

## УПРАВЛЕНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ПОМОЩЬЮ ШУМА

М.О. СОПИН, Я.И. ВИКЛЮК

Рассмотрена динамическая система, моделирующая ход рекламной кампании в условиях случайным образом меняющихся факторов. Исследованы особенности адаптации системы к флуктуациям внешней среды. Дано объяснение эффекта стагнации системы как нахождения этой системы в области параметров управления, где существует индуцированная мультипликативным шумом бистабильность. Показано, что фактор неопределенности может быть использован заинтересованным лицом для достижения своей цели.

### ВВЕДЕНИЕ

Конкурентоспособность любого туристического агентства в условиях современных рыночных отношений в значительной степени определяется его рекламной деятельностью. Хорошо организованная реклама доносит до потребителей определенное коммерческое сообщение, которое активизирует потребительское поведение [1, 2]. Поэтому главный вопрос, который решает рекламодатель, — это такая организация рекламной кампании, при которой с минимальными затратами достигается максимально возможный результат. Однако вопрос этот рекламодателю приходится решать, как правило, в условиях *неопределенности*, что значительно усложняет задачу.

Неопределенность возникает вследствие *массовости* изучаемого явления или процесса [3], *чувствительности* по отношению к выбору начальных условий [4], *неточности* измерений [5], *нечеткости* планов, *лингвистической размытости* формулировок возникающих задач [6, 7] и т.д. Неопределенности присутствуют в исходных данных, ограничениях, динамике, целях и составляют шум, который принципиально неустраним. Традиционно считалось, что шум играет деструктивную роль, приводя лишь к «размытию» желаемого результата. При этом роль лица, принимающего решение (ЛПР), сводилась, в основном, к коррекции ожидаемого значения интересующей величины. Однако в последнее время в физико-технических науках обнаружены любопытные эффекты, свидетельствующие и о конструктивной роли шумов. Например, случайный шум может индуцировать новые режимы функционирования динамической системы, улучшать некоторые ее выходные характеристики [8–10].

Заметим, что обнаруженные эффекты могут быть интерпретированы в терминах теории управления как задачи с управляющей функцией, зависящей (случайным образом) от времени. Естественно возникают вопросы: имеют ли место подобные эффекты в социально-экономических системах и каковы их особенности. Очевидно, что знание подобных феноменов может помочь заинтересованному лицу разобраться в возникшей ситуации и при-

нять правильное решение. Кроме того, открываются новые возможности и для управления социально-экономическими системами.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть некоторое агентство начинает рекламировать новый товар или услугу. Воздействие на потенциального клиента осуществляется посредством экономического и коммуникативного механизмов. Тогда изменение относительного числа информированных клиентов, вовлеченных в кампанию на данный момент времени, можно записать так [11]:

$$dn = \alpha_1(1 - n)dt + \alpha_2 n(1 - n)dt, \quad (1)$$

где  $n$  — отношение числа информированных на данный момент времени покупателей к общему числу платежеспособных покупателей;  $t$  — время, прошедшее с начала рекламной кампании;  $\alpha_1 \in R_+^1$  — коэффициент затрат на рекламу;  $\alpha_2 \in R^1$  — коэффициент, характеризующий интенсивность вербальных контактов участвующих в кампании лиц.

Первое слагаемое в уравнении (1) учитывает экономический механизм влияния на аудиторию и описывает денежные и товарные потоки. Второе — учитывает коммуникативный механизм влияния и описывает информационные потоки, исходящие от рекламного предприятия и прочих заинтересованных лиц в адрес потенциальных потребителей. Механизм распространения информации основан на бинарной оппозиции: рекламодатель–клиент. Отрицательные значения  $\alpha_2$  отвечают за распространение, например, конкурентами информации, носящей негативный характер.

