МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФОРМУВАННЯ ТА ЗБЕРЕЖЕННЯ КОЛЕКТИВНИХ ЗНАНЬ

В.В. ЯСІНСЬКИЙ , О.В. КАПУСТЯН , Х. ВАЛЕРО

На основі запропонованої системи аксіом побудовано та досліджено математичну модель процесу формування та збереження знань у великих освітніх системах. Знайдено умови збереження на деякому часовому проміжку заданого гарантованого рівня колективних знань.

ВСТУП

Використовуючи системний підхід [1, 6], досліджується модель, яка описує динаміку взаємодії між ключовими компонентами великої освітньої системи при синхронному вивченні у її підрозділах деякої навчальної дисципліни D.

Актуальність такого дослідження зумовлена, в першу чергу, необхідністю створення обґрунтованих науково методологічних засад незалежного моніторингу якості знань як учнів середніх шкіл, так і студентів вищих навчальних закладів України.

При побудові загальної моделі будемо розглядати (для зручності сприйняття) процес вивчення математики в системі середньої освіти України. Такий вибір об'єкта моделювання зумовлено низкою очевидних причин.

По-перше, місцем і роллю, яку займає математика в загальній структурі знань. По-друге, саме при вивченні математики особливо рельєфно проявляються зв'язки між різними компонентами освітньої системи. По-третє, вивчення математики має досить усталені традиції і канони. І, нарешті, процес вивчення математики добре формалізується, є достатньо спостережним і керованим.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Запропонована модель складається з трьох основних блоків, взаємодія між якими і є основою подальшого моделювання: 1) *учнівське* і 2) *викладацьке середовища,* 3) *соціальне оточення* (рисунок).

1. *Учнівське середовище* складається з усіх учнів старших класів всіх середніх шкіл України. Нехай загальна кількість учнів дорівнює N, і всі

вони впорядковані (умовно) за якоюсь очевидною ознакою, скажімо, назва міста, номер школи, номер класу і певне місце в класі, що, з одного боку, дозволяє приписувати кожному учневі номер $i \in [0; N]$, а з іншого — залишає учнів у межах звичного для них шкільного середовища. Будемо вважати, що кожен учень $i \in [0; N]$ в кожен момент часу $t \geq 0$ володіє певним рівнем знань $u = u(i,t) \geq 0$ з математичних дисциплін, тобто певним об'ємом інформації, яка надається йому згідно із уніфікованими навчальними програмами, а також відповідними навичками та вміннями використовувати цю інформацію на практиці.

Під рівнем знань тут і надалі будемо розуміти (і це суттєво) не реальний рівень знань учня (що, по-перше, в силу психології учня, особистих якостей, розвитку пам'яті та складу характеру не може бути навіть реально оцінений, і, по-друге, зміна реального рівня знань — процес індивідуальний, досить повільний і слабо залежить від учнівського середовища), а рівень знань, який спостерігається (*С*-знання), тобто проявляється учнем під час різноманітного педагогічного контролю (самостійні та контрольні роботи, опитування, тестування, тощо) відповідно до загальноприйнятих державних освітніх стандартів. Саме цей рівень знань може бути реально оцінений, він є досить динамічним і суттєво залежить від учнівського середовища. Крім того, саме ця залежність забезпечує той більш-менш рівний розподіл підсумкових оцінок учнів,що складає основу для подальшого комплексного аналізу якості знань з математики та вироблення відповідних стратегій управління цими знаннями.

2. *Викладацьке середовище* — це всі викладачі, які згідно з усталеними освітніми стандартами та уніфікованим методичним забезпеченням здійснюють викладання математичних дисциплін у відповідних освітніх підрозділах із кількістю учнів $i \in [1, N]$. Будемо вважати, що саме функціонування викладацького середовища є джерелом знань для учнів.

3. *Соціальне оточення* — частина суспільства, яка безпосередньо не бере участі в навчальному процесі, проте в тій чи іншій мірі зацікавлена в його результаті (батьки та близьке оточення учнів, шкільні вчителі з інших дисциплін, ВНЗ і т.п.). Вважаємо, що оточення безпосередньо не володіє знаннями, проте може реагувати (позитивно, негативно, байдуже) на їх рівень, впливаючи і безпосередньо на учня (шляхом збільшення або зменшення стимулів до навчання) і на викладацьке середовище (за допомогою всієї інфраструктури сучасного суспільства: ЗМІ, «гарячі» телефонні лінії, соціологічні дослідження і т.п.).

