

УДК 519.873

**ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ МОНОТОННОЙ
СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ СУММАРНОЙ НАРАБОТКИ НА
ОТКАЗ КАЖДОГО ЕЕ ЭЛЕМЕНТА**

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ

Построена полумарковская модель технического обслуживания системы параллельной структуры с учетом суммарной наработки на отказ каждого элемента. Найдены стационарные показатели качества функционирования системы. Определены оптимальные величины наработок элементов для проведения предупредительного технического обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] исследована надежность некоторых конкретных, часто встречающихся на практике восстанавливаемых систем с полностью доступным восстановлением. В общих предположениях относительно времен безотказной работы и восстановления элементов системы определены основные стационарные надежностные характеристики системы: коэффициент готовности, средняя наработка на отказ и среднее время восстановления системы.

Одним из методов улучшения стационарных показателей качества функционирования системы является проведение предупредительного технического обслуживания (ТО) элементов при достижении ими определенного «возраста жизни». Такая стратегия проведения ТО элементов для системы с последовательной структурой и восстанавливаемой системы с нагруженным резервом исследована в работах [3, 4]. В данной статье результаты, полученные в [3, 4], обобщаются на случай систем с монотонной структурой [5]. Определяются стационарные и экономические показатели качества функционирования такой системы при указанной стратегии ТО ее элементов и устанавливаются оптимальные величины суммарных наработок элементов для проведения ТО с целью достижения наилучших значений стационарных характеристик.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим N -компонентную систему с монотонной структурой [5]. К подобным системам относятся, например, последовательные, дублированные,

мостиковые, « P из N », а также системы с отдельно-общим резервированием.

Время безотказной работы i -го элемента системы — случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t) = P(\alpha_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно, и начинается его восстановление (аварийное), которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t) = P(\beta_i \leq t)$, $i = \overline{1, N}$. В момент времени, когда суммарная наработка на отказ i -го элемента («продолжительность жизни») достигает уровня τ_i , начинается его предупредительное ТО, длительность которого СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t) = P(\beta_i^p \leq t)$.

Предполагается, что все СВ независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha_i, M\beta_i, M\beta_i^p$. Очереди на восстановление не возникает. Как после ТО, так и после аварийного восстановления, все надежность характеристики элементов полностью обновляются. Отключение и включение элементов в систему происходит мгновенно. Доход за единицу времени исправного функционирования, плата за единицу времени аварийного восстановления и за единицу времени ТО i -го элемента системы соответственно равны c_i^0, c_i и c_i^p , $i = \overline{1, N}$.

Система находится в работоспособном состоянии тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из последовательных структур минимального пути [5] работоспособна. Система считается в отказе тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одна из параллельных структур минимального сечения [5] находится в нерабочем состоянии (по причине ТО или аварийного восстановления ее элементов).

Требуется определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$ на единицу времени исправного функционирования системы, а также величины суммарных наработок τ_i элементов, при достижении которых следует проводить ТО элементов для того, чтобы указанные показатели качества функционирования системы имели оптимальные значения.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [1,2]

$$E = \left\{ i \bar{d} x^{-(i)} \bar{u}, \quad i = \overline{1, N} \right\},$$

где компоненты вектора $\bar{d} = (d_1, \dots, d_N)$ указывают на «физические» состояния элементов: $d_k = 1$ — k -й элемент находится в работоспособном состоянии; $d_k = 0$ — аварийное восстановление; $d_k = 2$ — состояние ТО; i — номер элемента, изменившего свое «физическое» состояние последним. Компоненты вектора $x^{-(i)}$ фиксируют время с момента последнего из-

менения состояния i -го элемента до ближайших моментов изменения состояний соответственно остальных элементов ($x_i = 0$), причем, если $d_k = 1$, то x_k — время до ближайшего аварийного отказа k -го элемента. Компоненты вектора $\bar{u} = (u_1, \dots, u_N)$ равны суммарным наработкам соответствующих элементов в момент последнего изменения состояния системы. Если $d_k = 2$, то считается, что $u_k = \tau_k$. В момент восстановления работоспособности i -го элемента после его ТО наработка этого элемента равна нулю ($u_i = 0$).

