519.863:338.3

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ З УРАХУВАННЯМ КОНТРОЛЮ НАД ЗАБРУДНЕННЯМ БЕЗ ЛАГІВ

М.В. БОЙЧУК, Н.М. ШМУРИГІНА

Розглядається модель динамічного міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням. Проведено її дослідження, в результаті якого запропоновано алгоритми обчислення магістральних значень капіталу, інвестицій, невиробничого споживання, трудових ресурсів, валового випуску основної продукції та продукції допоміжного виробництва, кінцевої продукції, крайових керувань — значень інвестицій, а також точки перемикання керувань інвестиціями.

В кінці XX — на початку XXI ст. наука поступово почала переходити від економічних та екологічних досліджень до проблем екологізації економіки. Під цим поняттям розуміється залежність стабілізації екологічної ситуації від ефективності впроваджуваних економічних рішень та їх адекватності стійкому розвиткові економіки.

Проблеми екологізації економіки вимагають розробки нових методологічних засобів їх дослідження з метою створення практичного інструментарію для оптимальних управлінських еколого-економічних рішень. Враховуючи складність сучасної моделі природокористування, можна констатувати, що її формальний опис, дослідження і в кінцевому результаті практичне впровадження можливе лише при вдалому поєднанні методів системного аналізу, синтезу і відповідної декомпозиції на конкретні еколого-економічні моделі. Динамікою розвитку еколого-економічних систем можна керувати, використовуючи математичні моделі та методи, що є важливим інструментом економічного аналізу. Математичні моделі еколого-економічних систем створюються для оптимального вирішення конкретних проблем і в них мають бути закладені реальні шляхи їх вирішення.

У даній роботі проводиться дослідження однієї з важливих з прикладної точки зору економічних задач — моделювання оптимального розвитку динамічної еколого-економічної системи з урахуванням контролю над забрудненням. Процес описується моделлю економічної динаміки, в основу якої покладено міжгалузевий динамічний баланс, а потужності галузей описуються виробничими функціями.

Динамічна модель міжгалузевого балансу з урахуванням контролю над забрудненням набуває вигляду [1, 2]

$$X^{(1)} = A_{11}X^{(1)} + A_{12}X^{(2)} + Y^{(1)},\ X^{(2)} = A_{21}X^{(1)} + A_{22}X^{(2)} - Y^{(2)},$$

$$Y_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} q_{kj} I_j + C_k ,$$

$$\dot{K}_k = I_k - \mu_k K_k ,\ K_k(0) = K_{k0} , k \in \{1,...,n\} ,\ I = B_1 \dot{X}^{(1)} + B_2 \dot{X}^{(2)} ,$$

$$X_k^{(1)}(0) = X_{k0}^{(1)}, \ \dot{X}_k^{(1)} \geq 0, \ k \in \{1,...,n\},$$

$$X_k^{(2)}(0) = X_{k0}^{(2)}, \ \dot{X}_k^{(2)} \geq 0, \ k \in \{1,...,m\},$$

$$\sum_{k=1}^{n} L_k \leq N, \ 0 \leq X_k^{(1)} \leq F_k(t, K_k, L_k),$$

$$I_k \geq 0, \ K_k \geq 0, \ C_k \geq C_k^{\min}, \ k \in \{1,...,n\}, \tag{1}$$

