УДК 517.9

ДЕЯКІ КЛАСИ НЕЛІНІЙНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ У ДУАЛЬНІЙ ПАРІ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

О.П. КОГУТ

Розглядаються класи нелінійних відображень у дуальній парі банахових просторів. Представлено ряд властивостей для операторів псевдомонотонного типу, які потім належним чином впорядковані. Даний апарат може бути застосований при дослідженні властивостей розв'язуючого оператора.

ВСТУП

Задачі фізики та теорії керування часто описуються рівняннями в частинних похідних, які зводяться до операторних рівнянь вигляду $A(y) = f$, розв'язки яких називаються узагальненими розв'язками вихідних задач. У роботах В.С. Мельника, М.З. Згуровського [1–4, 7–9] та І.В. Скрипніка [10] розглядались операторні рівняння та включення з операторами псевдомонотонного типу, для яких доводилась розв'язність. При дослідженні властивостей розв'язуючого оператора (компактнозначність, напівнеперервність зверху, обмеженість, зв'язнозначність і т.п.) доцільною є розробка математичного апарата для дослідження поведінки операторів, які стоять в лівій частині рівняння $A(y) = f$, а саме, одержання нових та впорядкування відомих властивостей для таких операторів. Важливо, що ці властивості мають бути досить загальними і природними.

ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Нехай X — рефлексивний банахів простір, X^* — простір, спряжений до нього.

Означення 1. Будемо називати нелінійний оператор $A: X \to X^*$ λ-псевдомонотонним, якщо для кожної послідовності $\{y_n\} \subset X$ такої, що y_nЗЩy в X , з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, для якої

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle A(y_m), y_m - w \rangle_X \ge \langle A(y),\ y - w \rangle_X$$

для довільного елементу $w \in X$.

Означення 2. Будемо називати нелінійний оператор $A: X \to X^*$ λ_0-псевдомонотонним, якщо для кожної послідовності $\{y_n\} \subset X$ такої, що $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^*, з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, для якої

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle A(y_m), y_m - w \rangle_X \ge \langle A(y), y - w \rangle_X$$

для довільного елементу $w \in X$.

Означення 3. Будемо казати, що нелінійний оператор $A: X \to X^*$ має властивість (S_k), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X з умови

$$\langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \to 0$$

випливає

$$A(y_n) \rightharpoonup A(y) \text{ в } X^*.$$

Означення 4. Будемо казати, що нелінійний оператор $A: X \to X^*$ має властивість (S_{k1}), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^* з умови

$$\langle A(y_n), y_n - y \rangle_X \to 0$$

випливає

$$A(y_n) \rightharpoonup A(y) \text{ в } X^*.$$

Означення 5. Будемо казати, що нелінійний оператор $A: X \to X^*$ має властивість (M), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^* з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n \rangle_X \le \langle d, y \rangle_X$$

випливає

$$d = A(y).$$

Означення 6. Будемо називати нелінійний оператор $A: X \to X^*$ оператором з напівобмеженою варіацією (НОВ), якщо для довільного R і довільних елементів $u, v \in X$ таких, що $\|u\| \le R$, $\|v\| \le R$, справедлива нерівність

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle_X \ge -c(R, \|u - v\|'),$$

де $c(R,t): R_+ \times R_+ \to R$ — неперервна по t функція і

$$\frac{1}{t}\,c(R,t)\to 0,\ \ t\to +0,$$

а $\|\cdot\|'$ є компактною напівнормою відносно норми $\|\cdot\|$ в X.

Означення 7. Будемо називати нелінійний оператор $A : X \to X^*$ оператором із субобмеженою варіацією (СОВ), якщо для довільного R і довільних елементів $u, v \in X$ таких, що $\|u\| \le R,\ \|v\| \le R$, справедлива нерівність

$$\langle A(u) - A(v),\, u - v\rangle_X \ge -c\ (R,\, \|u - v\|')\,,$$

де $c(R,t) : R_+ \times R_+ \to R$ — неперервна по t функція і

$$C(R,0) \equiv 0,$$

а $\|\cdot\|'$ є компактною напівнормою відносно норми $\|\cdot\|$ в X.