У моделі також використовуються поняття *реакції оточення, реакції системи, потік знань*, які розглянемо пізніше.

З точки зору реального навчального процесу важливими є поняття *мінімального* та *максимального* рівнів знань. На відміну від невідомої шуканої величини реального рівня *С*-знань, мінімальний та максимальний рівні знань є відомими величинами, які встановлюються державними освітніми стандартами. Очевидно, що мінімальний та максимальний рівні знань залежать від часу, проте не залежать від конкретного учня. Таким чином, вважаємо, що в моделі відомі невід'ємні функції $u_1(t)$ — мінімальний та $u_2(t)$ — максимальний рівні знань у момент часу t.

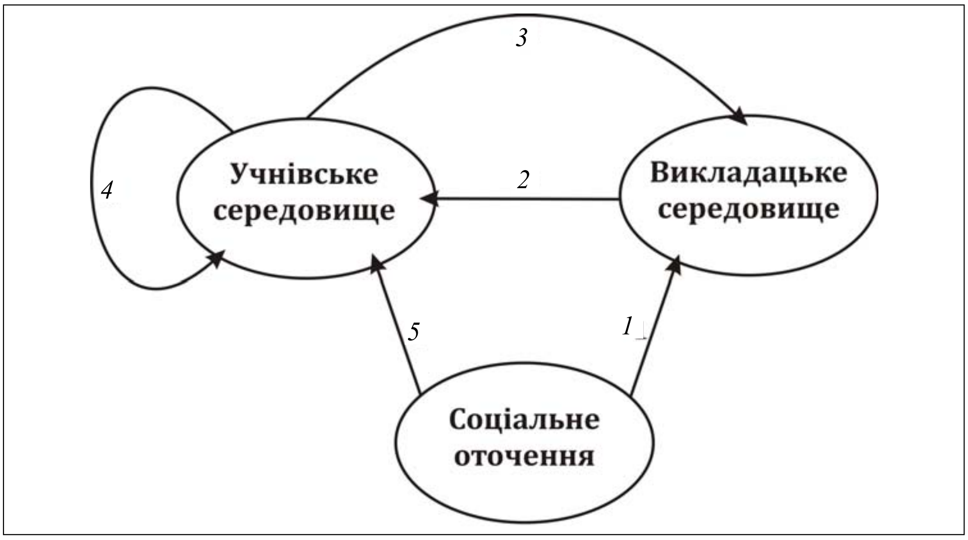

Схема взаємодії компонентів моделі (великої освітньої системи)

Аксіома 1. *У системі, яка розглядається, всі викладачі забезпечують однаковий рівень викладання математики, що забезпечує однакові умови накопичення знань для кожного учня.*

Така умова здається доволі жорсткою, проте вона виправдана як з точки зору подальшого аналізу моделі, так і з огляду на те, що всі учні користуються однаковими підручниками, що базуються на одній шкільній програмі, а здійснюють підготовку викладачів математики всього декілька педагогічних університетів за уніфікованими учбовими програмами.

Опишемо взаємодію між компонентами моделі (рисунок).

1. Оточення впливає (стрілка *1*) на викладацьке середовище, виступаючи як «замовник» знань.

2. Викладачі і підручники є джерелом знань для учнів (стрілка *2*). Проте насправді наявний і обернений зв'язок (стрілка *3*) полягає в тому, що викладач, керуючись власною педагогічною майстерністю, повинен в межах програми варіювати об'єм матеріалу, який пропонує на уроці, в залежності від наявного рівня *С*-знань учнів.

3. В учнівському середовищі іде постійний перерозподіл рівня знань (стрілка *4*). Суттєвим є те, що ми маємо на увазі не рівень реальних знаннь, а фактично рівень *С*-знань. Якщо процес обміну реальними знаннями між учнями явище, не характерне для середньої школи, то швидкий загальноприйнятий неявний обмін інформацією суттєво впливає на поточну підсумкову успішність для багатьох учнів, тобто на рівень *С*-знань.

4. Соціальне оточення, не надаючи реальних (математичних) знань, реагує на їх формування шляхом збільшення або зменшення (стрілка *5*) стимулів до його підвищення.

