МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 519.21
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.2.10

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФУЗІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ

В.К. ЯСИНСЬКИЙ, І.В. ЮРЧЕНКО

Анотація. Розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу. Отримано достатні умови на коефіцієнти нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ), які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку. Методика доведення грунтується на результатах О.М. Станжицького та А.О. Цуканової щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Доведено існування «м'якого розв'язку» НДСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, які передбачається розглядати в подальших роботах.

Ключові слова: задача Коші, стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних, існування розв'язку, випадкові збурення.

ВСТУП

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференцальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] О.М. Станжицький та А.О. Цуканова отримали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. У цій роботі розглядається питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано НДСДРРНТ у частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу,

$$d\left(u(t,x)+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)u(t-\tau,y)dy\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(\gamma_j)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}dt+\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\sigma(t,u(t-\tau,x))dw(t,x), \qquad (1)$$

для $t\in(0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t,x)=\psi(t,x), \quad \forall t\in[-\tau,0], \qquad (2)$$

де $\gamma_j\equiv\gamma_j(\omega)\in\mathbf{R}^1$, $j=\overline{1,r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t,x)$ випадкові величини; зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j=\overline{1,r+1}$ — берівські функції, додатні, попарно незалежні та незалежні від вінерівського процесу і початкової функції; $T\in(0,\infty)$ — фіксований дійсний час, $\tau>0$, випадковий r-вимірний оператор Лапласа [1, 4]:

$$\Delta_x(\omega)\equiv\sum_{j=1}^{r}\varphi_j(x_j)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}, \qquad (3)$$

де $w(t,x)$ — $L_2(\mathbf{R}^r)$-вимірний Q-вінерівський процес [2]; $\sigma:[0,T]\times\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ і $b:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ — деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi:[-\tau,0]\times\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^1$ — функція початкових даних.

ОБГОВОРЕННЯ ПОПЕРЕДНІХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТА ОЗНАЧЕННЯ

Наведемо декілька тверджень із праць [9, 10, 11, 12].

Лема 1. [12, с.188]**.** Оператор

$$S(\mathrm{t}):L_2(\mathbf{R}^r)\to L_2(\mathbf{R}^r)$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1 [9]) за початковими даними (2) з імовірністю 1

$$d(u(t,x))+\int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz=$$

$$=\Delta_x u(t,x)dt,$$

за правилом

$$u(t,x)=(s(t)g(\bullet))(x)=\int_{\mathbf{R}^r} K(t,x-y)g(\bullet)dy$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискальною, тобто

$$\left\|(S(t)g(\bullet))(x)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\le\left\|g(x)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \qquad (4)$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t \ge t_0 \ge 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$-значним Q-вінерівським процесом

$$w(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t),$$

де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ — незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty.$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \overline{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n \in \{1,2,...\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbf{R}^r} |e_n(x)| \le 1.$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ усіх $L_2(\mathbf{R}^r)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi(\bullet) \equiv \equiv \Phi(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\Phi(\bullet)\|_{B_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0 \le t \le T} \mathbf{E} \|\Phi(t,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}}.$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t,x,\omega) : [-\tau, T] \times \times \mathbf{R}^r \times \Omega \to \mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

1) u є F_T-вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r$, $\omega \in \Omega$;

2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$u(t,x,\omega) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x-y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,y) u(t-\tau, y) dy -$$

$$- \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{r} \varphi_j(\gamma_j) \Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t-\mathrm{s}, x-y) \times \int_{\mathbf{R}^r} b(\mathrm{s}, y, z) u(\mathrm{s}-\tau, z) dz dy \right) ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \times \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s)$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

3) існує норма

$$E\left\{ \int_0^{\mathrm{T}} \|u(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} dt \right\} < \infty. \tag{5}$$

Лема 2 [10]. Вираз (5) для випадкової функції $u(t,x,\omega)$ є нормою.

Основний результат

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $\left(\Omega, F, \{F_t, t \ge t_0\}, \mathbf{P}\right)$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї роботи.

