

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ УСЛОВНЫХ
ДИСПЕРСИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ
С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ
АДАПТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ GARCH**

В.Д. РОМАНЕНКО, Ю.Л. МИЛЯВСКИЙ

Рассмотрен метод синтеза моделей GARCH для прогнозирования максимальных условных дисперсий многомерных гетероскедастических процессов при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат — с большими. Динамика процессов в стохастической среде описана матрично-полиномиальными моделями авторегрессии и скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией. Адаптивная настройка коэффициентов моделей GARCH выполнена на основе рекуррентного метода наименьших квадратов. Приведены результаты экспериментальных исследований адаптивной настройки и прогнозирования максимальных условных дисперсий при оптимальных коэффициентах.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] рассмотрены нелинейные стохастические условно-гаусовские модели для описания динамики изменения дисперсий гетероскедастических процессов в дискретном времени с однотемповой дискретизацией входных возмущений и выходных координат. Недостаток этих моделей заключается в том, что они дают возможность прогнозировать условную дисперсию выходной координаты с приемлемой точностью только на один базовый период квантования T_0 при ограниченной минимальной выборке координат.

В [4] описаны теоретические положения проектирования разнотемповых дискретных систем прогнозирования максимальных условных дисперсий выходных координат одномерных и многомерных процессов на основе модели ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат — с большими. Эти модели дают возможность прогнозировать максимальную выборочную условную дисперсию на большой период квантования h . Однако модель ARCH показывает низкую точность прогнозирования при воздействии возмущений типа белого шума с некоррелированными дискретными отсчетами.

В [5] предложена методика перехода от модели ARCH к модели GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) для одномерных процессов ARMA с разнотемповой дискретизацией. При этом на базе минимальной выборки на основе GARCH прогнозировалась условная дисперсия, которая не может характеризовать максимальные условные дисперсии на определенном интервале развития процесса. Описан также алгоритм адаптивной настройки коэффициентов половины модели GARCH, которые характеризуют только скользящее среднее данной модели.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Первая задача данного исследования — разработка метода прогнозирования максимальных выборочных условных дисперсий многомерных гетероскедастических процессов при переменных выборках с дискретизацией выходных координат $y_i(r_i h_i)$ с увеличенными периодами квантования $h_i = m_i T_0$, а входных координат $\xi_i(kT_0)$ — с малым базовым периодом квантования T_0 . При этом предполагается вычислять и прогнозировать на базе моделей GARCH по рекуррентной процедуре не условные дисперсии с минимальной ограниченной выборкой, а максимальные условные дисперсии на некоторых интервалах дискретного времени, так называемых «окнах», величина которых при вычислении максимальных условных дисперсий изменяется от h_i до $P_{i_{\max}} h_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Наибольшую величину «окна» целесообразно выбирать равной наибольшей постоянной времени процесса по данному каналу $P_{i_{\max}} h_i = T_{i_{\text{пост}}}$.

Вторая задача — разработка процедуры адаптивной настройки коэффициентов модели GARCH для достижения оптимальной точности прогнозирования максимальной условной дисперсии.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ УСЛОВНЫХ ДИСПЕРСИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ARCH

Многомерная модель ARMA с разнотемповой дискретизацией представлена в виде [4]

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{22}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

При этом соотношение периодов квантования для дискретных отсчетов выходных координат

$$h_i = m_i T_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где m_i — целое число, большее единицы.

Тогда соотношение операторов обратного сдвига будет

$$z_i^{-1} = z^{-m_i}, \quad (3)$$

где z^{-1} — оператор обратного сдвига на один период квантования T_0 ; z_i^{-1} — оператор обратного сдвига на один период h_i . Структура полиномов в модели (1) имеет вид

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_i^{-1} + a_{2_i} z_i^{-2}, \quad (4)$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1_{ij}} z^{-1} + \dots + c_{2_{m_{ij}}} z^{-2m_{ij}}, \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$. При этом a_{0_i} — смещение i -й выходной координаты, равное $A_{ii}(1)y_{i_{cp}}$. Разнотемповую модель (1) можно представить в разностной форме для каждой выходной координаты.

$$\begin{aligned} y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= -a_{1_i} y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right] h_i - a_{2_i} y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right] h_i + \\ &+ \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1_{i_1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + c_{2_{m_{i_1}}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] + \\ &+ \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + c_{m_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c_{2_{m_{i_2}}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] + \dots + \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c_{m_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c_{2_{m_{i_n}}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] + a_{0_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Алгоритм прогнозирования максимальной выборочной условной дисперсии многомерного процесса для последовательности $\left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}$ выполняется на основе следующей рекуррентной процедуры.