Одне з ключових моментів при описі взаємодії між компонентами моделі є визначення поняття *реакції системи.*

Аксіома 2. *Знак і величина обміну знаннями між учнівським і викладацьким середовищами визначаються реакцією системи, тобто сумарною реакцією учнів і соціального оточення на наявний розподіл рівня знань* $u(i,t)$.

Реакція учня характеризує міру його прагнення до навчання, точніше до зміни рівня власних C-знань. Кількісно величина (міра) такого прагнення цілком може бути визначена, наприклад, шляхом анкетування з використанням певної порівняльної шкали і залежати від різних обставин. Проте основними складовими тут є сам учень, момент часу, шкільні вимоги в цей момент часу і наявний рівень C-знань.

Отже, реакцію учня i визначає деяка функція $f_1(u,u_1,u_2,i,t)$. Цілком природно вважати, що викладач, побачивши прагнення учня i покращити свою успішність ($f_1(u,u_1,u_2,i,t) > 0$), приділяє йому більше уваги і в той же час починає при оцінці знань виходити з дещо завищеної суб'єктивної шкали, що призводить до збільшення рівня *C*-знань цього учня. І, навпаки, якщо викладач не бачить бажання учня i вчитися ($f_1(u,u_1,u_2,i,t) < 0$, то обмежується, здебільшого, формальним поданням матеріалу в межах навчального плану, а при оцінці знань виходить з дещо заниженої суб'єктивної шкали, що зменшує рівень *C*-знань учня i.

Аналогічно визначимо величину реакції соціального оточення на учня i, тобто на його наявний рівень *C*-знань $u(i,t)$, що виражається функціональною залежністю $f_2(u,u_1,u_2,i,t)$. При цьому, якщо соціальне оточення задоволене наявним рівнем C-знань учня i ($f_2(u,u_1,u_2,i,t) > 0$), то це зменшує контроль (стимулювання) учня i, і водночас надає підстави для схвалення роботи викладацького середовища. Викладачі, керуючись схвальною оцінкою їх діяльності, дають якісно вищий обсяг знань, що без належного контролю з боку соціального оточення зменшує рівень C-знань учня i. І, навпаки, якщо соціальне оточення не задоволене наявним рівнем C-знань учня i ($f_2(u,u_1,u_2,i,t) < 0$), то контроль (стимулювання) за учнем i зростає, а негативна реакція змушує викладача знову ж суб'єктивно «понизити планку» при поданні нового матеріалу, що збільшує рівень *C*-знань учня i.

Таким чином, реакція системи визначається функцією

$$f(u,i,t) = f_1(u,u_1(t),u_2(t),i,t) - f_2(u,u_1(t),u_2(t),i,t).$$

Перейдемо до опису механізмів перерозподілу знань в учнівському середовищі.

Аксіома 3. *В учнівському середовищі існує неявний механізм перерозподілу рівня С-знань, причому знання можуть передаватися лише від учня з більшим рівнем знань до учня з меншим рівнем.*

Нехай під час певного педагогічного контролю учень i неявно допоміг учневі $i+1$. Тоді рівень *C*-знань учня $i+1$ збільшується, в той час як учня i зменшується. Вважаючи, що контроль здійснюється в кожний момент часу (в тій чи іншій формі), визначимо потік знань $W(i,t)$ як кількість знань, що одержує учень $i+1$ від учня i в момент часу *t*. У відповідності до аксіоми 3 величина $W(i,t)$ додатна при $u(i,t) > u(i+1,t)$, від'ємна при $u(i,t) < < u(i+1,t)$ і дорівнює нулю при $u(i,t) = u(i+1,t)$. Очевидно, що швидкість зміни рівня *С*-знань має відбуватися тим швидше, чим більше різниця між рівнями знань учнів.

Аксіома 4. *Неявний взаємообмін знаннями пари учнів* i *та* $i+1$ *залежить від самих учнів і взагалі не залежить від інших учасників системи (принцип ближньої взаємодії).*

Один з найбільш загальних законів для величини $W(i,t)$ такий:

$$W(i,t) = -\mu(i,i+1)(u(i+1,t) - u(i,t)),$$

де функція μ додатна при всіх значеннях своїх аргументів.