Основне твердження. Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнт $\sigma \equiv \sigma(t,u,y)$ є:

• вимірним за всіма аргументами;

• задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом $|\sigma(t,u,x) - \sigma(t,v,x)| \le |L| u - v|$ для $\forall t \in [0,T]$, $u, v \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

• F_0-вимірною відносно аргумента $t \in [0,T]$;

• незалежною від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t,\omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0,T]$;

• незалежною від зовнішніх збурень $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$;

• має норму

$$\sup_{-\tau \le t \le 0} \mathbf{E} \|\psi(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} < \infty; \tag{6}$$

3) функція $b \equiv b(t,x,y)$ задовольняє умови:

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y) dy} dx = K_1; \quad \sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y) dy dx = K_2;$$

• для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i, j\} \subset \{1,2,...,r\}$;

• матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t,x,y)| + \|D_x^2 b(t,x,y)\| \le Z(t,x,y) \tag{7}$$

для $\forall t \in [0,T] \subset [0,\infty)$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $Z : [0,T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to [0,\infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтеграла

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z(t,x,y) dx dy = K_3 < \infty; \tag{8}$$

4) для функції $Z(t,x,y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|Z(t,x,z) - Z(t,x_0,z)| \le \zeta(t,z,x_0,\delta) |x - x_0|, \tag{9}$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t,z,x_0,\delta)$ для $\forall t \in [0,T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \le t \le T} \zeta(t,\cdot,x_0,\delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \delta \in \mathbf{R}_+; \tag{10}$$

5) зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j),\ \ j=\overline{1,r+1}$,

• попарно незалежні;

• незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції $\psi(t,x)\equiv\psi(t,x,\omega)\in\mathbf{R}^1$;

• виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішніх збурень $\mathbf{E}\{\varphi_{r+1}^2\}\le K_4<\infty$.

Тоді задача (1), (2) для НДСДРРНТ має єдиний м'який розв'язок $u\equiv u(t,x,\omega)\in\mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t\in[0,T]$, якщо

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)dxdy\equiv K_5<\frac{1}{4}. \tag{11}$$

Доведення основного твердження

Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1, 2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в працях [9, 10].

Розглянемо оператор $S:\mathfrak{B}_{2,T}\to\mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t\in[0,T]$, $x,y\in\mathbf{R}^r$,

$$(Su)(\mathrm{t})=\int_{\mathbf{R}^r}K(t,x-y)\left[\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r}b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz\right]dy-$$

$$-\int_{\mathbf{R}^r}b(t,y,z)u(t-\tau,y)dy-$$

$$-\int_0^t\left[\sum_{j=1}^r\varphi_j(\gamma_j)\Delta_x(\omega)\int_{\mathbf{R}^r}\left(K(t-s,x-y)\int_{\mathbf{R}^r}b(s,y,z)u(s-\tau,z)(s-\tau,z)dz\right)dy\right]ds+$$

$$+\int_0^t\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\sum_{n=1}^\infty\sqrt{\lambda_n}\left[\int_{\mathbf{R}^r}K(t-s,s-y)\sigma(s,u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right]d\rho_n(s)\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=0}^3 I_j(t) \tag{12}$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискальними.

Спочатку треба довести, що $Su\in\mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u\in\mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити чотири норми $\left\|I_j(s)\right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}}\equiv\sup\mathbf{E}\left\|I_j(s)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$, $j=0,1,2,3.$