Времена пребывания системы в указанных выше состояниях определяются формулами

$$\theta_{id\bar{x}^{(i)}\bar{u}} = \gamma_i^{(d_i)} \wedge \bigwedge_{k \neq i} x_k \wedge \bigwedge_{k \in \Omega_d^1} (\tau_k - u_k),$$

где \wedge — знак минимума; Ω_d^1 — совокупность номеров компонент вектора \bar{d} , равных 1,

$$\gamma_i^{(d_i)} = \begin{cases} \alpha_i, & d_i = 1, \\ \beta_i, & d_i = 0, \\ \beta_i^p, & d_i = 2. \end{cases}$$

Предположим, что для вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n, n \geq 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения $\rho(\cdot)$, тогда [4]

$$\rho\left(id\bar{x}^{(i)}\bar{u}\right) = \rho \prod_{k \in \Omega_d^0} h_k(u_k) \bar{G}_k(x_k) \prod_{k \in \Omega_d^1} v_k(u_k, x_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} \bar{G}_k^p(x_k), \quad k = \overline{1, N}, \quad (1)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (1 + H_i(\tau_i)) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)) \right]^{-1},$$

где $\bar{G}_k(x_k) = 1 - G_k(x_k)$, $\bar{G}_k^p(x_k) = 1 - G_k^p(x_k)$; $h_k(u_k)$ — плотность функции восстановления $H_k(u_k) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(u_k)$; $v_k(u_k, x_k) = f_k(u_k + x_k) + \int_0^{u_k} f_k(u_k + x_k - s) h_k(s) ds$ — плотность прямого остаточного времени восстановления рекуррентного потока, порожденного СВ α_k , $v_k(0,0) \equiv 1$; Ω_d^0 , Ω_d^2 — совокупности номеров компонент вектора \bar{d} , равных соответственно 0 и 2.

Разобьем фазовое пространство E состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+ — работоспособных и E_- — отказовых состояний.

$$E_+ = \left\{ id\bar{x}^{(i)}\bar{u}, \bar{d} \in D_+, i = \overline{1, N} \right\}, \quad E_- = \left\{ id\bar{x}^{(i)}\bar{u}, \bar{d} \in D_-, i = \overline{1, N} \right\},$$

где $D_+(D_-)$ — множество векторов \bar{d} , компоненты которых равны кодам «физических» состояний элементов системы, находящейся в подмножестве работоспособных (отказовых) состояний $E_+(E_-)$.

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+ , среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования K_u системы найдем по формулам [1, 2]

$$T_+ = \frac{\int_{E_+} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_+} \rho(dz) P(z, E_-)}, \quad T_- = \frac{\int_{E_-} m(z) \rho(dz)}{\int_{E_-} \rho(dz) P(z, E_+)}, \quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \quad (2)$$

где $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$; $m(z)$ — средние времена пребывания в состояниях системы; $P(z, E_+)$, $(P(z, E_-))$ — вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ из отказовых (работоспособных) состояний в работоспособные (отказовые).

С учетом стационарного распределения ВЦМ (1) формулы (2) преобразуются к виду

$$T_+ = \frac{\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^1} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p}{\sum_{d \in D_+} \sum_{j \in G(d)} (1 + H_j(\tau_j)) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \neq j}} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p},$$

$$T_- = \sum_{d \in D_-} \prod_{k \in \Omega_d^1} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p$$

$$\left/ \sum_{d \in D'_-} \left[\sum_{j \in I_0(d)} H_j(\tau_j) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^1 \\ k \neq j}} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{j \in I_2(d)} \prod_{k \in \Omega_d^1} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{\substack{k \in \Omega_d^2 \\ k \neq j}} M\beta_k^p \right],$$

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = \frac{\sum_{d \in D_+} \prod_{k \in \Omega_d^1} \tau_k \prod_{k \in \Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} M\beta_k^p}{\prod_{k=1}^N (\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k))}, \quad (3)$$