Означення 8. Будемо називати нелінійний оператор $A : X \to X^*$ напівмонотонним оператором (НМО), якщо для довільного R і довільних елементів $u, v \in X$ таких, що $\| u \| \le R,\quad \| v \| \le R$, справедлива нерівність

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle_X \ge -c(R, \|u - v\|),$$

де $c(R,t) : R_+ \times R_+ \to R$ — неперервна по t функція і

$$\frac{1}{t}\,c(R,t)\to 0,\ \ t\to +0\,.$$

Означення 9. Будемо казати, що нелінійний оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову α), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такої, що

$$y_m \to y \in X,\ \ m\to\infty\,.$$

Означення 10. Будемо казати, що нелінійний оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову α_0), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^* з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ такої, що

$$y_m \to y \in X,\ \ m\to\infty.$$

Означення 11. Будемо казати, що нелінійний оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову α_1), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n),\ y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\}\subset\{y_n\}$ такої, що

$$\|y_m\|_X \to \|y\|_X,\quad m\to\infty .$$

Означення 12. Будемо казати, що нелінійний оператор $A: X \to X^*$ задовольняє умову α_{1_0}), якщо для кожної послідовності $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^* з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\}\subset\{y_n\}$ такої, що

$$\|y_m\|_X \to \|y\|_X,\quad m\to\infty .$$

Зрозуміло, що властивість α_1) слабша за властивості α) та α_0), та якщо простір X є рівномірно опуклим, то в ньому властивості α) з α_1) та α_0) з α_{1_0}) будуть співпадати.

Розглянемо банахів простір Y та спряжений до нього простір Y^*. В Y^* розглянемо деяку множину $U \subset Y^*$. Будемо вважати, що множина U є $*$-слабко замкненою.

Означення 13. Будемо називати нелінійний оператор $A: U\times X \to X^*$ λ-квазімонотонним, якщо для довільних послідовностей $\{y_n\}\subset X$ та $\{u_n\}\subset U$ таких, що $y_n \rightharpoonup y$ в X та $u_n \rightharpoonup u$ в Y^*, з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{u_m, y_m\}\subset\{u_n, y_n\}$, для якої

$$\underline{\lim}_{m\to\infty}\langle A(u_m, y_m), y_m - w\rangle_X \ge \langle A(u, y), y - w\rangle_X$$

при всіх $w\in X$.

Означення 14. Будемо називати нелінійний оператор $A: U\times X \to X^*$ λ_0-квазімонотонним, якщо для довільних послідовностей $\{y_n\}\subset X$ та $\{u_n\}\subset U$ таких, що $y_n \rightharpoonup y$ в X та $u_n \rightharpoonup u$ в Y^* і $A(u_n, y_n) \rightharpoonup d$ в X^*, з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовості $\{u_m, y_m\}\subset\{u_n, y_n\}$, для якої

$$\underline{\lim}_{m\to\infty}\langle A(u_m, y_m), y_m - w\rangle_X \ge \langle A(u, y), y - w\rangle_X$$

при всіх $w \in X$.

Означення 15. Будемо казати, що нелінійний оператор $A : U \times X \to X^*$ задовольняє умову β), якщо для довільних послідовностей $\{y_n\} \subset X$ та $\{u_n\} \subset U$ таких, що $y_n \rightharpoonup y$ в X та $u_n \rightharpoonup u$ в Y^*, з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(u_n, y_n),\ y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$

$$y_m \to y \in X .$$

Означення 16. Будемо казати, що нелінійний оператор $A : U \times X \to X^*$ задовольняє умову β_0), якщо для довільних послідовностей $\{y_n\} \subset X$ та $\{u_n\} \subset U$ таких, що $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(u_n, y_n) \rightharpoonup d$ в X^* та $u_n \rightharpoonup u$ в Y^*, з умови

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X \le 0$$

випливає існування підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$

$$y_m \to y \in X .$$

Означення 17. Нехай задані нелінійні оператори $A : X \times Y \to Y^*$ і $B : Y \times X \to X^*$. Означимо $\mathrm{A} : X \times Y \to X^* \times Y^*$ діагональний добуток операторів A і B

$$\mathrm{A}(x, y) = \{B(y, x); A(x, y)\}.$$

(Позначимо $\mathrm{A} = A\Delta B$).
Впорядкуємо оператори означених типів.

ОСНОВНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Зауваження 1. Зрозуміло, якщо оператор $A : X \to X^*$ є λ-псевдомонотонним, то він є і λ_0-псевдомонотонним. Якщо задовольняє умову α), то задовольняє і умову α_0). Аналогічно, якщо оператор $A : U \times X \to X^*$ є λ-квазімонотонним, то він є і λ_0-квазімонотонним. Якщо задовольняє умову β , то задовольняє і умову β_0 .

Твердження 1. Нехай нелінійні оператори $A_0, A_1 : X \to X^*$ є λ-псевдомонотонними. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж є λ-псевдомонотонним оператором.

Доведення. Розглянемо послідовність $\{y_n\}$ таку, що $y_n \rightharpoonup y$ в X , і

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y\rangle_X .$$

Тоді

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_0(y_n), y_n - y\rangle_X + \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_1(y_n), y_n - y\rangle_X \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X , \tag{1}$$

де $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ — підпослідовність, яка реалізує нижню границю в (1).