Використаємо нерівність (4) леми 1, нерівність Коші–Шварца [4] та умови (6), (11) і отримаємо оцінку для супремуму математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. рівняння (12)), а саме:

$$\left\|I_0(s)\right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\left\|I_0(s)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^d)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \| \int_{\mathbf{R}^r} K(s,x-y)(\psi(0)+\int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz)dy \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 2\mathbf{E} \| \psi(0) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 2\mathbf{E} \| \int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,z)\psi(-\tau,z)dz \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= 2\mathbf{E} \| \psi(0) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 2\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,z)\psi(-\tau,z)dz \right)^2 dx \le$$

$$\le 2\mathbf{E} \| \psi(0) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 2\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(0,x,z)dzdx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau,z)dz =$$

$$= 2\mathbf{E} \| \psi(0) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau,z)dz = 2\mathbf{E} \| \psi(0) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ 2\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(0,x,z)dzdx \right) \mathbf{E} \| \psi(-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} = C < \infty.$$

Застосуємо нерівність Коші–Шварца [4] та припущення (6), (11), оцінюючи супремум математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\| I_1(s) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \| I_1(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(s,x,y)u(s-\tau,y)dy \right)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} u^2(s-\tau,y)dy \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx \right) \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx.$$

Далі спрацьовує очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0,\tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t \in [0,T]$:

$$\mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \sup_{0\le s\le \tau} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{\tau\le s\le t} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= \sup_{-\tau\le s-\tau\le 0} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \quad (13)$$

З урахуванням рівняння (13) попередня нерівність дасть оцінку

$$\| I_1(s) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx \right) \Big(\sup_{-\tau\le s-\tau\le 0} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau} \mathbf{E} \| u(s-\tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \Big) =$$

$$= \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx \right) \Big(\sup_{-\tau\le s\le 0} \mathbf{E} \| \psi(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le s\le t-\tau} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \Big) \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx \right) \Big(\sup_{-\tau\le s\le 0} \mathbf{E} \| \psi(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \Big) = C_1 < \infty.$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрата інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\| I_2(s) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \| I_2(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \left\| \int_0^s \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z) u(l-\tau,z)dz \right) dl \right) d\tau \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \varepsilon(s),$$

де

$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z) u(l-\tau,z)dz \right) dy \right)^2 dl \right) dx \,. \quad (14)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. рівняння (14)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\| I_2(s) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \varepsilon(s) = t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E}\{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \times$$

$$\times \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^r} \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z) u(l-\tau,z)dz \right) dy \right)^2 dx \right) dl \le$$

$$\le Ct\, \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z) u(l-\tau,z)dz \right\|^2 dxdl \right\}. \quad (15)$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} ... \partial_{x_r})^T; \; D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & ... & \partial_{x_1 x_r}^2 \\ ... & ... & ... \\ \partial_{x_r x_1}^2 & ... & \partial_{x_r}^2 \end{pmatrix};$$

$\|\cdot\|$ — відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l,x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(s-l, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z) u(l-\tau, z) dz \right) dy,$$

$$g(l,x) \equiv \int_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z) u(l-\tau,z) dz \tag{16}$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискальним (див. рівняння (4)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що з імовірністю одиниця для кожного $l \in [0,t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r} b(l,\cdot,z) u(l-\tau,z) dz \in L_1(\mathbf{R}^r) \tag{17}$$

і

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r), \; \| D_x^2 g \| \in L_2(\mathbf{R}^r). \tag{18}$$

Перевіримо умову 1). Доведення (17) випливає з використання умов Коші–Шварца та умов 2 основного твердження і (11) зі сталою K_5:

$$\mathbf{E}\left\{ \sum_{j=1}^{r} \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \mathbf{E}\left\{ \int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z) u(l-\tau,z) dz \right| dx \right\} \le$$

$$\le \mathbf{E}\left\{ \sum_{j=1}^{r} \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \left(\sup_{0 \le l \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l,x,z) dz dx} \right) \left(\sqrt{\sup_{-\tau \le l \le 0} \mathbf{E} \|\psi(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0 \le l \le t} \mathbf{E} \|u(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z) u(l-\tau,z) dz \right| dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (18) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\| D_x^2 g \|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l,x)$ (див. умову (16)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та (9), (10), матимемо

$$\left|\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)\right| \le \psi(t,x,z)\left|u(t-\tau,z)\right| =$$

$$= (\psi(t,x,z) - \psi(t,x_0,z) + \psi(t,x_0,z)) \,|\, u(t-\tau,z) \,| \le$$

$$\le (\delta\varphi(t,z,x_0,\delta) + \psi(t,x_0,z)) \,|\, u(t-\tau,z) \,| .$$

Перевіримо включення

$$(\delta\varphi(t,\cdot,x_0,\delta) + \psi(t,x_0,\cdot)) \,|\, u(t-\tau,\cdot) \,| \in L_1(\mathbf{R}^r) .$$