где D'_+ — множество пограничных работоспособных «физических» состояний системы, т.е. множество векторов $\bar{d} \in D_+$ таких, что изменение некоторой одной компоненты с 1 на 0 или 2 переводит вектор \bar{d} во множество D_- ; $G(d)$ — множество номеров компонент вектора $\bar{d} \in D'_+$, изменение значения каждой из которых с 1 на 0 или 2 переводит вектор \bar{d} во множество D_- ; D'_- — множество пограничных отказовых состояний системы, т.е. множество векторов $\bar{d} \in D_-$ таких, что изменение некоторой одной компоненты с 0 или 2 на 1 переводит вектор \bar{d} во множество D_+ ; $I_0(d)$ ($I_2(d)$) — множество номеров компонент вектора $\bar{d} \in D'_-$, изменение значения каждой из которых с 0 (2) на 1 переводит вектор \bar{d} во множество D_+ .

Коэффициент технического использования (КТИ) $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$ системы выразим структурной функцией $\varphi(z_1, \dots, z_N)$ системы [5] и КТИ $K_i(\tau_i)$ i -го элемента — формулами [6].

$$K_i(\tau_i) = \frac{\tau_i}{\tau_i + M\beta_i^p + M\beta_i H_i(\tau_i)}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Пусть M_1, \dots, M_ω все различные множества элементов пути системы [5]. По определению, элементы, не принадлежащие множеству элементов пути, находятся в нерабочем состоянии, т.е. в состояниях 0 или 2. Формула (3) с помощью преобразования сумм произведений средних после несложных преобразований приводится к виду

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = \frac{\sum_{j=1}^{\omega} \prod_{n \in M_j} \tau_n \prod_{n \notin M_j} (M\beta_n^p + M\beta_n H(\tau_n))}{\prod_{n=1}^N (\tau_n + M\beta_n^p + M\beta_n H(\tau_n))} = \sum_{j=1}^{\omega} \prod_{n \in M_j} K_n(\tau_n) \prod_{n \notin M_j} (1 - K_n(\tau_n)) = \varphi(K_1(\tau_1), \dots, K_N(\tau_N)), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4)$$

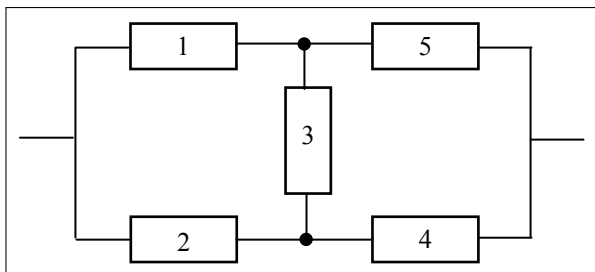


Рис. 1. Структура мостиковой системы

Здесь структурная функция φ задана в дизъюнктивной нормальной форме, однако ее можно представить многими эквивалентными способами, например, в линейной форме.

Так, для последовательной системы, дублированной системы с нагруженным резервом и мостиковой системы (рис. 1) формула (4) запишется так:

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = \prod_{i=1}^N K_i(\tau_i), \quad K_u(\tau_1, \dots, \tau_N) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - K_i(\tau_i)),$$

$$K_u(\tau_1, \dots, \tau_5) = K_1(\tau_1)K_5(\tau_5) + K_2(\tau_2)K_4(\tau_4) + K_1(\tau_1)K_3(\tau_3)K_4(\tau_4) + \\ + K_2(\tau_2)K_3(\tau_3)K_5(\tau_5) - \sum_{i=1}^5 \prod_{n \neq i}^5 K_n(\tau_n) + 2 \prod_{n=1}^5 K_n(\tau_n).$$

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$ на единицу времени исправного функционирования системы используем формулы [7]

$$S = \frac{E \int m(z) f_s(z) \rho(dz)}{\int m(z) \rho(dz)}, \quad C = \frac{E \int m(z) f_c(z) \rho(dz)}{\int m(z) \rho(dz)}, \quad (5)$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ — функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ с учетом введенных обозначений имеют вид

$$f_s(z) = \begin{cases} - \sum_{k \in \Omega_d^0} c_k - \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{ \overline{id x^{(i)} u} \}, i = \overline{1, N}, & \text{если } \Omega_d^1 = \emptyset, \\ \sum_{k \in \Omega_d^1} c_k^0 - \sum_{i \in \Omega_d^0} c_k - \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{ \overline{id x^{(i)} u} \}, i = \overline{1, N}, & \text{если } \Omega_d^1 \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$f_c(z) = \begin{cases} \sum_{k \in \Omega_d^0} c_k + \sum_{k \in \Omega_d^2} c_k^p, & z \in \{ \overline{id x^{(i)} u} \}, i = \overline{1, N}, & \text{если } \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2 \neq \emptyset, \\ 0, & z \in \{ \overline{id x^{(i)} u} \}, i = \overline{1, N}, & \text{если } \Omega_d^0 \cup \Omega_d^2 = \emptyset. \end{cases}$$