1. Определение выборочного условного математического ожидания выходной координаты y_i на протяжении «окна» $p_i h_i$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p_i} \sum_{j_i=\left[\frac{k}{m_i}\right]-p_i+1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} M_{j_i-1} \{y_i(j_i h)\} &= \frac{1}{p_i} \left\{ -a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - \right. \\
 &- a_{2_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c_{2m_{ij}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] + c_{m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c_{2m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c_{2m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - 2m_i T_0 \right] - \dots - a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] - \\
 &- a_{2_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i - 1 \right) h_i \right] + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c_{2m_{i1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - 2m_i T_0 \right] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] - \right. \\
 &\left. - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots + c_{2m_{in}} \xi_n \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - 2m_i T_0 \right] + p_i a_{0_i} \left. \right\}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

2. Вычисление выборочной условной дисперсии на интервале $p_i h_i$ для последовательности $\left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}$.

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} &= \\
 &= \frac{1}{p_i} \sum_{j_i=\left[\frac{k}{m_i}\right]-p_i+1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} \left\{ y(j_i h_i) - \frac{1}{p_i} \sum_{j_i=\left[\frac{k}{m_i}\right]-p_i+1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} M_{j_i-1} \{y_i(j_i h_i)\} \right\}^2, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

3. Определение максимального значения выборочной условной дисперсии при изменении p_i в интервале $1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}$ на основе выражений (7), (8).

$$\sup_{1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots \right\}$$

$$\dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \Big\} = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right], \quad (9)$$

где $p_{i_{\max}}$ устанавливается на основе $p_{i_{\max}} h_i = T_{i_{\text{пост}}}$. При этом $T_{i_{\text{пост}}}$ — постоянная времени, которая характеризует инерционность координаты y_i .

4. Вычисление ряда максимальных выборочных условных дисперсий при $i = 1, 2, \dots, n$ на основе выражений

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] = \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var} \left\{ y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\},$$

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right) h_i \right] = \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var} \left\{ y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right) h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - 1 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - p_i \right) h_i \right] \right\}.$$

5. Построение математической модели ARCH динамики максимальных выборочных условных дисперсий для каждой координаты y_i на основе данных вычисленных рядов путем применения метода наименьших квадратов (МНК) в виде модели авторегрессии

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \hat{\alpha}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + \hat{\alpha}_{\mu_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right) h_i \right] + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \hat{\gamma}_i, \quad (10)$$

где $w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ — процесс дискретного белого шума с нулевым средним.

Уравнение (10) представляет авторегрессионную условно гетероскедастическую модель ARCH, на основе которой выполняется прогнозирование максимальной выборочной условной дисперсии (9) на один большой период квантования $h_i = m_i T_0$.

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] + 1 \right) h_i \right] = \hat{\alpha}_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \hat{\alpha}_{2_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + \hat{\alpha}_{\mu_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i + 1 \right) h_i \right] + \hat{\gamma}_i. \quad (11)$$

Цель данной статьи — на основе модели ARCH (10) разработать обобщенную авторегрессионную условно гетероскедастическую модель GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) с большим периодом квантования $h_i = m_i T_0$ для описания динамики изменяющейся условной дисперсии по i -му каналу и исследовать вопросы достижения максимальной точности прогнозирования.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ GARCH ПРИ ПЕРИОДЕ КВАНТОВАНИЯ

$$h_i = m_i T_0$$

Введем новые переменные.

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^{\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i} = \sqrt{H_{i_{\max}} \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i} v_i \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i, \quad (12)$$

где $v_i \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i$ — нормальная последовательность с нулевым средним и единичной дисперсией

$$M \left\{ v_i \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right\} = 0, \quad M \left\{ v_i^2 \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right\} = 1.$$

На основе (12) для максимальной выборочной условной дисперсии можно записать

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 = H_{i_{\max}} \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i v_i^2 \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i. \quad (13)$$

Если предположить, что

$$\begin{aligned} H_{i_{\max}} \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i &= \gamma_i + \alpha_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\frac{k}{m_i} \right) - 1 \right] h_i + \dots \\ &\dots + \alpha_{\mu_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\frac{k}{m_i} \right) - \mu_i \right] h_i, \end{aligned} \quad (14)$$

то, согласно выражению (12),

$$\begin{aligned} M_{\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1} \left\{ \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right\} &= \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\frac{k}{m_i} \right) - 1 \right] h_i, \\ \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\frac{k}{m_i} \right) - 2 \right] h_i, \dots \right\} &= \gamma_i + \alpha_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\frac{k}{m_i} \right) - 1 \right] h_i + \dots \end{aligned}$$

$$\dots + \alpha_{\mu_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right] h_i \Big].$$

Если подставить (13), (14) в выражение (10), получим

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] v_i^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \\ &= H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, $H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ представляет собой линейную проек-

цию максимального значения квадрата ошибки $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ и является прогнозом для максимальной условной дисперсии $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$.