Для виводу рівняння балансу нам знадобиться

Аксіома 5. *Швидкість зміни величини С-знань визначається потоками знань та реакцію системи.*

У наведеному загальному описі об'єкт моделювання представляється замкненою, узгодженою і самоорганізуючою системою з різними прямими та оберненими зв'язками між компонентами.

Підрахуємо зміну рівня *С*-знань Δu учня i за проміжок часу Δt між моментами t і $t + \Delta t$. Ця кількість формується:

1) потоком знань, що отримується від учня $i-1$ за вказаним механізмом

$$\Delta u_- = W(i-1,t)\Delta t;$$

2) потоком знань, що передається учню $i+1$ за тим же механізмом

$$\Delta u_+ = -W(i,t)\Delta t;$$

3) знаннями, що визначаються реакцією системи

$$\Delta u_0 = f(u(i,t),i,t)\Delta t.$$

Додаючи ці величини, одержуємо сумарну зміну

$$\Delta u = u(i,t+\Delta t) - u(i,t) = (W(i-1,t) - W(i,t) + f)\Delta t.$$

Таким чином, маємо рівняння

$$\frac{\Delta u(i,t)}{\Delta t} = -(W(i,t) - W(i-1,t)) + f.$$

Дане рівняння записане для довільного номера $i \in (0, N)$. Для номерів $i = 0$ та $i = N$ будемо вважати значення потоку знань, рівним нулю, тобто

$$W(-1,t) = W(N,t) = 0.$$

Крім того, в початковий момент часу $t = 0$ наявний певний розподіл рівня C-знань

$$u(i,0) = u_0(i) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Отже, маємо замкнену дискретну модель розподілу рівня *С*-знань $u(i,t)$ у даній системі. Стандартно переходячи до неперервної моделі, одержуємо крайову задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u,x,t), \quad x \in (0,l), \quad t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ u\,|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \qquad (1)$$

де нашим основним завданням буде з'ясування умов, за яких з часом зберігається деякий *гарантований* рівень знань $q(t) > 0$.

АНАЛІЗ УМОВ І ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Визначимо основні умови, яким мають задовольняти параметри моделі (1).

По-перше, функція μ, що характеризує інтенсивність потоку, має лише одне природне обмеження — додатність на $(0,l)$. Тому будемо вважати, що

$$\mu \in L^{\infty}(0,l), \quad \mu(x) \geq \mu_0 > 0 \ \text{ м.с. на } \ (0,l). \qquad (2)$$

По-друге, за побудовою і проведеним аналізом функція $f = f(u,x,t)$: $[0,+\infty) \times [0,l] \times [0,T] \mapsto (-\infty,+\infty)$, що характеризує реакцію системи, має неперервний характер при фіксованому $x \in (0,l)$, тобто задовольняє умови

відображення $(t,u) \mapsto f(u,x,t)$ — неперервне для м.в. $x \in (0,l)$, (3)

відображення $x \mapsto f(u,x,t)$ — вимірне для всіх $(u,t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$. (4)

Крім того, природно вважати, що реакція системи мажорується деяким ступенем рівня знань, при цьому не маючи характеру монотонності, а її знакові властивості забезпечують дисипативність процесу. Тому вважаємо, що для всіх $(u,x,t) \in [0,+\infty) \times [0,l] \times [0,T]$ виконуються оцінки

$$| f(u,x,t) | \leq C_1(1 + |u|^{p-1}), \qquad (5)$$

$$f(u,x,t)u \leq -\alpha |u|^p + C_2, \qquad (6)$$

де $p \geq 2$, $\alpha, C_1, C_2 > 0$.

Для коректної математичної постановки задачі продовжимо f на $(-\infty,+\infty) \times [0,l] \times [0,T]$, покладаючи для $u \leq 0$

$$f(u,x,t) := f(0,x,t) + 2\alpha |u|^{p-1}.$$

Тоді $f = f(u,x,t)$ визначена і задовольняє умови (3) – (6) на множині $(-\infty,+\infty) \times [0,l] \times [0,T]$.

Введемо простори $H := L^2(0,l)$ з нормою $\|.\|$ та $V := H^1(0,l)$ з нормою $\|\cdot\|_V$.

Умови (2)–(6) дозволяють з незначними змінами повторити міркування з роботи [2, теорема 3.9] і довести розв'язність задачі (1) для довільних початкових даних $u_0 \in H$ в класі $L^p(0,T;\, L^p(0,l)) \cap$ $\cap\, L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$. При цьому єдиність відповідного розв'язку не гарантується, що є наслідком недиференційовного і немонотонного характеру залежності f від u [2].