После преобразований формулы (5) получаем

$$S(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N S_i(\tau_i), \quad (6)$$

$$C(\tau_1, \dots, \tau_N) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i(\tau_i) K_i(\tau_i)}{K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)}, \quad (7)$$

где $S_i(\tau_i) = \frac{c_i^0 \tau_i - c_i^p M \beta_i^p - c_i M \beta_i H_i(\tau_i)}{\tau_i + M \beta_i^p + M \beta_i H_i(\tau_i)}$ — средний удельный доход i -го элемента на единицу календарного времени, а $C_i(\tau_i) = \frac{c_i^p M \beta_i^p + c_i M \beta_i H_i(\tau_i)}{\tau_i}$ — средние удельные затраты на единицу времени исправного функционирования i -го элемента.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРОКОВ ПРОВЕДЕНИЯ ТО ЭЛЕМЕНТОВ

Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций (4), (6) и (7). Заметим, что для достижения максимальных значений КТИ $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$ и среднего удельного дохода $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ необходимо и достаточно оптимизировать величину суммарной наработки каждого элемента, чего нельзя утверждать относительно минимальных средних удельных затрат $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$ системы.

Приравнявая нулю частные производные функций $K_u(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $S(\tau_1, \dots, \tau_N)$ и $C(\tau_1, \dots, \tau_N)$, получаем соответственно системы уравнений (8)–(10) для определения оптимальных значений наработок $\tau_i^k, \tau_i^s, \tau_i^c$, $i = \overline{1, N}$.

$$\tau_i h_i(\tau_i) - H_i(\tau_i) = \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{8}$$

$$h_i(\tau_i) \left(\tau_i + \frac{c_i - c_i^p}{c_i + c_i^0} M\beta_i^p \right) - H_i(\tau_i) = \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} \frac{c_i^p + c_i^0}{c_i + c_i^0}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^N C_j(\tau_j) K_j(\tau_j) \left[(\tau_i h_i(\tau_i) - H_i(\tau_i)) - \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} \right] \frac{\partial}{\partial K_i} \ln \varphi(K_1(\tau_1), \dots, K_N(\tau_N)) +$$

$$+ c_i (\tau_i h_i(\tau_i) - H_i(\tau_i)) + (c_i - c_i^p) M\beta_i^p h_i(\tau_i) = c_i^p \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i}, \quad i = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Асимптотическое поведение процесса восстановления при $\tau \rightarrow \infty$ [5] позволяет утверждать, что достаточными условиями существования конечных решений систем уравнений (8)–(10) является выполнение соответственно неравенств

$$\frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D\alpha_i}{(M\alpha_i)^2} \right), \quad i = \overline{1, N},$$

$$\frac{c_i^0 + c_i^p}{c_i^0 + c_i} \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D\alpha_i}{(M\alpha_i)^2} \right) + \frac{c_i - c_i^p}{c_i^0 + c_i} \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$c_i^p \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} > \frac{c_i}{2} \left(1 - \frac{D\alpha_i}{(M\alpha_i)^2} \right) + (c_i - c_i^p) \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i} +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \frac{c_j M\beta_j}{M\alpha_j + M\beta_j} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{D\alpha_i}{(M\alpha_i)^2} \right) - \frac{M\beta_i^p}{M\beta_i} \right] \frac{\partial}{\partial K_i} \ln \varphi \left(\frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + M\beta_1}, \dots, \right.$$

$$\left. \dots, \frac{M\alpha_N}{M\alpha_N + M\beta_N} \right) \quad i = \overline{1, N},$$

где $D\alpha_i$ — конечная дисперсия СВ α_i .