де $X^{(1)}, (n \times 1)$ — вектор-стовпець валового випуску основної продукції; $X^{(2)}, (m \times 1)$ — вектор-стовпець знищених забруднювачів (продукції допоміжного виробництва); $A_{11} = (a_{kj}^{11}), (n \times n)$ — матриця матеріальних витрат продукції k на випуск одиниці продукції j; $A_{12} = (a_{kj}^{12})$, $(n \times m)$ — матриця витрат продукції k на знищення одиниці забруднювачів j; $B_1 = (b_{kj}^1)$, $(n \times n)$ — матриця коефіцієнтів капіталоємності приростів основного виробництва; $B_2 = (b_{kj}^2)$, $(n \times m)$ — матриця коефіцієнтів капіталоємності приростів допоміжного виробництва; $A_{21} = (a_{kj}^{21})$, $(m \times n)$ — матриця випуску забруднювачів k під час випуску одиниці продукції j; $A_{22} = (a_{kj}^{22})$, $(m \times m)$ — матриця випуску забруднювачів k під час знищення одиниці забруднювачів j; $Y^{(1)}$, $(n \times 1)$ — вектор-стовпець кінцевої продукції; $Y^{(2)}$, $(m \times 1)$ — сталий заданий вектор-стовпець об'ємів незнищених забруднювачів; I, $(n \times 1)$ — вектор-стовпець інвестицій; $Q = (q_{kj})$, $(n \times n)$ — матриця чистих капіталовкладень у основне виробництво; C — невиробниче споживання; K — основні виробничі фонди; L — трудові ресурси; μ — норми амортизації капіталів.

Перші три рівності описують динамічний міжгалузевий баланс з урахуванням контролю над забрудненням, четверта — рух капіталу. В третьому рядку задаються початкові умови на випуск продукції та знищені забруднювачі. Нерівності в четвертому рядку означають обмеженість на сумарну робочу силу галузей, валову продукцію $X_k^{(1)}$, інвестиції I_k, невиробниче споживання C_k та капітал K_k. Функції F_k є виробничими функціями кожної галузі [3].

Задача полягає в тому, щоб знайти такий процес $\pi = \{X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), Y^{(1)}(t), K(t), I(t), C(t), \ t \geq 0\}$, який би задовольняв умови (1) і був оптимальним щодо функціоналу

$$R(\pi) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} g(t, C)\, dt \to \max_{\pi \in M}, \tag{2}$$

де M — множина процесів, які допускають виконання умов (1); δ — норма дисконтинування.

На функцію корисностей g накладають такі вимоги: двічі неперервно-диференційована по C та неперервна по $t \geq 0$, монотонно зростаюча по C, угнута по C, $\lim\limits_{C \to 0} \dfrac{\partial g}{\partial C} = \infty$, $\lim\limits_{C \to \infty} \dfrac{\partial g}{\partial C} = 0$.

В задачі (1), (2) фазовою траєкторією виступає стан капіталів $K = (K_1, ..., K_n)$, а керування має зміст розподілу інвестицій і робочої сили між галузями, кінцевого випуску продукції між інвестиціями та споживанням, завантаженістю галузей і робочої сили, а також експорту та імпорту в допустимих квотах.

Матриця структури капіталовкладень Q невід'ємна, причому $q_{kj} > 0$ при всіх $k > s$, $j \in \{1, ..., n\}$. Галузі з номерами $k \leq s$ такі, що для кожного $k \leq s$ існує хоча б одне j, при якому $q_{kj} > 0$, називаються фондоутворюючими. Для кожної галузі j знайдеться фондоутворююча галузь k така, що $q_{kj} > 0$, причому $\sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj} = 1$ для всіх $j \in \{1, ..., n\}$.

У задачі (1), (2) роль стану відіграє вектор капіталу $K = (K_1, \dots, K_n)$, а інші змінні $X^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(1)}, I, L, C$ — компоненти вектора керування.

З другого рівняння (1) виразимо $X^{(2)}$ і підставимо в перше і четверте рівняння, отримаємо

$$X_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} w_{kj} X_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} z_{kj} \dot{X}_j^{(1)} + C_k - \sum_{j=1}^{m} u_{kj} Y_j^{(2)},$$

$$\dot{K}_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \dot{X}_j^{(1)} - \mu_k K_k, \quad k \in \{1, ..., n\}, \tag{3}$$

де матриці $Z = QB_1 + QB_2 (E - A_{22})^{-1} A_{21}$, $U = A_{12} (E - A_{22})^{-1}$, $R = UA_{21}$, $W = A_{11} + R$, $D = B_1 + B_2 (E - A_{22})^{-1} A_{21}$.