Спочатку припустимо, що $\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(y_m),\ y_m - y\rangle_X \leq 0$. Оскільки оператор A_0 є λ-псевдомонотонним, то існує підпослідовність $\{y_k\} \subset \{y_m\}$, для якої виконується

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \langle A(y_k), y_k - w\rangle_X \geq \langle A(y), y - w\rangle_X ,\ \forall\, w \in X . \tag{2}$$

Якщо замість w в (2) підставити елемент y, то отримаємо

$$\exists \lim_{k\to\infty} \langle A_0(y_k), y_k - y\rangle_X = 0 ,$$

а, значить, з (1) випливає

$$\lim_{k\to\infty} \langle A_1(y_k), y_k - y\rangle_X \leq 0.$$

Користуючись тим, що оператор A_1 є λ-псевдомонотонним, отримаємо підпослідовність $\{y_l\} \subset \{y_k\}$, для якої

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A(y_l), y_l - w\rangle_X \geq \langle A(y), y - w\rangle_X ,\ \forall\, w \in X . \tag{3}$$

Тепер розглянемо

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A(y_l), y_l - w\rangle_X \geq$$

$$\geq \underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A_0(y_l), y_l - w\rangle_X + \underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A_1(y_l), y_l - w\rangle_X \geq$$

$$\geq \langle A_0(y), y - w\rangle_X + \langle A_1(y), y - w\rangle_X = \langle A(y), y - w\rangle_X ,\ \forall\, w \in X . \tag{4}$$

Отже, шукану підпослідовність $\{y_l\} \subset \{y_n\}$ з означення λ-псевдомонотонності знайдено. Твердження доведено.

Твердження 2. Нехай нелінійні оператори $A_0, A_1 : X \to X^*$ є λ_0-псевдомонотонними і, принаймні, один з них є обмеженим. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж є λ_0-псевдомонотонним оператором.

Доведення. Припустимо, що один із операторів A_0, A_1 обмежений. Тоді з $A_0(y_n) + A_1(y_n) \rightharpoonup d \in X^*$ за теоремою Банаха-Алаоглу випливає, що існують $d_1, d_2 \in X$ такі, що $A_0(y_n) \rightharpoonup d_1$, $A_1(y_n) \rightharpoonup d_2 \in X^*$, принаймні, з точністю до підпослідовності. Далі доведення аналогічне доведенню твердження 1.

Тепер покажемо, що, збуривши оператор, який задовольняє одну з умов α), α_0), α_1), α_{1_0}) λ-псевдомонотонним оператором, ми отримаємо оператор, який також буде задовольняти умову α), α_0), α_1), α_{1_0}), відповідно.

Твердження 3. Нехай нелінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ задовольняє умову α), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є λ-псевдомонотонним. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж буде задовольняти умову α).

Доведення. Розглянемо послідовність $\{y_n\}$ таку, що $y_n \rightharpoonup y$ в X, і для неї розглянемо верхню границю.

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y\rangle_X =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle A_0(y_n), y_n - y\rangle_X + \langle A_1(y_n), y_n - y\rangle_X) \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_0(y_n), y_n - y\rangle_X + \underline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_1(y_n), y_n - y\rangle_X \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle, \tag{5}$$

де $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ — підпослідовність, яка реалізує нижню границю в (5). Спочатку припустимо, що $\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$. Оскільки оператор A_0 задовольняє властивість α), то існує підпослідовність $\{y_k\} \subset \{y_m\}$, для якої виконується

$$y_k \to y \text{ в } X.$$

Отже ми відразу знайшли шукану послідовність. Якщо ж в (5) $\lim\limits_{m\to\infty} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$, то, користуючись тим, що оператор A_1 є λ-псевдомонотонним, отримаємо підпослідовність $\{y_l\} \subset \{y_m\}$, для якої

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A_1(y_l), y_l - w\rangle_X \geq \langle A_1(y), y - w\rangle_X, \ \forall w \in X. \tag{6}$$

Підставивши в (6) y замість ω, отримаємо

$$\exists \lim_{l\to\infty} \langle A(y_l), y_l - y\rangle_X \geq 0$$

і порівнюючи з припущенням $\lim\limits_{m\to\infty} \langle A_1(y_m),\, y_m - y\rangle_X \leq 0$, отримаємо $\lim\limits_{l\to\infty} \langle A_1(y_l), y_l - y\rangle_X = 0$. І ми знову приходимо до першого випадку:

$\overline{\lim_{l\to\infty}}\langle A_0(y_l), y_l - y\rangle_X \le 0$, звідки знаходимо шукану сильно збіжну підпослідовність. Твердження доведено.