Учитывая представление (13), инновацию $w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ в уравнении авторегрессии (10) можно записать так:

$$w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \left\{ v_i^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - 1 \right\}. \tag{16}$$

В то время как безусловная дисперсия $w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ является постоянной, условная дисперсия согласно (16) со временем изменяется. Запишем формулу (14) следующим образом:

$$H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \gamma_i + (\alpha_{1_i} z_i^{-1} + \alpha_{2_i} z_i^{-2} + \dots + \alpha_{\mu_i} z_i^{-\mu_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right], \tag{17}$$

где z_i^{-1} — оператор обратного сдвига на период квантования $h_i = m_i T_0$. Представим полином $(\alpha_{1_i} z_i^{-1} + \alpha_{2_i} z_i^{-2} + \dots + \alpha_{\mu_i} z_i^{-\mu_i})$ в виде отношения

$$(\alpha_{1_i} z_i^{-1} + \alpha_{2_i} z_i^{-2} + \dots + \alpha_{\mu_i} z_i^{-\mu_i}) = \frac{(r_{1_i} z_i^{-1} + r_{2_i} z_i^{-2} + \dots + r_{\mu_i+n_i} z_i^{-(\mu_i+n_i)})}{(1 - \sigma_{1_i} z_i^{-1} - \sigma_{2_i} z_i^{-2} - \dots - \sigma_{n_i} z_i^{-n_i})}. \tag{18}$$

При этом корни уравнения $(1 - \sigma_{1_i} z_i^{-1} - \sigma_{2_i} z_i^{-2} - \dots - \sigma_{n_i} z_i^{-n_i}) = 0$ должны находиться в середине круга единичного радиуса. Применяя выражение(18), можно представить равенство (17) в виде конечно-разностного уравнения

$$\begin{aligned}
 H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= \lambda_i + \sigma_{1_i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \\
 &+ \sigma_{2_i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + \sigma_{n_i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \\
 &+ r_{1_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + r_{2_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots \\
 &\dots + r_{\mu_i + n_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right], \tag{19}
 \end{aligned}$$

где $\lambda_i = (1 - \sigma_{1_i} - \sigma_{2_i} - \dots - \sigma_{n_i}) \gamma_i$.

Прибавим к обеим частям равенства (19) $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ и выполним преобразование полученного выражения с учетом (15).

$$\begin{aligned}
 H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= \lambda_i - \sigma_{1_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \right. \right. \\
 &\left. \left. - 1 \right) h_i \right] - \sigma_{2_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] - \dots - \sigma_{n_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \\
 &+ (\sigma_{1_i} + r_{1_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + (\sigma_{2_i} + r_{2_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots \\
 &\dots + (\sigma_{n_i} + r_{n_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + r_{n_i+1} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i - 1 \right) h_i \right] + \dots \\
 &\dots + r_{\mu_i + n_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right] + \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right].
 \end{aligned}$$

При $H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ преобразуем предыдущее выражение к виду

$$\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \lambda_i + (\sigma_{1_i} + r_{1_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + (\sigma_{2_i} + r_{2_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + (\sigma_{n_i} + r_{n_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \\
 & + r_{n_{i+1}} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i - 1 \right) h_i \right] + \dots + r_{\mu_i + n_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right] + \\
 & + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \sigma_{1_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - \dots - \sigma_{n_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right], \quad (20)
 \end{aligned}$$

где возмущения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] & = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \\
 \dots & \dots \\
 w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] & = \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right].
 \end{aligned}$$

Выражение (20) представляет модель GARCH для i -го канала многомерного процесса при периоде квантования $h_i = m_i T_0$, в которой учитывается динамика изменения четвертого момента $(1 - \sigma_{1_i} z_i^{-1} - \sigma_{2_i} z_i^{-2} - \dots - \sigma_{n_i} z_i^{-n_i}) w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ в модели изменения максимальной выборочной условной дисперсии $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$.

На основе модели (20) можно прогнозировать максимальную выборочную условную дисперсию на один большой период квантования $h_i = m_i T_0$ по i -му каналу

$$\begin{aligned}
 \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] + 1 \right) h_i \right] & = \lambda_i + (\sigma_{1_i} + r_{1_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \\
 & + (\sigma_{2_i} + r_{2_i}) \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + (\sigma_{n_i} + r_{n_i}) \times \\
 & \times \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i + 1 \right) h_i \right] + r_{n_{i+1}} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \dots \\
 & \dots + r_{\mu_i + n_i} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i + 1 \right) h_i \right] -
 \end{aligned}$$

$$-\sigma_{1_i} w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \dots - \sigma_{n_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i + 1 \right) h_i \right]. \quad (21)$$

АДАПТИВНАЯ НАСТРОЙКА КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ GARCH

Для достижения максимальной точности прогнозирования согласно (21) необходимо выполнять адаптивную настройку коэффициентов модели GARCH (20) из условия минимизации критерия оптимальности

$$I_{N_i} = \sum_{\left[\frac{k}{m_i} \right]=1}^N \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}^2, \quad (22)$$

где $\bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ — вычисленное значение максимальной выборочной ус-

ловной дисперсии по i -му каналу на основе (8), (9), а $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2$ — дисперсия, которая определяется по модели GARCH (20).

