ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ І УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ

УДК 519.8

СУБОПТИМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СУММЫ ЭЛЛИПСОИДОВ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА С ГИПЕРСЛОЕМ

А.В. ШОЛОХОВ

Предложен робастный алгоритм эллипсоидальной аппроксимации множества достижимости и построения эллипсоидального множества гарантированной оценки линейной управляемой системы с дискретным временем, на которую действуют внешние возмущения с нестатистически заданными характеристиками. Канал измерения «зашумлен» помехами. Алгоритм работоспособен и при нарушении априорных предположений о начальном состоянии системы. Приведены результаты компьютерного моделирования, показывающие изменение информативности измерений в зависимости от пересечения эллипсоида с гиперслоем и соотношения неопределенности внешнего возмущения и шума наблюдения.

ВВЕДЕНИЕ

Решение многих задач управления часто связано с неопределенностью информации, на основе которой необходимо реализовать управление объектом, оптимальное по некоторому критерию. При этом существуют задачи, где неопределенность может быть описана лишь в виде множеств значений, принимающих фазовые переменные состояний объекта управления в каждый момент времени управления и наблюдения.

Рассмотрим следующий пример: пусть наблюдается объект и о его начальном состоянии имеется априорная информация. Кроме того, известны дифференциальные уравнения, описывающие движение объекта и возможности управления им. По этим данным строится множество достижимости объекта, являющееся выпуклым и аппроксимирущееся эллипсоидом. Состояние объекта уточняется по результатам наблюдений, зашумленным помехой с нестатистически заданной неопределенностью. При этом имеют место не все фазовые координаты. Наблюдения, полученные по скалярному неравенству, представляют собой гиперслой в фазовом пространстве состояний. Непустое пересечение эллипсоида состояния и гиперслоя аппроксимируется, в свою очередь, эллипсоидом, который принимается за улучшенную оценку состояния объекта по критерию минимума объема эллипсоида. Иначе оставляется исходный эллипсоид состояния.

Решению данной задачи посвящено множество работ, например [1–6]. Основное внимание в большинстве из них уделяется точности аппроксимации в ущерб вычислительной простоте. Рост размерности пространства множества состояний приводит при этом, если не поступиться точностью, к значительному росту вычислений [7]. При состояниях, близких к вырождению эллипсоида, вычислительные ошибки не позволят уточнить состояние оцениваемого объекта. Здесь предлагается алгоритм для случая, когда наблюдающее устройство не очень сложное и точное, а множество состояний объекта не требуется «сводить в точку». Достаточно, чтобы фазовые координаты объекта находились в заданных границах, т.е. не требуется высокая точность вычислений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Решается задача оценивания множества состояний линейной динамической системы с учетом апостериорной информации. Рассматривается линейная управляемая система с входным управляющим воздействием и неточно известным начальным состоянием. Дифференциальное уравнение, описывающее движение объекта, представим в виде разностного уравнения в пространстве состояний. Уравнение системы в фазовом пространстве переменных состояния имеет вид

$$x_{j+1} = Ax_j + e_n\zeta_j, \left|\zeta_j\right| \le d \,, \tag{1}$$

$$x_0 \in E_0 = \{x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}} \overline{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \le 1\} \,, \tag{2}$$

где A — $(n \times n)$-матрица и e_n — n-мерный вектор такие, что пара (A, e_n) управляема, $e_n \in R^n$; $\zeta_j \in R^1$ — скалярное управление, ограниченное заданной константой $d \ge 0$; $j \in T_0$, $j = 0,1,...,k$ $(k < \infty)$ — дискретное время; $E_0 \subset X_j = R^n$ — компактное множество возможных значений начального состояния; $\bar{x}_0$ и $\overline{H}_0^{\mathrm{T}} = \overline{H}_0 > 0$ — заданные n-мерный вектор и $(n \times n)$-матрица соответственно.