Твердження 4. Нехай нелінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ задовольняє умову α_0), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є λ_0-псевдомонотонним і, принаймні, один з них є обмеженим. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж задовольняє умову α_0).

Доведення. Припустимо, що один із операторів A_0, A_1 обмежений. Тоді з $A_0(y_n) + A_1(y_n) \rightharpoonup d \in X$ отримаємо, що існують d_1, $d_2 \in X$ такі, що $A_0(y_n) \rightharpoonup d_1$, $A_1(y_n) \rightharpoonup d_2 \in X$, принаймні, по підпослідовності. Далі доведення аналогічне доведенню твердження 3.

Зауваження 2. Зрозуміло, якщо оператор $A : X \to X^*$ задовольняє умову α (α_0) і є при цьому демінеперервним, то він є і λ (λ_0)-псевдомонотонним.

Твердження 5. Нехай нелінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ задовольняє умову α_1), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є λ-псевдомонотонним. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж буде задовольняти умову α_1).

Доведення. Розглянемо послідовність $\{y_n\} \subset X$ таку, що $y_n \rightharpoonup y$ в X, і для неї, як і в твердженні 3, має місце співвідношення

$$0 \ge \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X . \tag{7}$$

Спочатку припустимо, що $\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$. Оскільки оператор A_0 задовольняє властивість α_1), то існує підпослідовність $\{y_k\} \subset \{y_m\}$, для якої

$$\|y_k\|_X \to \|y\|_X, \quad k \to \infty . \tag{8}$$

Отже, ми відразу знайшли шукану послідовність. Якщо ж в (7) $\lim_{m\to\infty}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$, то, користуючись тим, що оператор A_1 є λ-псевдомонотонним, провівши міркування, як і в твердженні 3, ми знову приходимо до першого випадку, звідки знаходимо шукану підпослідовність. Твердження доведено.

Твердження 6. Нехай нелінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ задовольняє умову α_{1_0}), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є λ_0-псевдомонотонним і, принаймні, один з них є обмеженим. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

задовольняє умову α_{1_0}).

Доведення. Згідно із обмеженістю хоча б одного з операторів із $A_0(y_n) + A_1(y_n) \rightharpoonup d \in X$ випливає, що існують d_1, $d_2 \in X$ такі, що $A_0(y_n) \rightharpoonup d_1$, $A_1(y_n) \rightharpoonup d_2 \in X$, принаймні, з точністю до підпослідовності. Далі доведення аналогічне доведенню твердження 5.

Зауваження 3. Якщо оператор $A: X \to X^*$ задовольняє властивість S_k (S_{k1}), то цю ж саму властивість задовольняє і оператор ($-A$).

Далі розглянемо відображення, визначені на добутку $U \times X$.

Твердження 7. Нехай нелінійний оператор $A_0 : U \times X \to X^*$ задовольняє умову β), а оператор $A_1 : U \times X \to X^*$ є λ -квазімонотонним. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(u, y) = A_0(u, y) + A_1(u, y)$$

теж буде задовольняти умову β).

Доведення. Розглянемо послідовності $\{u_n, y_n\}$ такі, що $y_n \rightharpoonup y$ в X, $u_n \rightharpoonup u$ в U , і для них розглянемо верхню границю.

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(u_n, y_n), y_n - y \rangle_X =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle A_0(u_n, y_n), y_n - y \rangle_X + \langle A_1(u_n, y_n), y_n - y \rangle_X) \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_0(u_n, y_n), y_n - y \rangle_X + \underline{\lim_{x\to\infty}} \langle A_1(u_n, y_n), y_n - y \rangle_X \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(u_m, y_m), y_m - y \rangle_X + \lim_{m\to\infty} \langle A_1(u_m, y_m), y_m - y \rangle_X, \qquad (9)$$

де $\{u_m, y_m\} \subset \{u_n, y_n\}$ — підпослідовність, яка реалізує нижню границю в (9). Спочатку припустимо, що

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_0(u_m, y_m), y_m - y \rangle_X \leq 0 .$$

Оскільки оператор A_0 задовольняє властивість β), то існує підпослідовність $\{y_k\} \subset \{y_m\}$, для якої виконується $y_k \to y$, $n \to \infty$ в X . Отже, ми відразу знайшли шукану послідовність. Якщо ж в (9) $\lim_{m\to\infty} \langle A_1(y_m),$ $y_m - y \rangle_X \leq 0$, то, користуючись тим, що оператор A_1 є λ -квазімонотонним, отримаємо підпослідовність $\{u_l, y_l\} \subset \{u_m, y_m\}$, для якої

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \langle A(u_l, y_l),\ y_l - w \rangle_X \geq \langle A(u, y),\ y - w \rangle_X,\ \forall w \in X . \qquad (10)$$

Підставивши в (10) y замість ω , отримаємо

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\langle A(u_l, y_l), y_l - y\rangle_X \geq 0$$

і порівнюючи з припущенням $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_1(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$, отримаємо $\lim\limits_{l\to\infty}\langle A_1(u_l, y_l), y_l - y\rangle_X = 0$. І ми знову приходимо до першого випадку: $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\langle A_0(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$, звідки знаходимо шукану сильно збіжну підпослідовність. Твердження доведено.