З'ясуємо, за яких умов для рівня *C*-знань на часовому проміжку $[0,T]$ зберігається деякий гарантований рівень $q(t) > 0$, де $q(\cdot) \in C^1([0,T])$ — фіксована функція. Виявляється, що для цього достатньо вимоги, щоб рівень *C*-знань у початковий момент часу $t = 0$ був не нижче показника $q(0)$ і щоб у кожний момент часу $t \in [0,T]$ швидкість зміни рівня $q(t)$ визначалася реакцією системи на цей рівень. Точніше, справедлива теорема, яка містить основний результат роботи.

Теорема. Нехай для задачі (1) виконані умови (2) – (6) і, крім того,

$$u_0(x) \ge q(0) \ \text{ для м.в. } x \in (0,l), \tag{7}$$

$$f(q(t),x,t) > q'(t) \ \text{ для м.в. } x \in (0,l) \text{ та всіх } t \in [0,T]. \tag{8}$$

Тоді існує розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (1), для якого

$$u(x,t) \ge q(t) \ \text{ для м.в. } x \in (0,l) \text{ та всіх } t \in [0,T]. \tag{9}$$

Доведення. Перейдемо в задачі (1) до нової шуканої функції $v(x,t) =$ $= u(x,t) - q(t)$. Одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + F(v,x,t), \ \ x \in (0,l), \ t \in (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = v_0(x) := u_0(x) - q(0), \end{cases} \tag{10}$$

де $F(v,x,t) = f(v + q(t),x,t) - q'(t)$. Легко показати, що функція F задовольняє умови (3),(4). Оскільки

$$|F(v,x,t)| \le |q'(t)| + C_1(1 + |v + q(t)|^{p-1}),$$

$$F(v,x,t)v \le -\alpha|v + q(t)|^p + |q(t)|C_1(1 + |v + q(t)|^{p-1}) + |q'(t)||v|,$$

а функції q, q' є обмеженими на інтервалі $[0,T]$, то існують константи $C_1 = C_1(T) > 0$, $C_2 = C_2(T) > 0$, $\alpha = \alpha(T) > 0$ такі, що для довільних $(v,x,t) \in (-\infty,+\infty) \times [0,l] \times [0,T]$ виконуються оцінки (5),(6) для функції F. Це дозволяє стверджувати розв'язність задачі (10) на проміжку $[0,T]$ для довільних початкових даних $v_0 \in H$ в класі $L^p(0,T;L^p(0,l)) \cap$ $\cap\, L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$.

Крім того, в силу умови (8) $F(0,x,t)>0$ для м.в. $x\in(0,l)$ та для всіх $t\in[0,T]$.

Теорему буде доведено, якщо ми покажемо, що для початкових даних v_0 з класу

$$H^{+}=\{\xi\in H\,|\,\xi(x)\geq 0 \text{ для м.в. } x\in(0,l)\}$$

існує, принаймні, один розв'язок $v=v(x,t)$ задачі (10), для якого виконується включення

$$v(t)\in H^{+}\quad\forall\, t\in[0,T]. \tag{11}$$

Розглянемо послідовність гладких функцій $\psi_n:[0,+\infty)\mapsto[0,1]$

$$\psi_n(s)=\begin{cases}1,\ 0\leq s\leq n,\\ 0\leq\psi_n(s)\leq 1,\ n\leq s\leq n+1,\\ 0,\ s\geq n+1,\end{cases} \tag{12}$$

і для кожного $n\geq 1$ покладемо

$$F_n(u,x,t)=\psi_n(|u|)F(u,x,t)+(1-\psi_n(|u|))g(u,x,t),$$

де $g(u,x,t)=-|u|^{p-2}u+F(0,x,t)$.

Тоді F_n задовольняє умови (3), (4) і для довільного $A>0$

$$\operatorname{ess}\sup_{x\in(0,l)}\ \sup_{t\in[0,T]}\ \sup_{|u|\leq A}|F_n(u,x,t)-F(u,x,t)|\to 0,\quad n\to\infty.$$

Зокрема, функції F_n задовольняють умови (5),(6) з константами, що не залежать від n і $F_n(0,x,t)=F(0,x,t)\geq 0$.