Згідно з достатніми умовами оптимальності [2, с. 382–385] оптимізуємо дві функції.

$$R(t, K, X^1, C, \dot{X}^1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi(t, K)}{\partial K_k} \left[-\mu_k K_k + \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \dot{X}_j^1 \right] +$$

$$+ e^{-\delta t} g(t, C) + \frac{\partial \varphi(t, K)}{\partial t} \to \max, \ \lim_{t \to \infty} \min_{K \geq 0} \varphi(t, K).$$

Функцію φ будемо шукати у вигляді

$$\varphi(t, K) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) K_k,$$

де невідомі функції ψ_k є кусково-диференційованими функціями при $t \geq 0$. За допомогою методу множників Лагранжа та враховуючи вигляд функції φ маємо

$$\widetilde{R} = \sum_{k=1}^{n} [\dot{\psi}_k - \mu_k \psi_k] K_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left[\lambda_k - \sum_{j=1}^{n} w_{jk} \lambda_j \right] X_k^1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} d_{jk} \psi_j - \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \lambda_j \right] \dot{X}_k^1 +$$

$$+ \{ e^{-\delta t} g(t,C) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k \} + \gamma \left(N - \sum_{k=1}^{n} L_k \right) \to \max , \tag{4}$$

$$\lim_{t \to \infty} \min_{K_k \ge 0} \psi_k(t) K_k = 0 , \quad \forall k \in \{1,...,n\} . \tag{5}$$

Умови (5) є узагальненими для достатніх умов оптимальності на випадок нескінченного проміжку часу. Тут $\lambda_k \ (t \ge 0), \gamma \ (t \ge 0)$ — відповідні множники Лагранжа, які є кусково-неперервними функціями. Введемо позначення

$$G(t,C) = e^{-\delta t} g(t,C) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k \ , \ h_k = \lambda_k - \sum_{j=1}^{n} w_{jk} \lambda_j \ , \ \omega_k = \sum_{j=1}^{n} d_{jk} \psi_j - \sum_{j=1}^{n} z_{jk} \lambda_j \ ,$$

$$P_k = -\dot{\psi}_k + \mu_k \psi_k \ , \ R_k(t,K,X^{(1)},L) = -P_k K_k + h_k X_k^{(1)} - \gamma L_k \ . \tag{6}$$

Тоді

$$\widetilde{R} = \sum_{k=1}^{n} R_k(t,K,X^{(1)},L) + \sum_{k=1}^{n} \omega_k \dot{X}_k^{(1)} + G(t,C) + \gamma N + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{m} u_{kj} Y_j^{(2)} .$$

Задача (4) набуває вигляду в нових позначеннях

$$R_k(t,K,X^{(1)},L) \to \max_{\substack{0 \le X_k^{(1)} \le F_k(t,K,L), \\ K_k \ge 0, L_k \ge 0}} , \ G(t,C) \to \max_{C_k \ge C_k^{\min}} , \tag{7}$$

$$\max_{\dot{X}^{(1)} \ge 0} \omega_k \dot{X}_k^{(1)} = 0 , \quad \forall k,t . \tag{8}$$

Пошук оптимального режиму економічного розвитку зводиться до максимізації функцій $R_k(t,K,X^{(1)},L)$ і $G(t,C)$ та підбору таких множників $\psi_k(t), \lambda_k(t), \gamma(t)$, щоб цей процес $\pi \in M$ виявився допустимим. Множники $\psi_k, \lambda_k, \gamma$ є дисконтованими до початку моменту внутрішніх цін. Зміст поточних цін мають величини

$$\overline{\psi}_k(t) = \psi_k(t) e^{\delta t} , \ \overline{\lambda}_k(t) = \lambda_k(t) e^{\delta t} , \ \overline{\gamma}(t) = \gamma(t) e^{\delta t} .$$

Режим розвитку економіки, визначений (7), (8), назвемо оптимальним при даних цінах. Він відповідає максимуму всіх видів прибутку в кожний момент часу. Ціни $\zeta = (\psi, \lambda, \gamma) \in \Pi$ назвемо допустимими. Оптимальний при даних цінах план π може не задовольняти умови зв'язку моделі (1) (перші два рядки), тобто може бути не збалансованим. Тому для виконання достатніх умов оптимальності підбір цін повинен збалансовувати оптимальний при даних цінах план π.