Запишем критерий (22) как

$$I_{N_i} = \sum_{\left[\frac{k}{m_i} \right]=1}^N \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \hat{\theta}_i \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (23)$$

где векторы оцениваемых коэффициентов $\hat{\theta}_i$ согласно модели (20) будут равны

$$\hat{\theta}_i = \left[(\sigma_{1_i} + r_{1_i}), (\sigma_{2_i} + r_{2_i}), \dots, (\sigma_{n_i} + r_{n_i}), r_{n_i+1}, \dots, r_{\mu_i+n_i}, \sigma_{1_i}, \dots, \sigma_{n_i}, \lambda_i \right]^T, \quad (24)$$

а вектор вычисляемых координат

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = & \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right], \dots \right. \\ & \dots, \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right], \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i - 1 \right) h_i \right], \dots \\ & \left. \dots, \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right], -w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, -w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right], 1 \right\}. \end{aligned}$$

Для оценивания неизвестных оптимальных коэффициентов $\hat{\theta}_i$ согласно (24), при которых минимизируется критерий (23), применяется рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК).

$$\hat{\theta}_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \hat{\theta}_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + K_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \times \\ \times \left\{ \overset{=2}{\xi}_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \hat{\theta}_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \right\}, \quad (25)$$

$$K_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \bar{X}_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \bar{X}_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}^{-1}, \quad (26)$$

$$P_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \times \\ \times \bar{X}_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \left\{ 1 + \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \times \right. \\ \left. \times \bar{X}_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}^{-1} \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] P_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \quad (i=1,2,\dots,n). \quad (27)$$

Таким образом, процедура РМНК (25)–(27) повторяется на каждом шаге n раз для оценки коэффициентов $\hat{\theta}_i$ по каждому каналу многомерного процесса.

Пример. Модель ARMA двумерного процесса с разнотемповой дискретизацией [6] при $h_1 = 5T_0$, $h_2 = 10T_0$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \left[\left[\frac{k}{5} \right] h_1 \right] \\ y_2 \left[\left[\frac{k}{10} \right] h_2 \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \end{bmatrix},$$

где $A_{11}(z^{-1}) = 1 - 0,9048z^{-5}$; $A_{22}(z^{-1}) = 1 - 0,9044z^{-10}$;

$$C_{11}(z^{-1}) = 1 + 0,4802z^{-1} + 0,4707z^{-2} + 0,46137z^{-3} + 0,45223z^{-4} - 0,46156z^{-5};$$

$$C_{12}(z^{-1}) = 1 + 1,5802z^{-1} + 1,5489z^{-2} + 1,51824z^{-3} + 1,48818z^{-4} + 0,55387z^{-6};$$

$$C_{21}(z^{-1}) = 1 + 0,29z^{-1} + 0,287z^{-2} + 0,2842z^{-3} + 0,28138z^{-4} + 0,27857z^{-5} + \\ + 0,2558z^{-6} + 0,273z^{-7} + 0,2703z^{-8} + 0,26759z^{-9} + 0,2649z^{-10};$$

$$C_{22}(z^{-1}) = 1 + 0,54z^{-1} + 0,534z^{-2} + 0,5292z^{-3} + 0,5239z^{-4} + \\ + 0,51872z^{-5} - 0,51353z^{-6} + 0,50839z^{-7} + 0,5033z^{-8} + 0,4982z^{-9} - 0,41107z^{-10}.$$

Модель GARCH (20) для первого и второго каналов двумерного процесса получена в следующей форме:

$$\hat{\xi}_{1\max}^2 \left[\left[\frac{k}{5} \right] h_1 \right] = (\sigma_{1_1} + r_{1_1}) \hat{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 1 \right) h_1 \right] + \\ + r_{2_1} \hat{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 2 \right) h_1 \right] + r_{3_1} \hat{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 3 \right) h_1 \right] + \\ + w_1 \left[\left[\frac{k}{5} \right] h_1 \right] - \sigma_{1_1} w_1 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 1 \right) h_1 \right], \quad (28)$$

$$\hat{\xi}_{2\max}^2 \left[\left[\frac{k}{10} \right] h_2 \right] = (\sigma_{1_2} + r_{1_2}) \hat{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 1 \right) h_2 \right] + \\ + r_{2_2} \hat{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 2 \right) h_2 \right] + r_{3_2} \hat{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 3 \right) h_2 \right] + \\ + w_2 \left[\left[\frac{k}{10} \right] h_2 \right] - \sigma_{1_2} w_2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 1 \right) h_2 \right]. \quad (29)$$

На рис. 1, 2 приведены результаты цифрового моделирования по прогнозированию максимальных условных дисперсий $\hat{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] + 1 \right) h_1 \right]$ и

$\hat{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] + 1 \right) h_2 \right]$, которые сравниваются с вычисленными значениями по формулам (8), (9) при $P_{1\max} = 12$; $P_{2\max} = 6$.

На рис. 3–10 приведены графики адаптивной настройки моделей GARCH (28), (29) на основе РМНК (23)–(27). На основе результатов цифрового моделирования можно выполнить следующий анализ.

Составление классической модели GARCH [2] основано на предварительном определении ряда дискретных отсчетов условных дисперсий, которые на каждом периоде квантования численно равны $\hat{\xi}^2[(k-i)T_0]$ при $i = 0, 1, 2, \dots, q$. Отдельные отсчеты $\hat{\xi}^2[(k-i)T_0]$ слабо коррелированы друг с другом [4, рис. 2], так как $\xi[(k-i)T_0]$ являются некоррелированными отсчетами белого шума. Поэтому представление динамики слабо коррелированных отсчетов изменяющихся условных дисперсий в виде нелинейной

условно-гауссовской модели GARCH не обеспечивает высокого качества прогнозирования будущего значения условной дисперсии $\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]$.