Естественные ограничения задачи приводят к тому, что фазовым пространством динамической системы (1) становится отрезок  $[0, 1]$ . Поведением изучаемого процесса управляет некоторая потенциальная функция, градиент от которой равен правой части (1). Нетрудно видеть, что данная динамическая система имеет две сингулярные точки:  $n_{\text{eq}}^{(1)} = 1$  и  $n_{\text{eq}}^{(2)} = -\alpha_1/\alpha_2$ . Первая точка является положением устойчивого равновесия при выполнении условия  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$  или при выполнении условия  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 < 0$ , но так, что  $|\alpha_2| < \alpha_1$ . Последнее объясняется тем, что распространение негативных, порочащих кампанию слухов не приводит к нежелательным для кампании последствиям до тех пор, пока уровень слухов не превысит некоторое критическое значение, определяемое уровнем денежных затрат на рекламу. Под нежелательными последствиями будем понимать уменьшение максимально возможного числа клиентов, пользующихся услугами кампании. Вторая точка становится положением устойчивого равновесия при выполнении условия  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 < 0$ , но так, что  $|\alpha_2| > \alpha_1$ . Понятно, превышение некоторого критического значения уровня негативных слухов приводит к уменьшению максимально возможного числа клиентов, желающих приобрести товар.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. УЧЕТ ФЛУКТУАЦИЙ ПАРАМЕТРОВ

Учет флуктуаций параметров (стихийная динамика рынка, человеческий фактор) приводит к замене управляющих параметров в уравнении (1) стационарными случайными независимыми процессами. В предположении быстрых флуктуаций (время корреляции много меньше наименьшего из характерных времен системы  $\tau_{\text{сорт}} \ll \min\{1/\alpha_1, 1/|\alpha_2|\}$ ) можно воспользоваться приближением белого шума. Исходя из дифференциального представления стохастического уравнения [12] рассмотрим два случая:

$$dn = f(n)dt + g_k(n)d_\nu w_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

где  $f(n) = (\alpha_1 + \alpha_2 n)(1 - n)$ , а индекс  $k$  указывает шумящий параметр, соответственно которому выбираются функции  $g_1(n) = 1 - n$  и  $g_2(n) = n(1 - n)$ ;  $w_k(t)$  — стандартные независимые винеровские процессы. Индекс  $\nu$  в (2) отвечает за выбор системы исчисления. Известно, что решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ) не является единственным — реализуется континуум решений, отличающихся одно от другого на величину некоторой добавки [9, 10]. Множество возможных исчислений также является континуальным, однако нет веских причин предпочитать одну интерпретацию другой. Отметим, что «грубость» СДУ относительно выбора системы исчисления является свойством желательным, но не необходимым [10]. Со стохастическим дифференциальным уравнением ассоциируется уравнение Фоккера-Планка (УФП) для плотности вероятности реализации значений стохастической переменной [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(n, t) = -\frac{\partial}{\partial n} [a_k(n, t)P(n, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} [b_k(n, t)P(n, t)], \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

где  $a_k(n) = f(n) + \nu D_k g_k(n) \frac{d}{dn} g_k(n)$  и  $b_k(n) = 2D_k g_k^2(n)$  соответственно коэффициенты дрейфа и диффузии, выбираемые согласно шумящему параметру.

При выполнении условия существования стационарного решения поток плотности вероятности принимает постоянное значение на всем пространстве состояний. Если имеет место принцип детального равновесия и поток плотности вероятности обращается в нуль, то система является равновесной и решение стационарного УФП записывается как  $P \propto \exp\{\Phi\}$ , где величина  $\Phi$  называется стохастическим потенциалом [10]. Стохастическому потенциалу ставится в соответствие некоторая функция, называемая эффективным (синергетическим) потенциалом, которая и управляет процессом. Эффективный и детерминистический потенциалы, вообще говоря, не совпадают. Соответственно, не совпадают и множества катастроф. Задача нами решалась в рамках исчисления Ито ( $\nu = 0$ ). Потенциальное представление найденных решений УФП позволило провести анализ особенностей системы в терминах элементарной теории катастроф с ограничением [13, 14]. Далее подробно опишем два случая.

### СЛУЧАЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ШУМА (ФЛУКТУАЦИИ РЫНКА)

Нерегулярная динамика рынка, случайные изменения курса валюты, колебания поставочных цен, перебои с ассортиментом приводят к тому, что управляющий параметр  $\alpha_1 = \langle \alpha_1 \rangle + \xi(t)$  становится случайной функцией времени. Здесь  $\langle \alpha_1 \rangle$  — среднее значение параметра, а  $\xi(t)$  — гауссов белый шум:  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и  $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D_1\delta(\tau)$ . Пользуясь представлением  $P \propto \exp\{\Phi(n; \langle \alpha_1 \rangle, \alpha_2, D_1)\}$  и полагая  $k=1$ , нетрудно получить стационарные решения уравнения (3) в явном виде. Аналитический вид решений показывает, что стохастический потенциал обладает скейлингом  $\Phi(n; \lambda \langle \alpha_1 \rangle, \lambda \alpha_2, \lambda D_1) = \Phi(n; \langle \alpha_1 \rangle, \alpha_2, D_1)$ , что позволяет понизить размерность пространства управления с трех измерений до двух. Тогда равновесное решение стационарного УФП принимает вид