Управления $\zeta_j \in R^1$ заданы на всем интервале T_0, образуя программу

$$\{\zeta_j \in R^1, j \in T_0\} \,. \tag{3}$$

Введем уравнение наблюдения

$$y_j = h^{\mathrm{T}} x_j + \xi_j, \left|\xi_j\right| \le c, \; j = 1,2,..., \tag{4}$$

где $y_j \in R^1$; $h \in R^n$ — параметр измерительного устройства такой, что пара (A, h) наблюдаема; $\xi_j \in R^1$ — ограниченная помеха измерений; $c \ge 0$ — заданная константа. Уравнение (4) в пространстве R^n определяет гиперслой

$$S(y_j, x_j) = \{x_j : (y_j - h^{\mathrm{T}} x_j)^2 \le c^2\} \,. \tag{5}$$

Задача состоит в том, чтобы по известным выражениям (1)–(3) построить множество достижимости объекта наблюдения, аппроксимировать его эллипсоидом и по наблюдениям (4) выхода y_j построить гарантированную эллипсоидальную оценку

$$L_j \supset E_j \cap S_j \,,\; L_j = \{x_j : (x_j - \bar{x}_j)^{\mathrm{T}} H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \le 1\} \,. \tag{6}$$

При этом начальная или априорная оценка известна: $L_0 \equiv E_0$.

АППРОКСИМАЦИЯ СУММЫ ДВУХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Согласно работе [1] для оптимальной аппроксимации эллипсоидом суммы двух эллипсоидов, один из которых должен быть невырожденным, а другой может быть вырожденным, решается алгебраическое уравнение $n+1$-го порядка. Для получения его коэффициентов необходимо решить характеристическое уравнение и найти собственные числа. В качестве критерия оптимизации принят объем эллипсоида. В нашем случае в качестве невырожденного эллипсоида принимается эллипсоид E_j множества достижимости системы (1), а вырожденного — эллипсоид, аппроксимирующий множество возможных управлений, значения из которого принимает управление (3) на каждом дискретном шаге. В работе [8] операция суммирования эллипсоидов выполняется следующим образом:

$$Q^+ = \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2 \,, \tag{7}$$

где Q^+ — матрица аппроксимирующего эллипсоида; Q_1, Q_2 — матрицы суммируемых эллипсоидов, а параметры γ_1, γ_2 удовлетворяют условиям

$$\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1 \,,\; \gamma_1 > 0 \;\text{ и }\; \gamma_2 > 0 \,. \tag{8}$$

В работе [9] показано, что аппроксимацию по критерию минимума объема, когда один из эллипсоидов представляет собой отрезок, можно получить проще, а именно, определить оптимальные коэффициенты в равенстве (7), решив квадратное алгебраическое уравнение

$$n\,\delta_j^2 + \kappa_j^2 (n-1)\delta_j - \kappa_j^2 = 0 \,, \tag{9}$$

где

$$\kappa_j^2 = e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n d^2 \,,\; H_{j+1|j} = A H_j A^T \,,\; \delta_j = \frac{\gamma_{2,j}}{\gamma_{1,j}} \,, \tag{10}$$

и найдя его максимальный положительный корень

$$\delta_j^+ = d (e_n^T\, H_{j+1|j}^{-1} e_n)^{1/2} b_j = \kappa_j b_j \,. \tag{11}$$

Здесь

$$b_j = k_j \,\frac{\sqrt{\kappa_j^2 (n-1)^2 + 4n} - \kappa_j (n-1)}{2n} . \tag{12}$$

Выражение для матрицы аппроксимирующего эллипсоида при этом

$$H_{j+1} = (1+\delta_j^+) \left(H_{j+1|1} + \frac{d^2}{\delta_j^+} e_n e_n^T \right) . \tag{13}$$

Любое другое значение δ_j^+, отвечающее условиям (8), также удовлетворяет (7), но не является оптимальным. Полученное уравнение в частном случае, когда $\|e_n\| = 1$ и $H_{j+1|j} \equiv I$, где I — единичная матрица, совпадает с уравнением в работе [1].

Как видим, в (9) осталась лишь одна трудоемкая операция — обращение матрицы $H_{j+1|j}$. Упростим указанные выражения, для чего воспользуемся неравенством Канторовича для случая вещественного пространства [10].