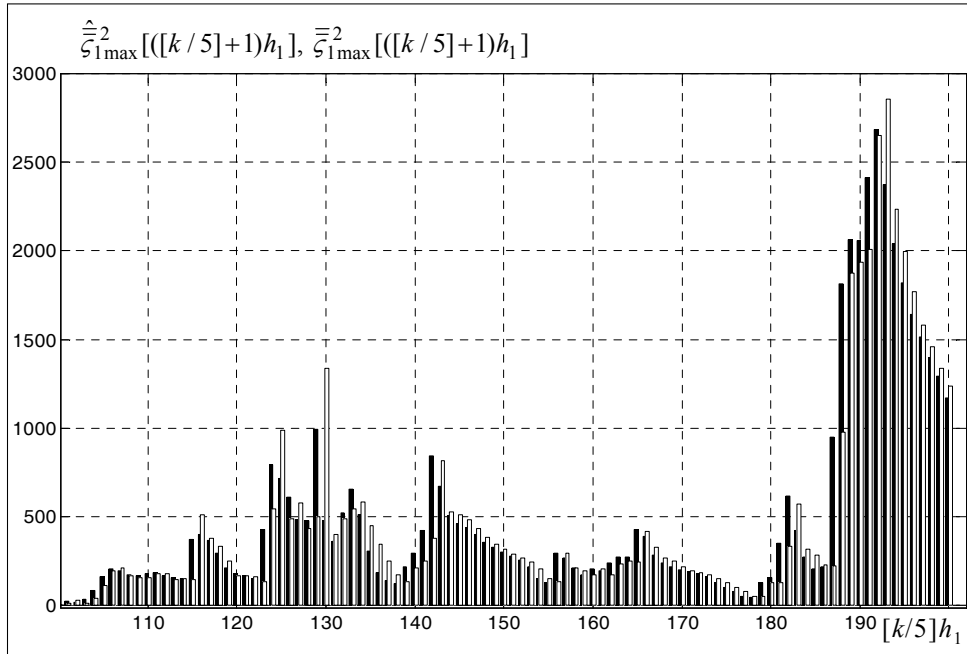


Рис. 1. График вычисления (черный цвет) и прогнозирования (белый) максимальной условной дисперсии $\bar{\xi}_{1\max}^2[(\lfloor k/5 \rfloor + 1)h_1]$

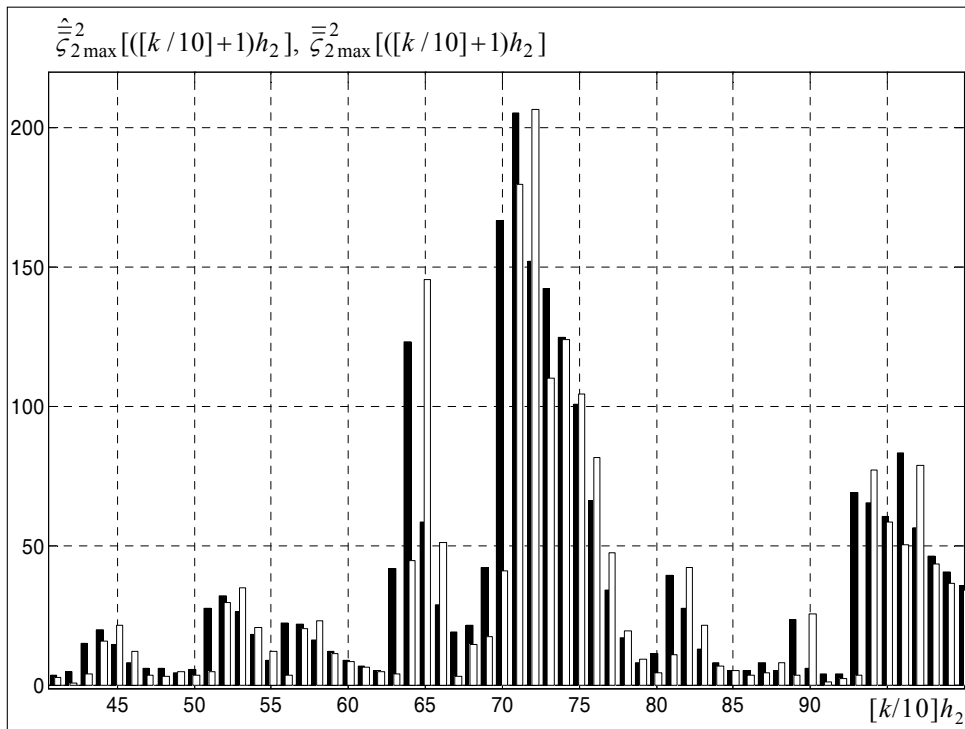


Рис. 2. График вычисления (черный цвет) и прогнозирования (белый) максимальной условной дисперсии $\bar{\xi}_{2\max}^2[(\lfloor k/10 \rfloor + 1)h_2]$