Крім того, якщо $|u|>n+1$, то

$$F'_{nu}(u,x,t)=g'_u(u,x,t)=-(p-1)|u|^{p-2}\leq 0. \tag{13}$$

Для кожного $n\geq 1$, $k>1$ розглянемо послідовність

$$F_n^k(u,x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_k(s)F_n(u-s,x,t)ds,$$

де $\rho_k\in C_0^{\infty}(-\infty,+\infty)$, $\operatorname{supp}\rho_k\subset\left[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right]$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_k(s)ds=1$, $\rho_k\geq 0$.

Тоді функції F_n^k задовольняють (3), (4) і є гладкими по першій змінній при фіксованих інших. Крім того, легко показати, що функції F_n^k задовольняють умови (5),(6) з константами, що не залежать від n, k [3, лема 2].

Далі, для $|u|>n+2$ в силу оцінки (13)

$$\frac{\partial F_n^k(u,x,t)}{\partial u}=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_k(s)\frac{\partial F_n(u-s,x,t)}{\partial u}ds\leq 0. \tag{14}$$

Для $|u| \le n+2$ в силу оцінки (5)

$$\left|\frac{\partial F_n^k(u,x,t)}{\partial u}\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho_k'(u-s)||F_n(s,x,t)|\,ds \le D(k,n). \tag{15}$$

Тепер при фіксованих $n \ge 1$, $k > 1$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + F_n^k(v,x,t), \ x \in (0,l), \ t \in (0,T), \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{16}$$

Оскільки виконуються умови (2) – (6), а також оцінки (14),(15), то задача (16) має єдиний розв'язок $v_n^k(x,t)$ у класі $L^p(0,T;L^p(0,l)) \cap L^2(0,T;V) \cap$ $\cap\, C([0,T];H)$. Крім того, оскільки константи в умовах (2) – (6) не залежать від n, k, то, використовуючи стандартні апріорні оцінки [1] і лему про компактність, маємо, що для кожного $n \ge 1$ існує функція $v_n(x,t)$ з класу $L^p(0,T;L^p(0,l)) \cap L^2(0,T;V)$ така, що по підпослідовності справедливі граничні рівності при $k \to \infty$

$$\begin{gathered} v_n^k \to v_n \ \text{ в } \ L^2(0,T;H), \\ v_n^k(t) \to v_n(t) \ \textit{в} \ H \ \text{ для м.в. } t \in (0,T), \\ v_n^k(x,t) \to v_n(x,t) \ \text{ для м.в. } (x,t) \in (0,l) \times (0,T). \end{gathered} \tag{17}$$

Звідси $F_n^k(v_n^k(x,t),x,t) \to F_n(v_n(x,t),x,t)$, $k \to \infty$ для м.в. $(x,t) \in$ $\in (0,l) \times (0,T)$ і оскільки послідовність $\{F_n^k(v_n^k,\, x,\, t)\}$ обмежена в $L^q(0,t;L^q(0,l))$, $1/q + 1/p = 1$, то з леми Ліонса виводимо, що $F_n^k(v_n^k,x,t) \to$ $\to F_n(v_n,x,t)$, $k \to \infty$ слабо в $L^q(0,t;L^q(0,l))$. Це дозволяє здійснити граничний перехід в (16) при $k \to \infty$ і одержати, що функція $v_n = v_n(x,t)$ належить класу $L^p(0,T;L^p(0,l)) \cap L^2(0,T;V) \cap C([0,T];H)$ і є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(x)\dfrac{\partial v}{\partial x}) + F_n(v,x,t), \ x \in (0,l), \ t \in (0,T), \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \tag{18}$$

Доведемо, що $\forall\, n \ge 1$ $v_n(x,t) \ge 0$ для м.в. $(x,t) \in (0,l) \times (0,T)$. Для цього домножимо (16) на зрізану функцію $(-v_n^k)^+$, де $u^+ = \max\{u,0\}$. Використовуючи стандартну техніку [3, 5], одержимо нерівність

$$\frac{d}{dt}\left\|(-v_n^k)^+(t)\right\|^2 \le -\int_0^l F_n^k(v_n^k(x,t),x,t)(-v_n^k)^+(x,t)dx\,. \tag{19}$$