Если $A \in R^{n \times n}$ — положительно определенная симметрическая матрица с характеристическими числами $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N > 0$ и $x \in R^n$ — единичный вектор, то

$$1 \leq x^{\mathrm{T}} A x x^{\mathrm{T}} A^{-1} x \leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_N}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{14}$$

Отсюда, после подстановки наших обозначений и несложных преобразований, получим неравенство

$$\frac{(e_n^{\mathrm{T}} e_n)^2}{e_n^{\mathrm{T}} H_{j+1|j} e_n} \leq e_n^{\mathrm{T}} H_{j+1|j}^{-1} e_n \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_N)^2}{4\lambda_1 \lambda_N} \frac{(e_n^{\mathrm{T}} e_n)^2}{e_n^{\mathrm{T}} H_{j+1|j} e_n}. \tag{15}$$

Равенство в (15) достигается в случае, когда эллипсоид, выраженный матрицей H_j квадратичной формы, — шар. Если собственные числа λ_1, λ_N матрицы $H_{j+1|j}$ не сильно различаются, то, полагая

$$\kappa_j^2 = e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n d^2 \approx \frac{(e_n^{\mathrm{T}} e_n)^2 d^2}{e_n^{\mathrm{T}} H_{j+1|j} e_n} \tag{16}$$

в уравнении (9) и находя его максимальный положительный корень $\widetilde{\delta}_j^+$, получаем субоптимальные параметры $\widetilde{\gamma}_1$, $\widetilde{\gamma}_2$, которые не сильно отличаются от оптимальных и удовлетворяют (8). Соответственно, матрица субоптимального эллипсоида имеет вид

$$H_{j+1} = (1 + \widetilde{\delta}_j^+)\left(H_{j+1|1} + \frac{d^2}{\widetilde{\delta}_j^+} e_n e_n^T\right). \tag{17}$$

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА И ГИПЕРСЛОЯ ЭЛЛИПСОИДОМ

Точное решение данной задачи получено в работе [2]. При этом для определения параметров аппроксимирующего эллипсоида, оптимального по критерию минимума объема, на каждом шаге необходимо решать квадратное уравнение. В [11] приведено другое решение этой задачи, субоптимальное по критерию минимума объема аппроксимирующего эллипсоида, зато требующее меньше вычислений. Однако в нем используются всего лишь два крайних соотношения между расстоянием от центра исходного эллипсоида до середины гиперслоя и «шириной» гиперслоя. Это не позволяет использовать для уменьшения объема аппроксимирующего эллипсоида наблюдение, когда, например, середина гиперслоя проходит через центр исходного эллипсоида. В данном случае оставляется исходный эллипсоид. Также не используется наблюдение, когда половина исходного эллипсоида принадлежит гиперслою и его середина проходит по границе эллипсоида.

В работе [12] получены выражения для построения аппроксимирующего эллипсоида (6), параметры которых зависят от степени пересечения эллипсоида множества достижимости и гиперслоя.

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau_j \frac{H_j h_j}{e_j} \sigma_j, \quad e_j^2 = h_j^{\mathrm{T}} H_j h_j, \quad \sigma_j = \frac{\Delta_j}{e_j}, \tag{18}$$

$$H_{j+1} = \left(H_j - \tau_j \frac{H_j h_j h_j^{\mathrm{T}} H_j}{e_j^2} \right) \gamma_j^2, \tag{19}$$

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j \left(\frac{1}{1-\tau_j} \chi_j^2 - \sigma_j^2 \right), \quad \chi_j^2 = \frac{c^2}{e_j^2}, \tag{20}$$

$$\tau_j = \frac{e_j^2}{q_j^{-1} + e_j^2}, \; 0 \le \tau_j < 1, \quad q_j^{-1} \ge c e_j, \tag{21}$$

где $\Delta_j = y_j - h_j^{\mathrm{T}} \tilde{x}_j$ — расстояние от центра исходного эллипсоида до середины гиперслоя; c — ограниченная помеха наблюдения согласно (4); $q_j^{-1} \ge c e_j$ — подстроечный параметр, полученный из условия использования наблюдения (4) в случае, когда гиперслой лишь касается исходного эллипсоида.