Згідно із (7) споживання $C(t \geq 0)$ забезпечує максимум $G(t,C)$. Необхідною умовою існування цього максимуму є невід'ємність вектора $\lambda(t)$ при кожному $t \geq 0$. Якщо корисність лінійна $g = \sum_{k=1}^{n} \theta_k C_k$, то внутрішні поточні ціни не нижче за зовнішні: $\bar{\lambda}_k \geq \theta_k$, $k \in \{1,...,n\}$. Якщо $C_k > C_k^{\min}$, то поточна ціна даного продукту дорівнює граничній корисності $\bar{\lambda}_k = \dfrac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$. Якщо $\bar{\lambda}_k > \dfrac{\partial g(t,C)}{\partial C_k}$, то $C_k = C_k^{\min}$. У частинному випадку $g = \sum_{k=1}^{n} \theta_k C_k$ значення $C_k > C_k^{\min}$ можливі тільки при такому $k = l$, що $\dfrac{\theta_l}{\bar{\lambda}_l} = \max_k \dfrac{\theta_k}{\bar{\lambda}_k} = 1$. Галузь l є єдиною. Така лінійна залежність характерна тільки для відносно малого регіону, випуск якого C_k не впливає на міжнародні ціни.

Згідно із (7) оптимальний продукт галузі $X_k^{(1)}$, капітал K_k та робоча сила L_k повинні забезпечувати максимум прибутку R_k. А це можливо при

$$X_k^{(1)} = \begin{cases} F_k(t, K_k, L_k), & \text{якщо} \quad h_k > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad h_k < 0, \\ \text{не визначено}, & \text{якщо} \quad h_k = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Позначимо

$$\tilde{R}_k = \max_{0 \leq X_k^{(1)} \leq F_k(t, K_k, L_k)} R_k = h_k F_k(t, K_k, L_k) - P_k K_k - \gamma L_k. \tag{10}$$

Враховуючи лінійну однорідність виробничих функцій F_k, запишемо

$$\tilde{R}_k = \tilde{r}_k(t, k_k) L_k,$$

де $k_k = K_k / L_k$ — фондоозброєність; $\tilde{r}_k(t, k_k) = h_k f_k(t, k_k) - P_k k_k - \gamma$ — виробничий прибуток галузі за одиницю праці. Оскільки $L_k > 0$ для всіх k та t, отримаємо необхідні та достатні умови максимуму $\tilde{R}_k$ по K_k та L_k

$$\tilde{r}_k(t, \hat{k}_k) = \max_k \tilde{r}_k(t, k_k) \tag{11}$$

для всіх k та t. Для існування такого $\hat{k}_k$ необхідно, щоб $P_k > 0$, $\gamma > 0$ для всіх k та t. Якщо $h_k > 0$ та $f_k(t, k_k) > 0$, $P_k > 0$, $\gamma > 0$, то існує $\hat{k}_k > 0$.

Вектор $H = (h_1, ..., h_n)$ виражається через вектор $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ матричною формулою

$$H = (E - W^T)\lambda. \tag{12}$$

Вимагаємо, щоб матриця $(E - W^T)$ була продуктивна і нерозкладна.

Із (9) згідно з (11) випливає повна загруженість галузей на оптимальному режимі

$$X_k^{(1)} = F_k(t, K_k, L_k)\,,\quad k \in \{1, ..., n\}\;;\; t \geq 0\,.$$

На основі властивості обмеженості на сумарну робочу силу маємо

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(t) = N(t)\,,\; t \geq 0\,. \tag{13}$$

Використовуючи (10), одержуємо

$$h_k \frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial L_k} = \gamma\,,\quad h_k \frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial K_k} = P_k$$

для всіх k та $t \geq 0$. Це означає, що чистий граничний прибуток з одиниці праці однаковий для всіх галузей і повинен співпадати з ціною праці, а з одиниці фондів — з ціною їх зношення. Якщо $\eta_k(t, k_k) = \dfrac{\partial F_k / \partial L_k}{\partial F_k / \partial K_k}$, $\widetilde{P}_k = P_k / \gamma$, то $\widetilde{P}_k \eta_k(t, k_k) = 1$, тобто оптимальна фондоозброєність залежить тільки від відношення ціни зношення фондів до ціни праці $\widetilde{P}_k$.

