансових інститутів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88–110.
2. Винн Р., Холден К. Введение в прикладной эконометрический анализ. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 294 с.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
4. Cook R., Weisberg S. Residuals and Influence in Regression. — N.Y.: Chapman and Hall, 1982. — 230 p.
5. Cryer J. D., Chan, K. Time Series Analysis With Applications in R. Second Edition. — N.Y.: Springer, 2008. — 491 p.
6. Palit A., Popovic D. Computational intelligence in time series forecasting: Theory and engineering applications. — London: Springer, 2005. — 372 p.
7. Rawlings J., Pantula S., Dickey D. Applied Regression Analysis. A Research Tool. Second Edition. — N.Y.: Springer Verlag, 1998. — 671 p.

Надійшла 15.12.2009