Условие информативности наблюдений [12]

$$(1-\tau_j)\left(1 + \tau_j \left(\frac{\chi_j^2}{1-\tau_j} - \sigma_j^2 \right) \right)^n < 1. \tag{22}$$

Потребуем, чтобы (22) выполнялось, когда половина эллипсоида принадлежит гиперслою. Согласно (21) при $q_j^{-1} = c e_j$ условие (22) не выполняется.

Лемма (о выборе τ_j). Пусть ровно половина исходного эллипсоида принадлежит гиперслою. Тогда для выполнения неравенства (22) необходимо и достаточно

$$\tau_j \le \frac{1}{1 + n\chi_j^2}, \; q_j^{-1} = nc^2. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть ровно половина исходного эллипсоида принадлежит гиперслою. При этом $\chi_j^2 = \sigma_j^2 \ge 1$. Тогда (22) примет вид (здесь и далее индексы в выражениях опущены)

$$(1-\tau)\left(1+\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau}\right)^n < 1\,. \tag{24}$$

Перепишем (24) в виде $\left(1+\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau}\right)^n < \frac{1}{1-\tau}$, прологарифмируем его и получим $n\ln\left(1+\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau}\right) < \ln\frac{1}{1-\tau}$.

Имея условие $0 \le \tau < 1$, на основании известного неравенства $\ln(1+\tau) \le \tau$, $\forall\, \tau > -1$ придем к следующим выражениям: $n\ln\left(1+\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau}\right) \le$ $\le n\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau}$, $\ln\left(\frac{1}{1-\tau}\right) = \ln\left((1-\tau)^{-1}\right) = -\ln(1-\tau) \ge \tau$, т.е. $\tau \le \ln\left(\frac{1}{1-\tau}\right)$. Потребуем выполнения неравенства

$$n\frac{\tau^2\chi^2}{1-\tau} \le \tau\,. \tag{25}$$

Если выполняется (25), то будет выполняться и (24). Из (25) путем преобразований $n\frac{\tau\chi^2}{1-\tau} \le 1 \Rightarrow n\tau\chi^2 \le 1-\tau \Rightarrow n\tau\chi^2 + \tau \le 1 \Rightarrow (n\chi^2+1)\tau \le 1 \Rightarrow \tau \le$ $\le \frac{1}{n\chi^2+1}$ получим

$$\tau \le \frac{1}{1+n\chi^2}\,. \tag{26}$$

Вынесем общий множитель e^2 в выражении (21). Тогда $\tau = \frac{1}{q^{-1}/e^2+1}$. Положив $q^{-1} = nc^2$, получим (26).

Теперь рассмотрим случай, когда середина гиперслоя проходит через центр исходного эллипсоида, т.е. $\Delta_j = 0 \Rightarrow \sigma_j = 0$. Тогда (22) примет вид

$$(1-\tau)\left(1+\frac{\tau\chi^2}{1-\tau}\right)^n < 1 = \left(1+\frac{\tau\chi^2}{1-\tau}\right)^n < \frac{1}{1-\tau}\,. \tag{27}$$

Аналогично предыдущему случаю, логарифмируя (27), запишем $n\ln\left(1+\frac{\tau\chi^2}{1-\tau}\right) < \ln\left(\frac{1}{1-\tau}\right)$ и получим $n\ln\left(1+\frac{\tau\chi^2}{1-\tau}\right) \le n\frac{\tau\chi^2}{1-\tau} < \ln\frac{1}{1-\tau}$. Так как $0 \le \tau < 1$, то всегда выполняется неравенство $\tau < \ln\left(\frac{1}{1-\tau}\right)$. Потребуем $n\frac{\tau\chi^2}{1-\tau} \le \tau$. Тогда

$$0 < \tau \le 1 - n\chi^2 \Rightarrow \chi^2 \le \frac{1}{n}. \tag{28}$$

Отсюда

$$\chi = \frac{c}{e} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow c \le \frac{e}{\sqrt{n}}. \tag{29}$$