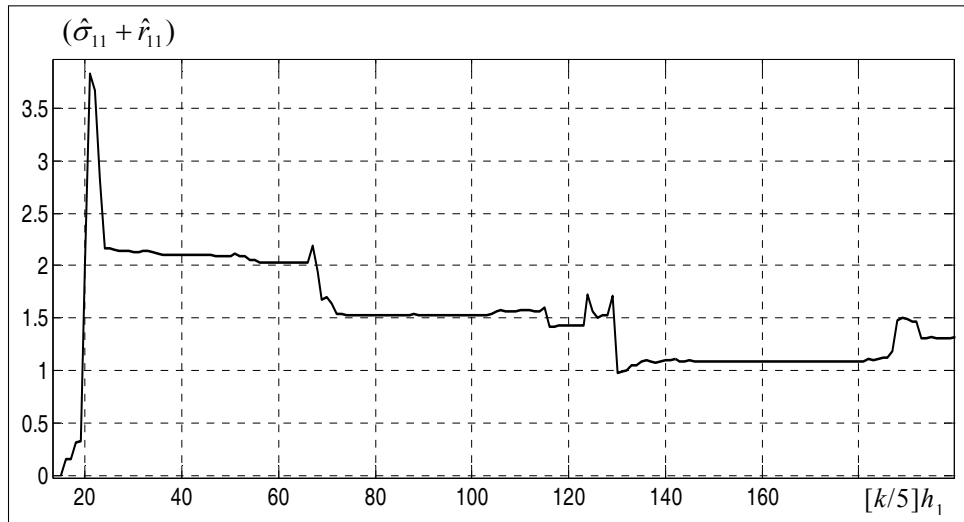


Рис. 3. График адаптивной настройки коэффициента $(\hat{\sigma}_{11} + \hat{r}_{11})$ по РМНК