Твердження 8. Нехай нелінійний оператор $A_0 : X \to X^*$ задовольняє умову α), а оператор $A_1 : U\times X \to X^*$ є λ-квазімонотонним. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1 : U\times X \to X^*$

$$A(u, y) = A_0(u, y) + A_1(u, y), \quad A_0(u, y) = A_0(y), \ \forall u \in U$$

буде задовольняти умову β).

Доведення. Розглянемо послідовності $\{u_n, y_n\}$ такі, що $y_n \rightharpoonup y$ в X, $u_n \rightharpoonup u$ в U, і для них розглянемо верхню границю.

$$0 \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}(\langle A_0(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X + \langle A_1(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X) \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A_0(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X + \underline{\lim}_{n\to\infty}\langle A_1(u_n, y_n), y_n - y\rangle_X \geq$$

$$\geq \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X + \lim_{m\to\infty}\langle A_1(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X, \tag{11}$$

де $\{u_m, y_m\} \subset \{u_n, y_n\}$ — підпослідовність, яка реалізує нижню границю в (11). Спочатку припустимо, що

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X = \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X) \leq 0.$$

Оскільки оператор A_0 задовольняє властивість α), то існує підпослідовність $\{y_k\} \subset \{y_m\}$, для якої виконується $y_k \to y,\ n\to\infty$ в X. Отже, ми відразу знайшли шукану сильно збіжну підпослідовність. Якщо ж в (11) $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$, то, користуючись тим, що оператор A_1 є λ-квазімонотонним, отримаємо підпослідовність $\{u_l, y_l\} \subset \{u_m, y_m\}$, для якої

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\langle A(u_l, y_l), y_l - w\rangle_X \geq \langle A(u, y), y - w\rangle_X, \ \forall w \in X. \tag{12}$$

Підставивши в (12) y замість ω, отримаємо

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\langle A(u_l, y_l),\ y_l - y\rangle_X \geq 0$$

і порівнюючи з припущенням $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_1(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X \leq 0$, отримаємо $\lim\limits_{l\to\infty}\langle A_1(u_l, y_l), y_l - y\rangle_X = 0$. І ми знову приходимо до першого випадку:

$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_0(u_m, y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$, де знаходимо шукану сильно збіжну підпослідовність. Твердження доведено.

Твердження 9. Нехай нелінійні оператори $A: X\times Y \to Y^*$ і $B: Y\times \times X \to X^*$ є λ-квазімонотонними, тоді їх діагональний добуток $A = A\Delta B$: $: X\times Y \to X^*\times Y^*$ є $\lambda-$ псевдомонотонним оператором.

Доведення. Нехай послідовність $x_n \rightharpoonup x$, $n\to\infty$ в X, $y_n \rightharpoonup y$, $n\to\infty$ в Y. І нехай для них виконується співвідношення

$$0 \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\langle \mathrm{A}(x_n, y_n), (x_n, y_n) - (x, y)\rangle_{X\times Y} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\big(\langle A(x_n, y_n), y_n - y\rangle_Y + \langle B(y_n, x_n), x_n - x\rangle_X\big) \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(x_n, y_n), y_n - y\rangle_Y + \underline{\lim}_{n\to\infty}\langle B(y_n, x_n), x_n - x\rangle_X \ge$$

$$\ge \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A(x_m, y_m), y_m - y\rangle_Y + \lim_{m\to\infty}\langle B(y_m, x_m), x_m - x\rangle_X, \tag{13}$$

де підпослідовність $\{x_m, y_m\}\subset\{x_n, y_n\}$ реалізує нижню границю в (13). Припустимо, що

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A(x_m, y_m), y_m - y\rangle_Y \le 0,$$

тоді з $\lambda-$ квазімонотонності оператора А випливає, що існує така підпослідовність $\{x_k, y_k\}\subset\{x_m, y_m\}$, для якої виконується співвідношення

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}\langle A(x_k, y_k), y_k - w\rangle_Y \ge \langle A(x, y), y - w\rangle_Y, \quad \forall\, w\in Y. \tag{14}$$