На основании (29) делаем вывод: с увеличением размерности пространства состояний наблюдаемой системы в рассмотренном случае неопределенность наблюдений для сохранения информативности должна стремиться к нулю для того, чтобы аппроксимирующий пересечение эллипсоид был меньше по объему, чем исходный. Легко видеть, что в случае единичного круга ($n = 2,\ e = 1$) для сохранения информативности должно быть $c \le$ $\le \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$, что в случае равенства соответствует квадрату, вписанному в исходную единичную окружность.

Проверим, каково максимально возможное значение неопределенности наблюдения c в этом случае при выборе шага согласно (26). Подставив (26) в (27), получим

$$\frac{n\chi^2}{1 + n\chi^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1. \tag{30}$$

Положив $n = 2, e = 1, \chi = c$, после подстановки в (30) получим $c \approx 0{,}6325$. Таким образом, субоптимальный эллипсоид ненамного отличается от оптимального, вычисленного, например, согласно [2], что в объектах, где точность аппроксимации не критична, а простота вычислений и подстройки — необходимое условие, может являться вполне удовлетворительным.

Рассмотрим случай, когда расстояние до середины гиперслоя, т.е. Δ увеличивается от нуля до нескольких e. При этом ширина гиперслоя, т.е. c увеличивается так, что $c = \Delta$ постоянно. Таким образом, пересечение эллипсоида и гиперслоя увеличивается до тех пор, пока эллипсоид не будет «погружен» в него наполовину и далее, т.е. ширина гиперслоя увеличивается, а пересечение остается уже неизменным (рис. 1).

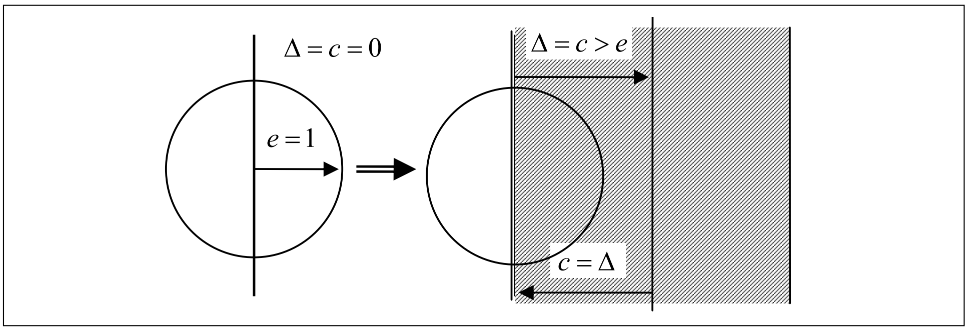

Рис. 1. Пересечение эллипсоида и гиперслоя

Легко видеть из (18), (22) и (26), что середина аппроксимирующего эллипсоида вначале удаляется от центра исходного эллипсоида на расстояние $\frac{1}{1+n}$ по достижении равенства $\Delta = e = c$, а затем, по мере дальнейшего увеличения Δ, снова приближается к центру исходного эллипсоида. При этом объем аппроксимирующего эллипсоида все время увеличивается и условие информативности (22) стремится к единице. Аналогично ведет себя аппроксимирующий эллипсоид в случае лишь касания гиперслоя и исходного эллипсоида. При этом, в отличие от условия $q^{-1} = ce$, с удалением середины гиперслоя от исходного эллипсоида растет объем аппроксимирующего эллипсоида. Таким образом, выбор шага согласно (26) придает алгоритму робастные свойства, заключающиеся в том, что при расхождении наблюдений и расчетного множества достижимости происходит учет наблюдений.