Для виробничої функції Кобба–Дугласа $F_k = a_k e^{\sigma_k t}(K_k)^{\alpha_k}(L_k)^{\beta_k}$ маємо

$$\eta_k(t, k_k) = \frac{\beta_k}{\alpha_k} k_k\,,\quad k_k = \frac{\alpha_k}{\beta_k}(\widetilde{P}_k)^{-1}. \tag{14}$$

Позначивши $\widetilde{h}_k = h_k / \gamma$, $\widetilde{\lambda}_k = \lambda_k / \gamma$ з (12), одержимо

$$\widetilde{\lambda} = (E - W^T)^{-1}\widetilde{H}\,,\; \widetilde{h}_k = \left(\frac{\partial F_k(t, K_k, L_k)}{\partial L_k}\right)^{-1},\; k \in \{1, ..., n\}\,, \tag{15}$$

тобто відносні ціни всіх галузей залежать від відносних цін зношення фондів.

Максимум (8) по $\dot{X}_k^{(1)}$ знаходиться за умови $\omega_k = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}\psi_j - \sum_{j=1}^{n} z_{jk}\lambda_j \leq 0$.

Тоді

$$\dot{X}_k^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sum_{j=1}^{n} d_{jk}\psi_j - \sum_{j=1}^{n} z_{jk}\lambda_j < 0, \\ > 0, & \text{якщо } \sum_{j=1}^{n} d_{jk}\psi_j - \sum_{j=1}^{n} z_{jk}\lambda_j = 0. \end{cases}$$

Назвемо k-ту галузь такою, що розвивається в момент часу t, якщо $\dot{X}_k^{(1)}(t) > 0$, і такою, що не розвивається, якщо $\dot{X}_k^{(1)}(t) = 0$. У разі, коли всі галузі розвиваються,

$$\psi = (D^T)^{-1} Z^T \lambda = Q^T \lambda ,$$

тобто ціни фондів всіх n галузей залежать від ціни фондоутворюючих продуктів λ_j, $j \in \{1,...,s\}$. Ціни зношення з урахуванням (6) та фондоозброєності галузей k_k в цьому випадку також залежать від цін фондів та праці.

$$\widetilde{P}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} (\mu_k \widetilde{\lambda}_j - \nu_j) , \; \nu_j = \frac{\dot{\lambda}_j}{\gamma}, \; k \in \{1,...,n\}, \; j \in \{1,...,s\}. \qquad (16)$$

Перші s рівнянь (15) при заданих λ_j, $j \in \{1,...,s\}$ утворюють замкнену нелінійну систему з s невідомими ν_j. Розв'язавши цю систему, для цін фондоутворюючих продуктів λ_j, $j \in \{1,...,s\}$, одержимо задачу Коші

$$\dot{\lambda}_j = \gamma \widetilde{\nu}_j (\lambda_1/\gamma,...,\lambda_s/\gamma), \quad j \in \{1,...,s\}, \quad \lambda_j(0) = \lambda_{j0},$$

яку при заданих цінах праці $\gamma(t \geq 0)$ можна розв'язати.