$$P = Z^{-1} \exp\{-(1/D_1)U_{\text{eff}}(n; \beta_1, \beta_2)\},$$

где  $U_{\text{eff}}(n; \beta_1, \beta_2)$  — эффективный потенциал;  $\beta_1 = \langle \alpha_1 \rangle / D_1 \in R_+^1$  и  $\beta_2 = \alpha_2 / D_1 \in R^1$  — перенормированные управляющие параметры;  $Z$  — нормировочный множитель.

Специфическое поведение решений при различных значениях управляющих параметров позволяет разбить плоскость параметров управления на непересекающиеся области. Анализ показывает, что точка  $n=0$  является притягивающей достижимой границей для любых допустимых значений параметров, а точка  $n=1$  является притягивающей недостижимой границей при условии попадания в область «правильных управленческих решений». При попадании в область «неправильных управленческих решений» граница  $n=1$  становится отталкивающей. Область «правильных управленческих решений» определяется нами как  $M = \{(\beta_1, \beta_2) \in R_+^1 \times R^1 | \beta_1 + \beta_2 + 2 > 0\}$ .

На рис. 1 показана ситуация, когда ЛПР находится в области «правильных управленческих решений». Динамическая система находится в бесконечно глубокой потенциальной яме и блуждает в ней, подходя сколь угодно близко к правой границе. В этой ситуации прогноз для рекламного агентства благоприятен — можно ожидать, что практически 100% потенциальных клиентов будут охвачены кампанией.

Ситуация, когда рекламодатель находится в области «неправильных управленческих решений»  $\bar{M}$  изображена на рис. 2. В этом случае в рекламе преобладают негативные тенденции, что связано или с недостаточным финансированием кампании или с неэффективной пропагандой товара. При малых значениях интенсивности флуктуаций система блуждает около детерминированного состояния  $n_{\text{det}} = 0,40$ . Рост шума приводит к смещению дна потенциальной ямы в направлении правой границы. Это означает, что наиболее вероятное состояние «плывет» в направлении точки  $n=1$ . Однако правая граница при этом остается отталкивающей. При критическом значении интенсивности шума  $D_1^{(\text{cr})} = (-1/2)(\langle \alpha_1 \rangle + \alpha_2)$  происходит катастро-

фическое изменение характера границы и система «сваливается» в бесконечно глубокую потенциальную яму.

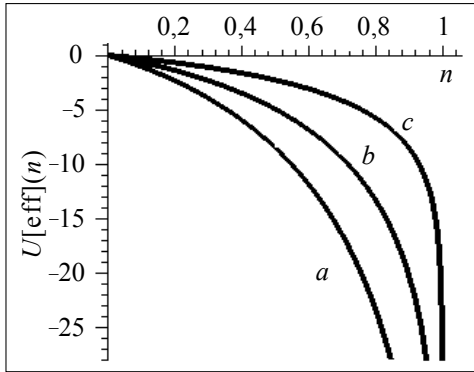


Рис. 1. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\langle \alpha_1 \rangle = 0,75$ ;  $\alpha_2 = 1,00$  для различной интенсивности шума:  $D_1 = 0,10$  (a);  $D_1 = 0,20$  (b);  $D_1 = 0,80$  (c)

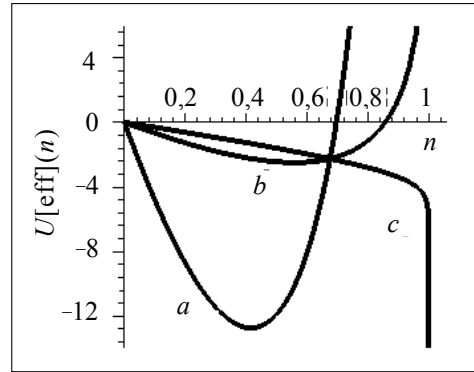


Рис. 2. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\langle \alpha_1 \rangle = 1,00$ ;  $\alpha_2 = -2,50$  для различной интенсивности шума:  $D_1 = 0,02$  (a);  $D_1 = 0,20$  (b);  $D_1 = 0,80$  (c)