Підставляючи у (14) елемент y замість w і порівнюючи з даним припущенням, отримуємо

$$\lim_{k\to\infty}\langle A(x_k, y_k), y_k - y\rangle_Y = 0,$$

і тоді з (13) маємо

$$\lim_{m\to\infty}\langle B(y_m, x_m), x_m - x\rangle_X = \lim_{k\to\infty}\langle B(y_k, x_k), x_k - x\rangle_X \le 0.$$

Із λ-квазімонотонності оператора B випливає, що існує така підпослідовність $\{x_l, y_l\}\subset\{x_k, y_k\}$, для якої виконується співвідношення

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\langle B(y_l, x_l), x_l - z\rangle_Y \ge \langle B(y, x), x - z\rangle_Y, \quad \forall\, z\in X. \tag{15}$$

Підсумовуючи співвідношення (15) і (14), отримуємо

$$\underline{\lim}_{l\to\infty}\langle \mathrm{A}(x_l, y_l), (x_l, y_l) - (z, w)\rangle_{X\times Y} \ge$$

$$\ge \underline{\lim}_{l\to\infty}\langle B(x_l, y_l), x_l - x\rangle + \underline{\lim}_{l\to\infty}\langle A(x_l, y_l), y_l - y\rangle \ge$$

$$\geq \varliminf_{l\to\infty}\langle B(x_l, y_l), x_l - x\rangle + \varliminf_{k\to\infty}\langle A(x_k, y_k), y_k - y\rangle \geq$$

$$\geq \langle B(y,x), x-z\rangle_X + \langle A(x,y), y-w\rangle_Y =$$

$$= \langle \mathrm{A}(x,y),(x,y)-(z,w)\rangle_{X\times Y}, \quad \forall z\in X, w\in Y.$$

Отже, за означенням оператор A є λ-псевдомонотонним. Твердження доведено.

Твердження 10. Нехай $A: X \to X^*$ — нелінійний оператор. Справедливим є таке впорядкуванння відомих нам властивостей:

$$\lambda - \Pi M \Rightarrow \lambda_0 - \Pi M \Rightarrow (M) \Rightarrow (S_{k1}).$$

Доведення. Перша імплікація є очевидною, доведемо другу. Нехай виконуються умови

$$y_n \rightharpoonup y, \quad A(y_n) \rightharpoonup d, \quad n\to\infty, \quad \varlimsup_{n\to\infty}\langle A(y_n), y_n\rangle_X \leq \langle d, y\rangle_X .$$

Тоді

$$\varlimsup_{n\to\infty}(\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X = \varlimsup_{n\to\infty}(\langle A(y_n), y_n\rangle_X - \langle A(y_n), y\rangle_X) \leq$$

$$\leq \varlimsup_{n\to\infty}(\langle d, y\rangle_X - \langle A(y_n), y\rangle_X) = \lim_{n\to\infty}\langle d - A(y_n), y\rangle_X = 0 .$$

З того, що оператор A є λ_0-псевдомонотонним, отримуємо підпослідовність $\{y_m\}\subset\{y_n\}$, для якої виконується співвідношення

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), y_m - w\rangle_X \geq \langle A(y), y-w\rangle_X, \quad \forall w\in X.$$

Перетворимо його.

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), y_m - w\rangle_X \geq \varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), y_m\rangle_X - \varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), w\rangle_X \geq$$

$$\geq \langle A(y), y\rangle_X - \langle A(y), w\rangle_X, \quad \forall w\in X;$$

$$\langle A(y), w\rangle_X - \varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), w\rangle_X \geq \langle A(y), y\rangle_X - \varliminf_{m\to\infty}\langle A(y_m), y_m\rangle_X;$$

$$\varliminf_{m\to\infty}\langle A(y) - A(y_m), w\rangle_X \geq \langle A(y) - d, y\rangle_X;$$

$$\langle A(y) - d, w - y\rangle_X \geq 0, \quad \forall w\in X .$$

А це означає, що $A(y) = d$. Другу імплікацію доведено.

Доведемо третю. Нехай виконуються умови

$$y_n \rightharpoonup y \text{ в } X, \; A(y_n) \rightharpoonup A(y) \text{ в } X^* \quad \langle A(y_n), y_n\rangle_X \to 0, \quad n\to\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X = \lim_{n\to\infty}\langle A(y_n), y_n\rangle_X - \langle d, y\rangle_X = 0 .$$

З того, що оператор A задовольняє умову (M), отримуємо $d = A(y)$. Оскільки підпослідовність ми обирали довільно, то і третю імплікацію вважаємо доведеною. Твердження доведено.