Якщо відомі ціни фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(t)$, $k \leq s$, ціна праці $\gamma(t)$, $t \geq 0$, то з (16) знаходимо ціни зношення $\widetilde{P}_k$, $k \in \{1,...,n\}$, з (14) — магістральні фондоозброєності $k_{k\,\mathrm{mag}}(t \geq 0)$, з (15) — ціни нефондоутворюючих продуктів λ_k, $k > s$. Таким чином, ціни всіх продуктів і фондів $\lambda_k(t), \psi_k(t)$, $t \geq 0$, а також магістральні фондоозброєності $k_{k\,\mathrm{mag}}(t \geq 0)$ залежать від ціни праці $\gamma(t)$ та початкових значень цін фондоутворюючих продуктів $\lambda_k(0)$, $k \in \{1,...,s\}$.

Говорити про конкретні особливості оптимальної траєкторії можна тільки при достатньо конкретних припущеннях про явну залежність вхідних змінних від часу. Будемо орієнтуватися на випадок сталих і не залежних явно від часу матриць $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, Q, B_1, B_2$, виробничих функцій F_k та корисності g, приймаючи до уваги, що виявлені для даного випадку особливості зберігаються і при відхиленні в помірних межах від цін припущень.

Задамо $\lambda_k = \lambda_{k0} e^{-\delta t}$, $k \in \{1,...,n\}$; $\gamma = \gamma_0 e^{-\delta t}$,

де λ_{k0}, γ_0 — константи, які треба визначити. Тоді

$$\widetilde{\lambda}_k = \frac{\lambda_{k0}}{\gamma_0}, \; \widetilde{P}_k = \sum_{j=1}^{n} q_{jk} (\mu_k + \delta) \widetilde{\lambda}_j ,$$

і система (15) при $k \in \{1,...,s\}$ представляє собою нелінійну систему рівнянь з s невідомими $\widetilde{\lambda}_k$, $k \in \{1,...,s\}$. Позначимо її розв'язок $\widetilde{\lambda}^*$. Тоді $\widetilde{P}_k^*$, k_k^* відповідні цьому розв'язку значення з врахуванням рівності (14). Значення змінних $\widetilde{\lambda}_j$, $j \in \{s+1,...,n\}$ обчислюємо за формулою (15).

Знайдено деяку допустиму систему цін λ, γ, ψ, визначену з точністю константи γ_0, якій відповідає сталий вектор оптимальної фондоозброєності k.

Із умови $K_k = \text{const}$ випливає згідно з четвертим рівнянням (1)

$$I_k = \sum_{j=1}^{n} d_{kj} \dot{X}_j^1 = \mu_k K_k .$$

Враховуючи, що $K_k = k_k L_k$ із (3) та (13), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{n} (E-W)_{kj} f_j(k_j) L_j = \sum_{j=1`}^{n} q_{kj} \mu_j k_j L_j + C_k - \sum_{j=1}^{m} u_{kj} Y_j^{(2)} , \quad k \in \{1,...,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} L_j = N . \tag{17}$$

Нехай $g(C) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k C_k$. Знайдемо $\frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*} = \max_k \frac{\theta_k}{\tilde{\lambda}_k^*}$ і задамо $\gamma = \frac{\theta_l}{\tilde{\lambda}_l^*}$. Це означає, що $\overline{\lambda}_l = \theta_l$ та $\lambda_k^* > \theta_k$, $k \neq l$, тобто $C_k^* = C_k^{\min}$, $k \neq l$, а C_l не визначено. Підставляючи ці значення в (17), отримаємо систему $(n+1)$ лінійних рівнянь відносно $(n+1)$ невідомих L_k, C_l. Вважаємо, що існує розв'язок даної системи: $L_k^* > 0$, $C_l^* \geq C_l^{\min}$. Внаслідок продуктивності та нерозкладуваності матриці $(E-W)$ цей розв'язок існує. Отриманий розв'язок k_k^*, C_k^*, L_k^*, $K_k^* = k_k^* L_k^*$, $I_k^* = \mu_k K_k^*$, $X_k^{(1)*} = f(k_k^*) L_k^*$, $X^{(2)*} = (E - A_{22})^{-1} \times$ $\times \{A_{21} X^{(1)*} - Y^{(2)}\}$, $\dot{X}^{(1)*} = (D^{-1}) I^*$, $\dot{X}^{(2)*} = (E - A_{22})^{-1} A_{21} \dot{X}^{(1)*}$ представляє собою шуканий план.