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Выполним моделирование алгоритма на конкретном примере. Возьмем систему третьего порядка и зададимся устойчивыми значениями собственных чисел матрицы динамики A: $\lambda_l = 0{,}75;\ 0{,}5;\ -0{,}5,\ l = \overline{1,n}$. По ним построим матрицу A, имеющую форму Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}1875 & 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

Управления в программе (3) примем равными максимально возможным на всем интервале управления и зададим в виде $\varsigma_j = d(-1)^j$. Начальное значение $\bar{x}_0^T = [5\ -10\ 12]$ удовлетворяет условию (2), где

$$H_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{bmatrix},\ \bar{x}_0^T = [0\ 0\ 0].$$

Моделирование системы произведем в среде MATLAB. Сначала сравним аппроксимацию множества достижимости тремя алгоритмами согласно работам [1], [9] и по формуле (17) данной статьи. В качестве результата рассмотрим три графика изменений квадратного корня из определителя матрицы H_j, полученной тремя способами в зависимости от номера j итерации. Данные построения показаны на рис. 2, где видно, что объем эллипсоидов, построенных по оптимальным алгоритмам [1], [9], совпадает (графики маркированы квадратиками и крестиками соответственно). Объем же аппроксимирующего эллипсоида, согласно (17), не очень отличается от оптимального (график маркирован кружочками).

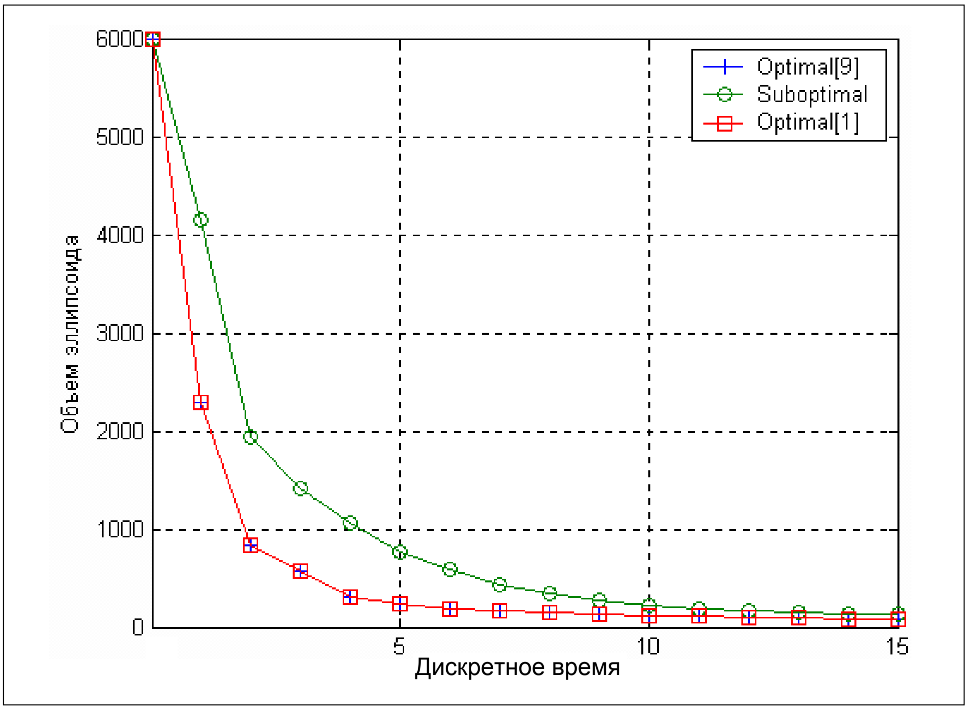

Рис. 2. Уменьшение объема эллипсоида при разном выборе шага

Для исследования информативности примем $e = 1$, $n = 2;3;4$ и будем увеличивать c до $3e$ (рис. 3).