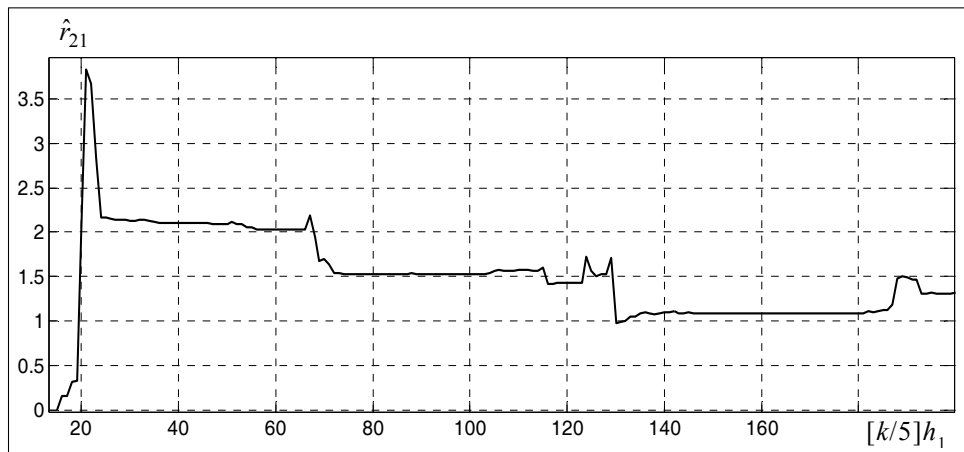


Рис. 4. График адаптивной настройки коэффициента \hat{r}_{21} по РМНК

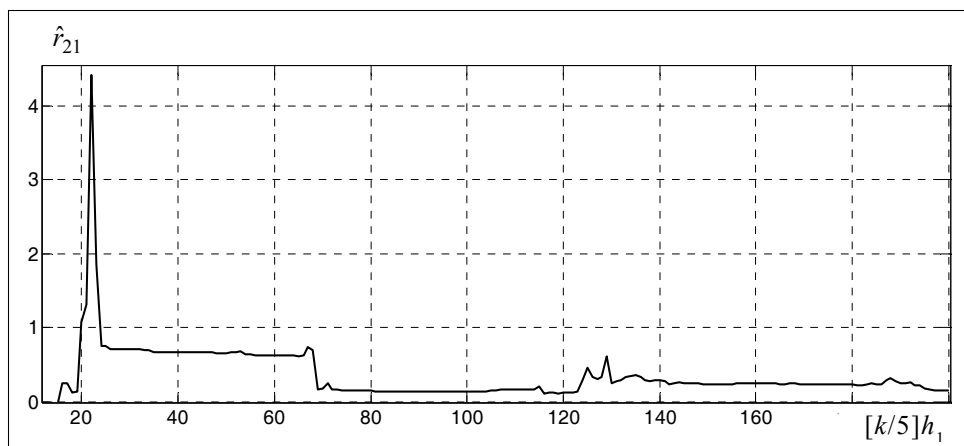


Рис.5. График адаптивной настройки коэффициента \hat{r}_{31} по РМНК

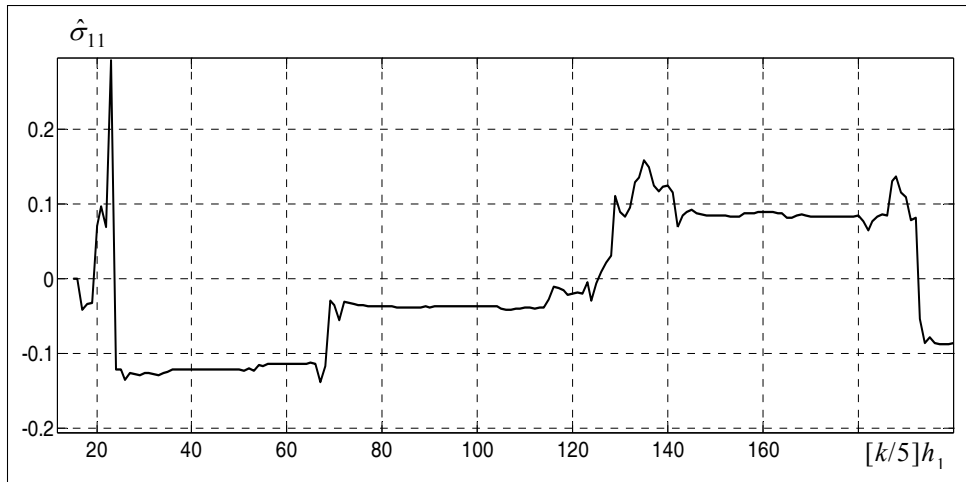


Рис. 6. График адаптивной настройки коэффициента $\hat{\sigma}_{11}$ по РМНК

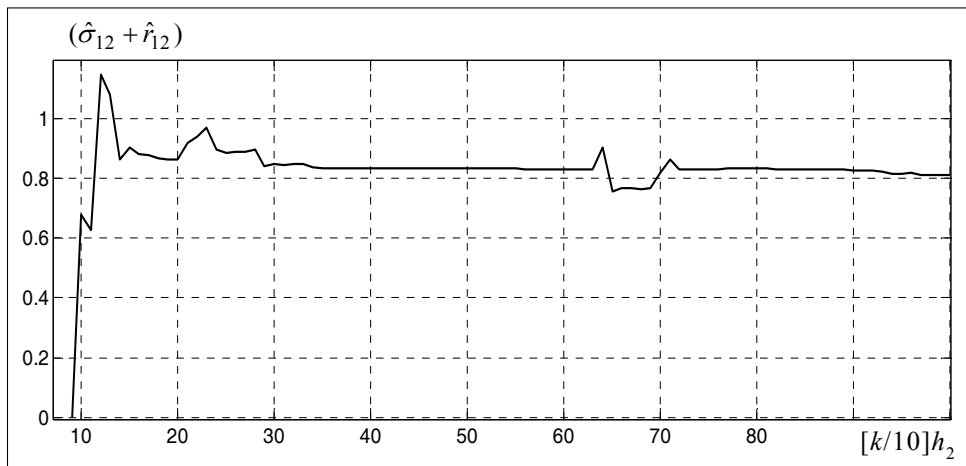


Рис. 7. График адаптивной настройки коэффициента $(\hat{\sigma}_{12} + \hat{r}_{12})$ по РМНК