Використовуючи нерівність Коші–Шварца та умови (7), (8), (11), очевидно матимемо

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta) + \psi(t_1,x_0,z)) \,|\, u(t_1-\tau,z) \,|\, dz =$$

$$= \delta\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} \varphi(t_1,z,x_0,\delta) \,|\, u(t_1-\tau,z) \,|\, dz + \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} \psi(t_1,x_0,z) \,|\, u(t_1-\tau,z) \,|\, dz \le$$

$$\le \left(\delta\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1,z,x_0,\delta)dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1,x_0,z)dz}\right)\Big(\sup_{-\tau\le t_1\le 0} \mathbf{E}\,\|\,\psi(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ \sup_{0\le t_1\le t} \mathbf{E}\,\|\,u(t_1)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Звідси з імовірністю одиниця отримаємо

$$\int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta) + \psi(t_1,x_0,\zeta)) \,|\, u(t_1-\tau,z) \,|\, dz < \infty.$$

Згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром для функції (16) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz = \int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz. \tag{19}$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,\cdot,z)u(t-\tau,z)dz \in L_2(\mathbf{R}^r) . \tag{20}$$

З урахуванням (19), (7), нерівності Коші–Шварца, умов (8) і (6) виконуються співвідношення

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} |\,\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz\,|^2 \, dx =$$

$$= \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz\right)^2 dx \le$$

$$\leq \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r}|\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)|\,dz\right)^2 dx \leq \sup_{0\leq t_1\leq t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\leq t_1\leq 0} E\,\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\leq t_1\leq t} E\,\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) < \infty\,,$$

звідки

$$\int_{\mathbf{R}^r}\left|\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)dz\right|^2 dx < \infty.$$

Остаточно з рівняння (15) матимемо оцінку

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \leq Ct\mathbf{E}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\|D_x^2\int_{\mathbf{R}^r} b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)dz\|^2\, dxdt_1 \leq$$

$$\leq Ct^2\sup_{0\leq t_1\leq t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\leq t_1\leq 0}\mathbf{E}\,\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\leq t_1\leq t}\mathbf{E}\,\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) \leq C_2 < \infty. \qquad (21)$$

Отримаємо оцінку для $I_3(\mathrm{s})$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$. З урахуванням нерівності Коші–Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (4), (6) отримуємо для норми $I_3(\mathrm{s})$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ оцінку

$$\|I_3(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} = \sup_{0\leq s\leq t} E\,\|I_3(s)\|^2 \equiv$$

$$= \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\sigma(s,u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s)\right\|^2 \leq$$

$$\leq 2L^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)\left(t+\tau\sup_{-\tau\leq y\leq 0}\mathbf{E}\|\psi(y)\|^2 + \mathbf{E}\int_0^t\|u(y)\|^2 dy\right) = C_3 < \infty. \qquad (22)$$

Об'єднавши чотири оцінки $I_0(s)-I_3(s)$, отримаємо для $u\in\mathfrak{B}_{2,T}$ нерівність

$$\|(\Psi u)(t)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sup_{0\leq s\leq t}\mathbf{E}\left\|\sum_{j=0}^{3} I_j(t)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \leq 4\sum_{j=0}^{3}\|I_j(t)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}}\,. \qquad (23)$$

Оскільки F_t-вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискальну фіксовану точку.