При фіксованих n, k розіб'ємо $(0,l)$ на неперетинні вимірні множини Ω_1 і Ω_2 так, що $v_n^k(x,t)\ge 0$ на Ω_1 і $v_n^k(x,t)<0$ на Ω_2. Тоді, використовуючи рівність $u-u^+=-(-u)^+$, з нерівностей (14),(15) одержуємо

$$\int_0^l F_n^k(v_n^k(x,t),x,t)(-v_n^k)^+(x,t)\,dx \ge$$

$$\ge -D(n,k)\int_0^l \left((-v_n^k)^+(x,t)\right)^2 dx + \int_{\Omega_2} F_n^k(0,x,t)(-v_n^k)^+(x,t)dx\,.$$

Зауважимо, що в силу теореми Лебега функція $s\mapsto \int_0^l F(s,x,t)(-v_n)^+(x,t)\,dx$ є неперервною. При строгій оцінці (8) існують такі $\varepsilon>0,\ \delta>0$, що для всіх s, $|s|<\delta$ виконується нерівність

$$\int_0^l F(s,x,t)(-v_n)^+(x,t)dx > \varepsilon\,.$$

Оскільки легко показати, що $(-v_n^k)^+ \to (-v_n)^+$, $k\to\infty$ в H, то для всіх k, $1/k<\delta$ і для всіх s, $|s|<1/k$, виконується нерівність

$$\int_0^l F(s,x,t)(-v_n^k)^+(x,t)dx > 0\,.$$

З наведених оцінок для достатньо великих k одержимо нерівність

$$\frac{d}{dt}\left\|(-v_n^k)^+(t)\right\|^2 \le D(n,k)\left\|(-v_n^k)^+(t)\right\|^2. \tag{20}$$

Тоді з леми Гронуолла та умови $v_0\in H^+$ одержимо, що для всіх $n\ge 1$ і для достатньо великих k $v_n^k(x,t)\ge 0$ для м.в. $(x,t)\in(0,l)\times(0,T)$.

З (17) маємо також ту саму нерівність для функції $v_n(x,t)$.

Тепер для задачі (18), застосовучи попередні міркування, одержуємо, що існує функція $v(x,t)$ з класу $L^p(0,T;L^p(0,l))\cap L^2(0,T;V)$ така, що по підпослідовності справедливі граничні рівності (17) при $n\to\infty$. Звідси $F_n(v_n,x,t)\to F(v,x,t)$, $n\to\infty$ слабо в $L^q(0,t;L^q(0,l))$. Це дозволяє здійснити граничний перехід у (18) при $n\to\infty$ і стверджувати, що функція $v=v(x,t)$ належить классу

$$L^p(0,T;L^p(0,l))\cap L^2(0,T;V)\cap C([0,T];H)\,,$$

є розв'язком задачі (10), і виконується нерівність $v(x,t) \geq 0$ для м.в. $(x,t) \in (0,l) \times (0,T)$. Користуючись неперервністю $v(x,t)$ по змінній t в нормі простору H, легко отримуємо включення $v(t) \in H^+$ для всіх $t \in [0,T]$. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

1. У роботі досліджено загальну математичну модель процесу формування і збереження колективних знань у великих освітніх системах. Доведено теорему про збереження на деякому часовому проміжку заданого гарантованого рівня знань.
2. Отримані результати можуть бути використані при розробці кваліметричних технологій науково-методичних засад незалежного моніторингу якості знань як учнів середніх шкіл, так і студентів вищих навчальних закладів України.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Згуровський М. З., Панкратова Н. Д.* Основи системного аналізу. — Київ: Видавнича група BHV, 2007. — 544 с.
2. *Global* attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness / O.V. Kapustyan, V.S. Mel'nik, J. Valero, V.V. Yasinsky. — Kyiv: Nauk. dumka, 2008. — 215 p.
3. *Kapustyan O.V., Valero J.* On the Kneser property for the Ginzburg-Landau equation and the Lotka-Volterra system with diffusion // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — **325**, № 10. — P. 201–229.
4. *Temam R.* Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — N.Y.: Springer, 1998. — 520 p.
5. *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. — М.: Физматгиз, 2005. — 320 с.
6. *Ясінський В.В.* Системне моделювання процесів накопичення і дисипації знань // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 3. — С. 111–121.

Надійшла 16.12.2008