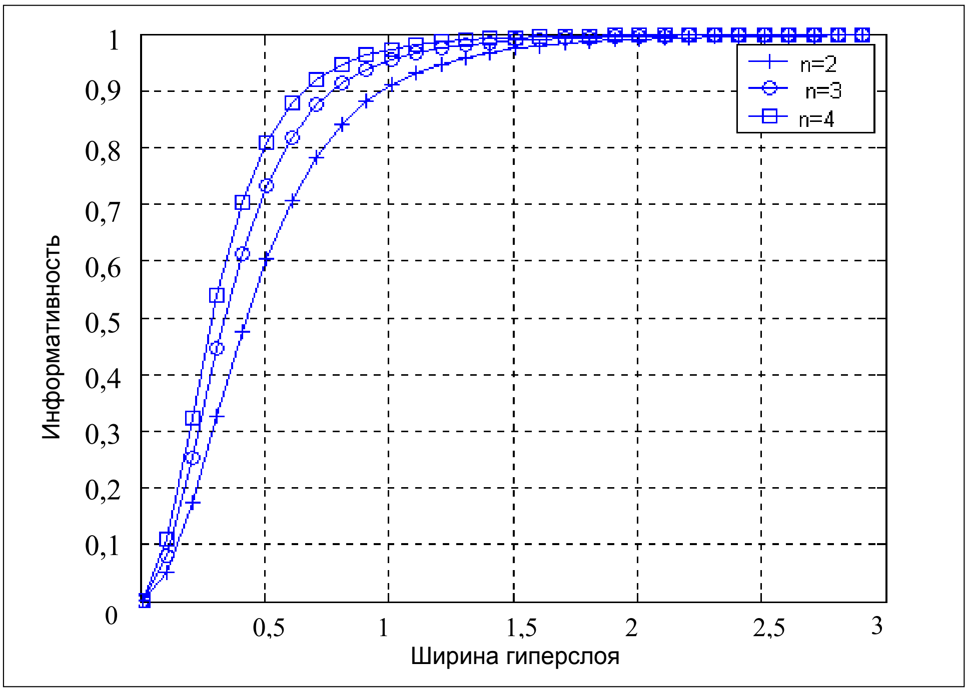

Рис. 3. Изменение информативности от ширины гиперслоя

ВЫВОДЫ

Получен и исследован робастный алгоритм гарантированного оценивания состояний линейной динамической системы, более простой в вычислительном отношении, чем в работе [2] и более информативный по сравнению с [11]. Алгоритм обладает свойством робастности по отношению к уровню помехи наблюдения, т.е. допускает существенное увеличение уровня помехи по сравнению с размерами эллипсоида множества достижимости и сохранение информативности наблюдения. Данный алгоритм легко и удобно использовать в тех практических случаях, когда измерительная информация неточная и нет возможности наблюдать все фазовые координаты объекта, т.е. в тех случаях, когда увеличение точности вычислений не приводит к существенному уточнению состояния объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
2. *Волосов В.В.* Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. — 1991. — № 3. — С. 24–32.
3. *Волосов В.В.* К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизация в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных систем управления // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 4. — С. 37–52.
4. *Хонин В.А.* Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов // Эволюционные системы в задачах оценивания: Сб.науч. тр. — Свердловск: Уральский научный центр АН СССР, 1985. — С. 104–123.
5. *Черноусько Ф. Л.* Об оптимальном эллипсоидальном оценивании для динамических систем, подверженных неопределенным возмущениям // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 85–95.
6. *Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л.* Свойства оптимальных эллипсоидов, приближающих области достижимости систем с неопределенностями // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 4. — С. 8–18.
7. *Хонин В.А.* О программах, реализующих алгоритмы аппроксимации области достижимости управляемой системы // Динамические задачи оценивания в условиях неопределенности: Сб. науч. тр. — Свердловск: Изд-во АН СССР, Уральское отделение, 1989. — С. 125–129.
8. *Schlaepfer F. M., Schweppe F. C.* Continuous-time state estimation under disturbances bounded by convex sets // IEEE Trans. Automat. Control. — 1972. — **AC-17**, № 2. — P. 197–205.
9. *Бакан Г М., Шолохов А В.* К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 4. — С. 44–51.
10. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972. — 232 с.
11. *Ефименко Н.В., Новиков А.К.* Регуляризованные эллипсоидальные наблюдатели и их применение к задаче определения ориентации космического аппарата // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 6. — С. 145–155.
12. *Бакан Г.М., Шолохов А.В.* К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 16–25.

Поступила 21.03.2007