Твердження 11. Нехай оператор $A_0 : X \to X^*$ має властивість α), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є оператором з НОВ. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

буде мати властивість α).

Доведення. Розглянемо послідовність $y_n \rightharpoonup y,\ n \to \infty$. Слабко збіжні послідовності є обмеженими, отже існує $R \in R$ таке, що $\|y_n\| \le R$. І нехай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0\,,$$

$$0 \ge \underline{\lim_{x\to\infty}} \langle A_0(y_n), y_n - y\rangle_X + \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle A_1(y_n), y_n - y\rangle_X =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X + \overline{\lim_{m\to\infty}} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X\,, \tag{16}$$

де $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ — підпослідовність, яка реалізує нижню границю в (16). Якщо припустити, що $\lim\limits_{m\to\infty} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$, то, користуючись властивістю α), ми одразу знайдемо шукану сильно збіжну підпослідовність.

Припустимо натомість, що $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$. Оскільки A_1 — оператор з НОВ, то

$$\langle A_1(y_m) - A_1(y), y_m - y\rangle_X \ge c(R, \|y_m - y\|')\,,$$

$$\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \ge \langle A_1(y),\ y_m - y\rangle_X - c(R, \|y_m - y\|'). \tag{17}$$

Перейдемо до нижньої границі при $n \to \infty$. У правій частині стоять збіжні послідовності, тому там границі будуть звичайні.

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \ge -c(R,0) = 0\,.$$

Остання нерівність разом з припущенням дають

$$\lim_{m\to\infty} \langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X = 0,$$

отже $\lim\limits_{m\to\infty} \langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$, і ми приходимо до попереднього пункту. Твердження доведено.

Нехай оператор $A_0 : X \to X^*$ має властивість α_1), а оператор $A_1 : X \to X^*$ є оператором з НОВ. Тоді їх сума $A = A_0 + A_1$

$$A(y) = A_0(y) + A_1(y)$$

теж буде мати властивість α_1). Розглянемо послідовність $y_n \rightharpoonup y,\ n \to \infty$. Слабко збіжні послідовності є обмеженими, отже існує $R \in R$ таке, що $\|y_n\| \le R$. І нехай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \le 0\,.$$

Тоді

$$0 \ge \lim_{m\to\infty}\langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X + \overline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X\,. \tag{18}$$

Якщо припустити, що в (18) $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_0(y_m),\ y_m - y\rangle_X \le 0$, то, користуючись властивістю $\alpha_1)$, ми одразу знайдемо шукану підпослідовність, для якої $\|y_m\|_X \to \|y\|_X$, $m \to \infty$. Припустимо натомість, що $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\langle A_1(y_m),$ $y_m - y\rangle_X \le 0$. Оскільки A_1 — оператор з НОВ, то

$$\langle A_1(y_m) - A_1(y), y_m - y\rangle_X \ge c(R, \|y_m - y\|')\,,$$

$$\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \ge \langle A_1(y), y_m - y\rangle_X - c(R, \|y_m - y\|'). \tag{19}$$

Перейдемо в (19) до нижньої границі при $n \to \infty$. У правій частині стоять збіжні послідовності, тому там границі будуть звичайні.

$$\underline{\lim_{m\to\infty}}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X \ge -c(R,0) = 0.$$

Остання нерівність разом з припущенням дають

$$\lim_{m\to\infty}\langle A_1(y_m), y_m - y\rangle_X = 0,$$

отже, $\lim\limits_{m\to\infty}\langle A_0(y_m), y_m - y\rangle_X \le 0$, і ми приходимо до попереднього пункту. Твердження доведено.

Твердження 12. Нехай Y — банахів простір, в який компактно вкладено простір X (тоді, як відомо, $Y^* \subset X^*$ з компактним і неперервним вкладенням). Розглянемо оператор $A : X \to X^*$, $A = A_0 + A_1$, де $A_0 : X \to \to X^*$ — монотонне відображення. Оператор $A_1 : Y \to X^*$ такий, що для $\forall\, y_1, y_2 \in Y$ та $y_1, y_2 \in \overline{B}_r \subset X$, виконується умова

$$\|A_1(y_1) - A_1(y_2)\|_{X^*} \le p_r\big(\|y_1 - y_2\|_Y\big),\ \text{ де }\ p_r(s) = \sum_{2\le\alpha\le n(r)} \lambda_\alpha(r) s^\alpha\,.$$

Оператор A_1, заданий таким чином, називається локально-поліноміальним. Тоді оператор $A = A_0 + A_1$ є оператором з НОВ.