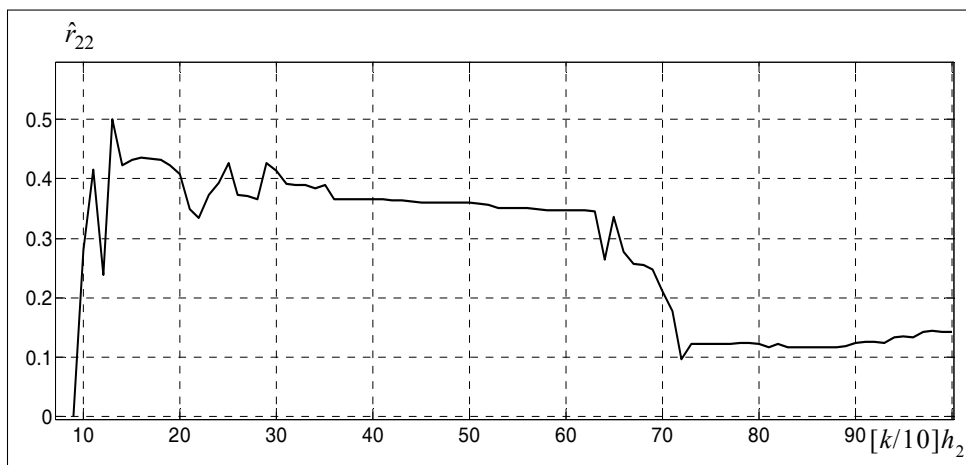


Рис. 8. График адаптивной настройки коэффициента \hat{r}_{22} по РМНК

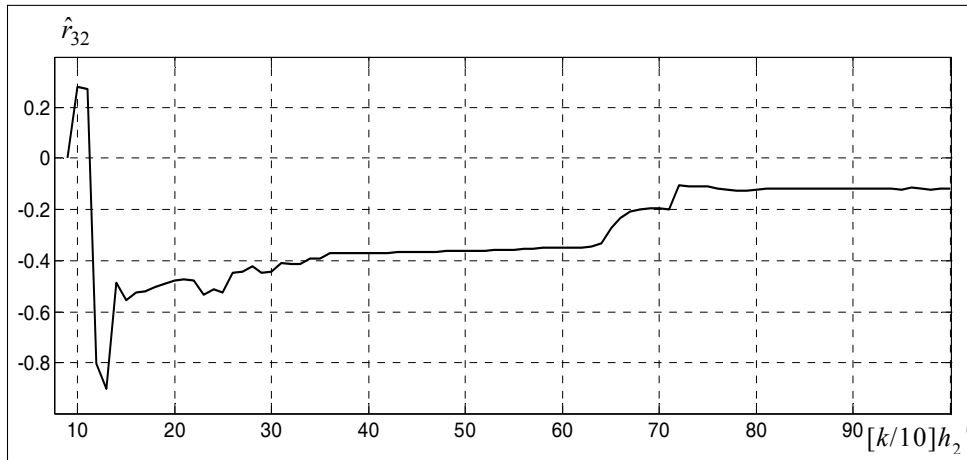


Рис. 9. График адаптивной настройки коэффициента \hat{r}_{32} по РМНК

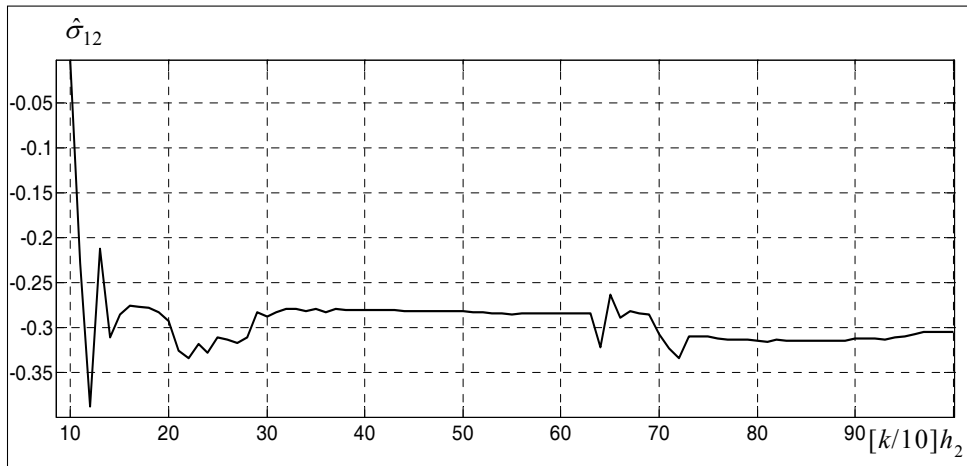


Рис. 10. График адаптивной настройки коэффициента $\hat{\sigma}_{12}$ по РМНК

Синтез моделей GARCH в данной статье производится на основе предварительной разработки моделей ARCH для максимальных выборочных условных дисперсий, которые определяются на базе (7)–(10). В процессе этой процедуры влияния отдельных отсчетов условных дисперсий усредняются на протяжении «окна» $p_i h_i$, что значительно увеличивает корреляцию между вычисленными отсчетами максимальных выборочных условных дис-

персий $\hat{\xi}_{j_{\max}} \triangleq \left[\left(\left[\frac{k}{m_j} \right] - i \right) h_i \right]$, $i = 0, 1, \dots, \mu_j$, на основе которых разрабатыва-

ется модель GARCH. Поэтому прогнозирование по этой модели максимальных выборочных условных дисперсий, как это показано в примере, получается более точным по сравнению с прогнозированием условной дисперсии по классической модели GARCH.

ВЫВОДЫ

Разработан метод синтеза моделей GARCH для прогнозирования максимальных выборочных условных дисперсий выходных координат многомерных гетероскедастических процессов на увеличенные периоды квантования $h_i = m_i T_0$ при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат — с большими.

Разработан алгоритм адаптивной настройки всех коэффициентов модели GARCH для многомерного процесса на основе РМНК.

Проведены экспериментальные исследования по прогнозированию дисперсий выходных координат двумерного процесса с разнотемповой дискретизацией и адаптивной настройке коэффициентов синтезированных моделей GARCH.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88–110.
2. Hamilton J.D. Time series analysis. — N.Y.: Prinseton Universiti Press. — 1994. — 799 p.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: Фазис, 1998. — 512 с.
4. Романенко В.Д. Прогнозирование и минимизация дисперсий гетероскедастических процессов на основе моделей с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 2. — С. 115–130.
5. Романенко В.Д., Билый А.В. Синтез и адаптивная настройка моделей GARCH для прогнозирования дисперсий гетероскедастических процессов с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 1. — С. 114–126.
6. Романенко В.Д. Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей временных рядов с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 2. — С. 23–41.

Поступила 11.02.2009