Любопытно, что рост флуктуаций (в изначально неблагоприятной для ЛПР обстановке) приводит к смещению равновесного состояния в сторону желаемого. Можно сказать, что флуктуации рынка перебрасывают ЛПР из области «неправильных управленческих решений» в область «правильных управленческих решений». Разумеется, перейти в нужную область пространства управления можно и путем увеличения финансирования кампании или усилением (позитивной) пропаганды товара. Отметим, что выбор затравочного детерминистического состояния (т.е. состояния, которое реализовалось бы в отсутствие шума при тех же значениях параметров) не оказывает влияния на динамику перехода.

### СЛУЧАЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ШУМА (ФЛУКТУАЦИИ В КОММУНИКАТИВНОМ КАНАЛЕ)

Правильное восприятие информации потенциальными клиентами может быть затруднено различными помехами, называемыми информационным шумом. К информационному шуму следует отнести нерегулярные колебания числа вербальных контактов с клиентами, дезинформацию и распространение конкурентами негативных слухов. Тогда управляющий параметр  $\alpha_2 = \langle \alpha_2 \rangle + \zeta(t)$  следует рассматривать как случайную функцию времени. Здесь  $\langle \alpha_2 \rangle$  — среднее значение параметра,  $\zeta(t)$  — гауссов белый шум:  $\langle \zeta(t) \rangle = 0$  и  $\langle \zeta(t)\zeta(t + \tau) \rangle = 2D_2\delta(\tau)$ .

Пользуясь потенциальным представлением  $P \propto \exp\{\Phi(n; \alpha_1, \langle \alpha_2 \rangle, D_2)\}$  и полагая  $k = 2$ , нетрудно получить стационарные решения уравнения (3) в явном виде. Полученное решение показывает, что стохастический потенциал обладает скейлингом  $\Phi(n; \lambda\alpha_1, \lambda\langle \alpha_2 \rangle, \lambda D_2) = \Phi(n; \alpha_1, \langle \alpha_2 \rangle, D_2)$ , и это позволяет понизить размерность пространства

управления с трех измерений до двух. Равновесное решение стационарного УФП принимает вид

$$P = Z^{-1} \exp \{-(1/D_2)U_{\text{eff}}(n; \gamma_1, \gamma_2)\},$$

где  $U_{\text{eff}}(n; \gamma_1, \gamma_2)$  — эффективный потенциал;  $\gamma_1 = \alpha_1/D_2 \in R_+^1$  и  $\gamma_2 = \langle \alpha_2 \rangle / D_2 \in R^1$  — новые значения управляющих параметров;  $Z$  — нормировочный коэффициент.

В зависимости от значений управляющих параметров полученные решения могут вести себя довольно нетривиальным образом. Чтобы показать это, введем множества  $M_1 = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in R_+^1 \times R^1 \mid \gamma_1 + \gamma_2 + 2 > 0\}$  и  $M_2 = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in R_+^1 \times R^1 \mid (\gamma_2 - 2)^2 - 16\gamma_1 > 0, -6 < \gamma_2 < 2\}$ . Тогда область «неправильных управленческих решений» определяется нами как  $\overline{M_1}$ , область «нерекомендуемых управленческих решений» —  $M_1 \cap M_2$ , а область «правильных управленческих решений» —  $\overline{(M_1 \cap M_2) \cup M_1}$ . Точка  $n = 0$  является отталкивающей границей для любых допускаемых значений параметров, а точка  $n = 1$  — притягивающей недостижимой границей при условии, что ЛПР находится либо в области «правильных управленческих решений», либо в области «нерекомендуемых управленческих решений». При попадании в область «неправильных управленческих решений» граница  $n = 1$  становится отталкивающей.