Доведення. Розглянемо два довільні елементи $y_1, y_2 \in Y$, і нехай вони лежать в деякій кулі $y_1, y_2 \in \overline{B}_r \subset X.$ Користуючись монотонністю оператора A_0, будемо мати

$$\langle A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2\rangle_X =$$

$$= \langle A_0(y_1) - A_0(y_2), y_1 - y_2\rangle_X + \langle A_1(y_1) - A_1(y_2), y_1 - y_2\rangle_X \ge$$

$$\ge \langle A_1(y_1) - A_1(y_2), y_1 - y_2\rangle_X\,. \tag{20}$$

З того, що опрератор A_1 — локально-поліноміальний, отримаємо

$$\langle A_1(y_2)-A_1(y_1), y_1-y_2\rangle_X \le \|A_1(y_2)-A_1(y_1)\|_{X^*}\|y_1-y_2\|_X \le$$

$$\le 2r\|A_1(y_2)-A_1(y_1)\|_{X^*} \le 2r\,p_r(\|y_1-y_2\|_Y) = 2r\,p_r(\|y_1-y_2\|'_X)\,.$$

Якщо в якості функції $c(r,t)$ ми візьмемо функцію $2r\,p_r(t)$ (очевидно, що вона задовольняє всі умови, які накладаються на функцію $c(\cdot,\cdot)$ в означенні (6), то, продовжуючи низку нерівностей (20), отримаємо

$$\langle A_1(y_1)-A_1(y_2), y_1-y_2\rangle_X \ge -c(r,\|y_1-y_2\|'_X).$$

Отже, оператор A дійсно є оператором з НОВ. Твердження доведено.

Твердження 13. Нехай Y — банахів простір, в який компактно вкладено простір X. Розглянемо оператор $A: X\to X^*$, $A=A_0+A_1$, де $A_0: X\to X^*$ — монотонне відображення. Нехай для оператора $A_1: Y\to$ $\to X^*$ при $\forall\, y_1, y_2\in Y$ таких, що $y_1, y_2\in \overline{B}_r\subset X$, виконується умова

$$\|A_1(y_1)-A_1(y_2)\|_{X^*} \le p_r\left(\|y_1-y_2\|_Y\right),\ \text{де}\quad p_r(s)=\sum_{1\le\alpha\le n(r)}\lambda_\alpha(r)s^\alpha\,.$$

Оператор A_1, заданий таким чином, називається локально-поліноміальним. Тоді оператор $A=A_0+A_1$ є оператором із СОВ.

Доведення. Розглянемо два довільні елементи $y_1, y_2\in Y$, і нехай вони лежать в деякій кулі $y_1, y_2\in\overline{B}_r\subset X$. Повторюючи міркування з попереднього твердження, візьмемо в якості функції $c(r,t)=2r\,p_r(t)$ (очевидно, що вона задовольняє умови на функцію $c(\cdot,\cdot)$ в означенні 7). Тоді

$$\langle A(y_1)-A(y_2),\ y_1-y_2\rangle_X \ge -c(r,\|y_1-y_2\|'_X).$$

Отже, оператор A дійсно є оператором із СОВ. Твердження доведено.

ВИСНОВКИ

Для класів нелінійних відображень псевдомонотонного типу наведено і впорядковано властивості λ (λ_0)-псевдомонотонності, а також α), α_1), α_0), (S_k), (M).

Показано, що при збуренні оператора, який має властивість α), операторами з НОВ, λ (λ_0)-псевдомонотонного типів ця властивість зберігається.

Узагальнено властивості α), α_0) та λ (λ_0)-псевдомонотонності на випадок, коли оператор залежить від параметра.

Наведено важливі приклади операторів з НОВ та СОВ.

Одержані результати у поєднанні з результатами робіт [1–10] дозволяють суттєво розширити клас задач, для яких існує строгий розв'язуючий оператор, що має ряд нових топологічних властивостей.

Partially Supported by State Fund of Fundamental Investigations Grant № Ф.1.029

ЛІТЕРАТУРА

1. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 57–69.
2. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 70–85.
3. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наук. думка, 1999. — 630 с.
4. *Згуровский М.З., Мельник В.С., Новиков А.Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 590 с.
5. *Иваненко В.И., Мельник В.С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 324 с.
6. *Касьянов П.О., Мельник В.С.* Метод Фаедо-Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2.** – № 1. — С. 103–126.
7. *Мельник В.С.* Про критичні точки деяких класів багатозначних відображень // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 2. — С. 87–98.
8. *Мельник В.С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, № 11. — С. 1513–1523.
9. *Мельник В.С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Укр. матем. журн. — 2006. — **58**, № 2. — С. 184–194. — № 4. — С. 505–522.
10. *Скрыпник И.В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. — М.: Наука, 1990. — 442 с.

Надійшла 15.05.2007