В случае существования единственных решений систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами

$$K_{u \max} = \varphi \left(\frac{1}{1 + M\beta_1 h_1(\tau_1^k)}, \dots, \frac{1}{1 + M\beta_N h_N(\tau_N^k)} \right),$$

$$S_{\max} = \sum_{i=1}^N \frac{c_i^0 - c_i M\beta_i h_i(\tau_i^s)}{1 + M\beta_i h_i(\tau_i^s)}, \quad (11)$$

$$C_{\min} = \frac{\sum_{i=1}^N C_i(\tau_i^c) K_i(\tau_i^c)}{K_u(\tau_1^c, \dots, \tau_N^c)}. \quad (12)$$

Если системы уравнений имеют несколько решений, то оптимальные значения показателей качества находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них. Отсутствие корней какого-либо j -го уравнения систем (8), (9) означает что функция $K_j(\tau_j)(S_j(\tau_j))$ является монотонной и ее экстремум достигается при $\tau_i \rightarrow \infty$. В этом случае в формулах (11) следует заменить $h_j(\infty)$ на $\frac{1}{M\alpha_j}$.

Если система уравнений (10) не имеет решений, то следует исследовать на минимум всевозможные функции, которые получаются из (7) в результате замен $K_i(\infty) = \frac{M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$, $C_i(\infty) = \frac{c_i M\alpha_i}{M\alpha_i + M\beta_i}$. Достижение экстремума при $\tau_i \rightarrow \infty$ говорит о том, что проводить предупредительное ТО i -го элемента нецелесообразно, поскольку его проведение ухудшает показатель качества функционирования системы.

В заключение приведем пример применения полученных результатов (табл. 1 и 2). Рассмотрим систему из трех элементов (рис. 2). Наработка на отказ элементов распределена по закону Эрланга третьего порядка с плотностями

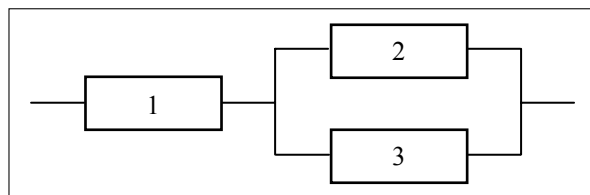


Рис. 2. Пример системы с монотонной структурой

$$f_i(t) = \frac{\lambda_i^3 t^2 e^{-\lambda_i t}}{2}, \quad i = \overline{1,3}.$$

Таблица 1. Исходные данные системы

Номер п/п	$\lambda_i, \text{ч}^{-1}$	$M\alpha_i, \text{ч}$	$M\beta_i, \text{ч}$	$M\beta_i^p, \text{ч}$	$c_i^0, \text{у.е./ч}$	$c_i, \text{у.е./ч}$	$c_i^p, \text{у.е./ч}$
1	0,05	60	3	0,9	5	1	0,2
2	0,1	30	10	3	7	3	2
3	0,08	37,5	9	2	9	3	1

Таблица 2. Результаты расчетов

Номер, п/п	$\tau_i^k, \text{ч}$	K_u^{\max}	K_u^{∞}	$\tau_i^s, \text{ч}$	S^{\max}	S^{∞}	$\tau_i^c, \text{ч}$	C^{\max}	C^{∞}
1	45,311	0,916	0,906	36,201	16,608	15,892	26,576	0,973	1,521
2	22,539			18,180			13,879		
3	20,219			16,310			10,124		

Здесь через K_u^{∞} , S^{∞} , C^{∞} обозначены показатели качества функционирования системы в случае не проведения ТО элементов. Проведение ТО элементов улучшает эти показатели соответственно на 1,043%, 4,510%, 36,019%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корольюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.
2. *Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания* / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
3. *Песчанский А.И.* Оптимизация технического обслуживания по наработке каждого элемента с последовательной структурой // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 126–135.
4. *Песчанский А.И.* Оптимальное техническое обслуживание восстанавливаемой системы с нагруженным резервированием и учетом наработки каждого элемента // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 3. — С. 100–110.
5. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
6. *Капитанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
7. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. — М.: Наука, 1989. — 336 с.

Поступила 28.07.2007