Якщо вхідні показники залежать від часу, то стаціонарний режим відсутній, але існує деякий його аналог, що представляє собою врівноважений розвиток, обумовлений екзогенною зміною вхідної інформації. Такі показники стаціонарного режиму, як ціни та фондоозброєності галузей k_k, не залежать від вибору функції корисності $g(C)$, що співпадає з трудовою теорією вартості.

Ліві крайові траєкторії знаходяться з таких задач Коші:

$$\begin{cases} \dot{K}_k = I_k - \mu_k K_k , \\ K_k(0) = K_{k0}, \quad k \in \{1,...,n\}. \end{cases}$$

Розв'язавши їх, отримаємо

$$K_k(t) = \frac{I_k}{\mu_k} + \left(K_{k0} - \frac{I_k}{\mu_k} \right) e^{-\mu_k t} , \; k \in \{1,...,n\} .$$

Перетин відповідних компонент лівої крайової траєкторії з відповідними компонентами магістралі дає точку перемикання τ. Її можна визначити із задачі математичного програмування

$$\min \tau, \quad 0 \le \frac{\mu_k (K^*_{k\,\mathrm{mag}} - K_{k0} e^{-\mu_k \tau})}{1 - e^{-\mu_k \tau}} \le I^*_{k\,\mathrm{mag}}, \; \tau \ge 0,$$

де

$$I^*_{k\,\mathrm{mag}} = \begin{cases} I_{k\,\mathrm{mag}}, & K_{k0} \le K_{k\,\mathrm{mag}}, \\ \dfrac{K_{k0}}{K_{k\,\mathrm{mag}}} I_{k\,\mathrm{mag}}, & K_{k0} > K_{k\,\mathrm{mag}}, \end{cases}$$

$$K^*_{k\,\mathrm{mag}} = \begin{cases} K_{k\,\mathrm{mag}} (1 - \varepsilon_k), & K_{k0} \le K_{k\,\mathrm{mag}}, \\ K_{k\,\mathrm{mag}} (1 + \varepsilon_k), & K_{k0} > K_{k\,\mathrm{mag}}. \end{cases}$$

Оскільки кожна компонента лівої крайової траєкторії $K_k(t)$ при прямуванні t до безмежності наближається знизу при $K_{k0} \le K_{k\,\mathrm{mag}}$ або зверху при $K_{k0} > K_{k\,\mathrm{mag}}$ до відповідної компоненти магістралі $K_{k\,\mathrm{mag}}$ і їх не перетинає, то введені досить малі додатні величини ε_k, щоб ліва крайова траєкторія перетинала $K_{k\,\mathrm{mag}}(1 - \varepsilon_k)$ при $K_{k0} \le K_{k\,\mathrm{mag}}$ або $K_{k\,\mathrm{mag}}(1 + \varepsilon_k)$ при $K_{k0} > K_{k\,\mathrm{mag}}$.

Після знаходження точки перемикання τ можна знайти компоненту лівого керування за формулою

$$I_{kl} = \frac{\mu_k (K^*_{k\,\mathrm{mag}} - K_{k0} e^{-\mu_k \tau})}{1 - e^{-\mu_k \tau}}.$$

Опишемо послідовність розв'язання задачі.

1. Знаходимо стаціонарний режим ς^*, π^*.
2. Визначаємо ліву крайову траєкторію.
3. Знаходимо лівий момент перемикання керувань.
4. Обчислюємо ліве керування.