Поясним ситуацию, рассмотрев полученные решения. На рис. 3 показан случай, когда ЛПР находится в области «неправильных управленческих решений», причем затравочное детерминистическое состояние ( $n_{\text{det}} = 0,66$ ) располагается ближе к правой границе, чем к левой. Рост шума приводит к смещению дна потенциальной ямы вправо, т.е. наиболее вероятное число клиентов, охваченных кампанией, увеличивается. При некотором критическом значении интенсивности шума характер границы катастрофически меняется и система «сваливается» в бесконечно глубокую потенциальную яму. Как и в предыдущем случае, флуктуации перебрасывают систему в область «правильных управленческих решений». Находясь в этой области, следует ожидать, что практически 100% клиентов воспользуются услугами агентства.

Однако дальнейший рост флуктуаций приводит к тому, что эффективный потенциал становится двукимным (рис. 4), что соответствует бимодальному распределению плотности вероятностей. Система перебрасывается в область «нерекомендуемых управленческих решений». Здесь система имеет два равновесных состояния. Причем, второе, индуцированное шумом, находится ближе к левой границе и с ростом интенсивности шума притягивается к ней. Глубина потенциальной ямы при этом увеличивается. В области «нерекомендуемых управленческих решений» следует ожидать, что на протяжении какого-то времени число клиентов, охваченных кампанией, будет близким к нулю, но, в конце концов, флуктуации выбросят систему из потенциальной ямы синергетического потенциала в сторону притягивающей

правой границы. Время нахождения в потенциальной яме определяется ее глубиной. В этой ситуации рекомендуется переждать неблагоприятный период и подождать, пока флуктуации не перебросят систему в нужную область. Разумеется, перевести систему в область «рекомендуемых управленческих решений» можно и волевым усилием, увеличив финансирование кампании или усилив пропаганду товара.

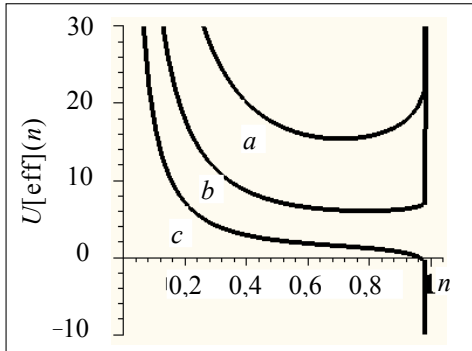


Рис. 3. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\alpha_1 = 0,10$ ;  $\langle \alpha_2 \rangle = -0,15$  для различной интенсивности шума:  $D_2 = 0,01$  (a);  $D_2 = 0,02$  (b);  $D_2 = 0,04$  (c)

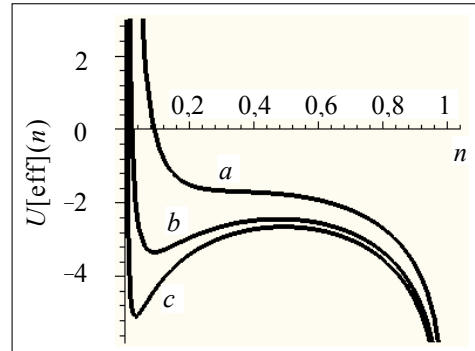


Рис. 4. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\alpha_1 = 0,10$ ;  $\langle \alpha_2 \rangle = -0,15$  для различной интенсивности шума:  $D_2 = 0,2$  (a);  $D_2 = 0,6$  (b);  $D_2 = 1,6$  (c)

Немного иначе обстоит дело, когда затравочное детерминистическое состояние ( $n_{det} = 0,40$ ) располагается ближе к левой границе, чем к правой (рис. 5). В этом случае шум индуцирует равновесное состояние, находящееся по левую сторону от затравочного детерминистического состояния, которое с ростом интенсивности флуктуаций перемещается в направлении левой границы. Далее характер правой границы резко меняется и рождается новое равновесное состояние вблизи правой границы (рис. 5, 6). Критические значения интенсивностей шума, при которых происходят переходы из одной области в другую, лежат на границе соответствующих переходов областей.