Дійсно, слід взяти до уваги (25), (33), (34), (35) та властивість лінійності r-вимірного інтеграла. У результаті для різниці $I_1(s)(u)-I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$, маємо оцінку

$$\| \mathrm{I}_1(s)(u) - \mathrm{I}_1(s)(v) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left\| \mathrm{I}_1(s)(u) - \mathrm{I}_1(s)(v) \right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)} \le$$

$$\le \left(\sup_{0 \le s \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx \right) \left\| u - v \right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \tag{24}$$

Аналогічно дістаємо оцінку для різниці $I_2(s)(u) - I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$, а саме:

$$\| \mathrm{I}_2(s)(u) - \mathrm{I}_2(s)(v) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le$$

$$\le Ct^2 \sup_{0 \le \tau \le t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx \right) \sup_{0 \le \tau \le t} \mathbf{E} \left\| u(\tau) - v(\tau) \right\|^2_{L_2\left(\mathbf{R}^r\right)}.$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$, тоді

$$\| \mathrm{I}_3(s)(u) - \mathrm{I}_3(s)(v) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} \le L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \left\| u - v \right\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}}. \tag{25}$$

Урахувавши оцінки (23) і (25), матимемо

$$\| \Psi u - \Psi v \|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \, \| \sum_{j=0}^{3} (I_j(s)(u) - I_j(s)(v)) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 4 \left(\sup_{0 \le s \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx + Ct^2 \sup_{0 \le \tau \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx + \right.$$

$$\left. + L^2ct^2 + L^2c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \| u - v \|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} = \gamma(t) \, \| u - v \|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}};$$

$$\gamma(t) \equiv 4 \left(\sup_{0 \le s \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx + Ct^2 \sup_{0 \le \tau \le t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,y)\,dydx + \right.$$

$$\left. + L^2ct^2 + L^2c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \tag{26}$$

для $\{u,v\} \subset \mathfrak{B}_{2,T}$.

ВИСНОВКИ

Згідно з оцінкою (11) $K_5 < \frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ у рівнянні (26) менший за 1. Щодо наступних трьох доданків можна зауважити таке: за рахунок вибору $t_1 \in [0,T]$ їх сума може дорівнювати $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0,1)$.

Це означає, що оператор Ψ, визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискальним. А отже, згідно з теоремою Банаха [4] про стискальне відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку — м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0,t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$, …, $[t_{n-2},t_{n-1}]$, $[t_{n-1},T]$, які в сумі дають відрізок $[0,T]$, на якому розв'язується задача (1), (2). У результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

Ця робота має теоретичне значення, оскільки вона доводить існування м'якого розв'язку НДСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, розгляд яких передбачається у подальших роботах.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Андреева Е.А.* Управление системами с последействием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. — М.: Наука, 1992. — 333 с.
2. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М.: Наука, 1977. — 352 с.
3. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1980. — 612 с.
4. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными: сб. науч. тр. / И.И. Гихман, А.В.Скороход. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
5. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 541 с.
6. *Перун Г.М.* О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Кибернетика и вычислительная математика. — 1991. — № 83. — С.19–25.
7. *Перун Г.М.* Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 9. — С. 1773–1781.
8. *Свердан М.Л.* Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений / М.Л. Свердан, Л.И. Ясинская, В.К. Ясинский // Кибернетика и вычислительная техника. — 1988. — №81. — С. 7–12.
9. *Станжицкий А.Н.* Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа / А.Н. Станжицкий, А.О. Цуканова // Нелінійні коливання. — 2016. — Т. 19, № 3. — С. 408–430.
10. *Tsukanova A.O.* On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space / A.O. Tsukanova // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, № 3–4. — С. 179–189.
11. *Tessitore G.* Invariant Measures for Stochastic Heat Equations / G. Tessitore, J. Zabczyk // Probability and Mathematical Statistics. — 1998. — 18. — P. 271–287.
12. *Zabczyk J.* Ergodicity for Infinite Dimensional Systems / J. Zabczyk, G. Da Prato // Dynamic Systems and Applications. — Cambridge University Press. — 1996. — 449 p.

Надійшла 21.04.2017