Проведено дослідження еколого-економічної системи при таких даних: $n = 3$, $m = 2$, $\mu_1 = 0{,}07$, $\mu_2 = 0{,}06$, $\mu_3 = 0{,}05$; $\theta_1 = 1{,}5$, $\theta_2 = 0{,}8$, $\theta_3 = 1$; $\delta = 0{,}05$; $s = 1$; $N = 50$;

$$F_1(K_1, L_1) = 10 (K_1)^{1/2} (L_1)^{1/2}, \; F_2(K_2, L_2) = 12 (K_2)^{1/3} (L_2)^{2/3},$$

$$F_3(K_3, L_3) = 15 (K_3)^{1/4} (L_3)^{3/4};$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0{,}403 & 0{,}5 & 0{,}096 \\ 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}226 \\ 0{,}92 & 0{,}06 & 0{,}54 \end{pmatrix}, \; A_{12} = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}007 \\ 0{,}09 & 0{,}25 \\ 0{,}9 & 0{,}59 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}04 & 0{,}005 \\ 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}3 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0{,}01 \\ 0{,}1 & 0{,}34 \\ 0{,}07 & 0{,}6 \end{pmatrix};$$

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ A_{21}=\begin{pmatrix}0{,}002 & 0{,}007 & 0{,}008\\ 0{,}006 & 0{,}003 & 0{,}004\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0{,}55\\ 0{,}67 & 0{,}01\end{pmatrix};\ Y^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix};$$

$$K_{10}=260,\ K_{20}=180,\ K_{30}=525;\ V_{10}=17,\ V_{20}=10,\ V_{30}=28;$$

$$C_{1\min}=10,\ C_{2\min}=15,\ C_{3\min}=20.$$

У результаті розрахунку одержали оптимальний план:

- ціни зношення $\widetilde{P}_1=0{,}025$; $\widetilde{P}_2=0{,}021$; $\widetilde{P}_3=0{,}023$;
- ціни продуктів $\widetilde{\lambda}_1=1{,}618$; $\widetilde{\lambda}_2=0{,}965$; $\widetilde{\lambda}_3=0{,}974$;
- надлишкова галузь $l=3$;
- початкове значення ціни праці $\gamma_0=1{,}027$;
- початкові значення цін продуктів $\lambda_{10}=1{,}662$; $\lambda_{20}=0{,}991$; $\lambda_{30}=1$;
- трудові ресурси $L_1=6{,}678$; $L_2=8{,}062$; $L_3=35{,}26$;
- невиробниче споживання $C_1=10$; $C_2=15$; $C_3=42{,}433$;
- капітал $K_1=265{,}235$; $K_2=186{,}386$; $K_3=520{,}146$;
- валовий випуск основної продукції $X_1^{(1)}=420{,}867$; $X_2^{(1)}=272{,}734$; $X_3^{(1)}=1037$;
- знищені забруднювачі $X_1^{(2)}=21{,}193$; $X_2^{(2)}=19{,}888$;
- кінцева продукція $Y_1^{(1)}=14{,}609$; $Y_2^{(1)}=15$; $Y_3^{(1)}=42{,}433$;
- інвестиції $I_1=1{,}485$; $I_2=0{,}783$; $I_3=2{,}341$;
- прирости валової продукції $\dot{X}_1^{(1)}=43{,}958$; $\dot{X}_2^{(1)}=4{,}859$, $\dot{X}_3^{(1)}=0$;
- прирости знищених забруднювачів $\dot{X}_1^{(2)}=0{,}264$; $\dot{X}_2^{(2)}=0{,}415$;
- лівий момент перемикання $\tau=2{,}2$;
- ліве керування за інвестиціями $I_{1l}=0{,}00338$; $I_{2l}=0{,}394$; $I_{3l}==1{,}727$.

Економічне обґрунтування отриманих результатів: спочатку на часовому проміжку $(0;2{,}2)$ перша галузь виробництва вкладає 85,458% капіталу на споживання і 14,542% на накопичення відносно кінцевої продукції, а друга і третя галузі весь свій капітал вкладають на споживання. Накопичення капіталу немає. Починаючи з моменту перемикання $\tau=2{,}2$, розвиток усіх галузей іде за магістральним режимом.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ляшенко І.М.* Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. — Київ: Вища шк., 1999. — 236 с.
2. *Основы* теории оптимального управления / Под ред. В.Ф. Кротова. — М.: Знание, 1990. — 430 с.
3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 1998. — 240 с.

Надійшла 07.12.2006