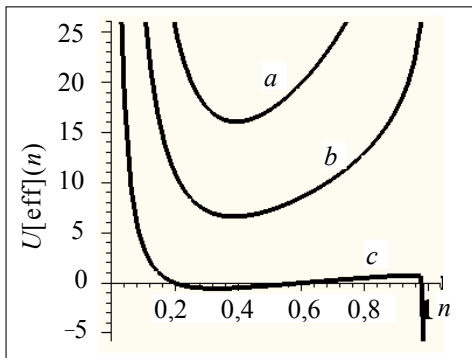


Рис. 5. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\alpha_1 = 1,00$ ;  $\langle \alpha_2 \rangle = -2,50$  для различной интенсивности шума:  $D_2 = 0,10$  (a);  $D_2 = 0,20$  (b);  $D_2 = 0,80$  (c)

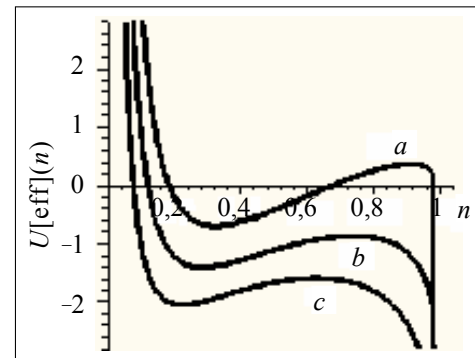


Рис. 6. Эффективный управляющий потенциал, построенный при значениях параметров  $\alpha_1 = 1,00$ ;  $\langle \alpha_2 \rangle = -2,50$  для различной интенсивности шума:  $D_2 = 0,85$  (a);  $D_2 = 1,20$  (b);  $D_2 = 1,80$  (c)

Итак, переходы из одной области пространства управления в другую можно осуществлять не только увеличением финансирования кампании или усилением пропаганды товара, но и распространением слухов, носящих негативный характер о предоставляемых рекламным агентством услугах. Нужно только помнить, что нахождение в области «нерекомендуемых управленческих решений» приводит к некоторой стагнации. Очевидно, на время стагнации желательно прекратить финансирование кампании или, как и в предыдущем случае, волевым усилием перевести систему в нужную область пространства управления. Отметим, что выбор затравочного детерминистического состояния определяет динамику переходов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в задачах управления социально-экономическими системами фактор неопределенности может быть использован заинтересованным лицом для достижения своей цели.

Найдено разбиение пространства управления на области, отвечающие различным режимам поведения системы.

Доказано, что динамика системы в условиях статистической неопределенности определяется затравочным детерминистическим состоянием.

Дано объяснение эффекта стагнации рассмотренной динамической системы как нахождения этой системы в области параметров управления, где существует индуцированная мультипликативным шумом бистабильность.

Поскольку экономический эффект рекламной кампании непосредственно определяется числом клиентов, которые воспользовались услугами рекламного агентства, полученные в данной работе результаты могут быть использованы для выработки соответствующих стратегий поведения рекламодателя. Например, интенсивность общения участвующих в кампании лиц, определяемая числом вербальных контактов в единицу времени, может быть усилена путем организации презентаций, различного рода акций и т.д. Аналогичным образом можно формировать общественное мнение. С точки зрения материальной экономии, как уже упоминалось, на время нахождения динамической системы в нежелательной области пространства параметров управления финансирование кампании можно приостановить.

Заметим, что подобного рода синергетические модели позволяют объяснить парадоксальные, на первый взгляд, случаи, когда рекламные ролики конкурентов не только не мешают проводимой рекламе, а помогают ей, или, когда черный PR приводит к росту популярности (например, не пользующийся спросом товар вдруг начинает раскупаться).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акофф Р. Искусство решения проблем. — М.: Мир, 1982. — 224 с.
2. Уэллс У., Бернет Дж., Мориарти С. Реклама: принципы и практика. — СПб.: Питер, 1999. — 736 с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Высш. шк., 2001. — 575 с.



4. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. — Cambridge University Press, 1993. — 385 p.
5. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок. — М.: Мир, 1985. — 272 с.
6. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования. — М.: Бином, 2005. — 416 с.
7. Нечеткие множества и теория возможностей / Под ред. Р.Р. Ягера. — М.: Радио и связь, 1986. — 408 с.
8. *Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер // Успехи физических наук. — 1999. — 169, № 1. — С. 7–38.*
9. *Олемской А.И.* Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // Успехи физических наук. — 1998. — 168, № 3. — С. 287–321.
10. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. — М.: Мир, 1987. — 400 с.
11. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — М.: Наука. Физматлит, 1997. — 320 с.
12. *Risken H.* The Fokker-Planck Equation. — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. — 474 p.
13. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн.1. — М.: Мир, 1984. — 350 с.
14. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн.2. — М.: Мир, 1984. — 285 с.

*Поступила 5.02.2008*