НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.7

# СИГНАЛЬНЫЕ ПАРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

**Н.Н. ДИДУК**

Введено понятие *сигнальной пары* и рассмотрены основные способы его применения. Показано, в частности, что сигнальные пары можно подвергать преобразованиям, которые подобны хорошо известным преобразованиям из элементарной теории вероятностей. С помощью таких преобразований можно строить новые пространства неопределенности, пригодные для описания сложных типов неопределенности, таких, например, как *поливероятностный* тип. Рассмотрены примеры.

Введенное в статье понятие *сигнальной пары* представляет собой результат параллельного расширения на все типы неопределенности двух понятий: *распределения вероятностей*, заданного на (дискретном) множестве $X$, и *переходного распределения вероятностей* с множества $X$ на (дискретное) множество $Y$. Цель статьи — построение с помощью сигнальных пар новой ветви общего аппарата неопределенности.

## 1. ПОНЯТИЕ СИГНАЛЬНОЙ ПАРЫ

В изложении используются следующие объекты: 1) два *дискретных* (не более чем счетной мощности) множества $X$ и $Y$; 2) *пространство неопределенности* (ПН) вида $(X,\mathsf{S})$ [1, с. 129]; 2) *информационный канал* (в дальнейшем — просто *канал*) $\mathsf{V}$ над парой алфавитов $(X,Y)$ (т.е. канал перехода от множества $X$ к множеству $Y$) [2, разд. 2 и 3]. Напомним также, что множество всех *критериев свертывания* (КС) по множеству $X$ обозначается $\mathsf{T}(X)$, а множество всех каналов над парой алфавитов $(X,Y)$ обозначается $\mathcal{V}(X,Y)$

**Определение 1.** Пусть заданы: КС $\mathsf{S}\in\mathsf{T}(X)$ и *замкнутый* канал $\mathsf{V}\in\mathcal{V}(X,Y)$ [2, разд. 3]. Тогда пару вида $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ будем называть **сигнальной парой** (СП) над парой алфавитов $(X,Y)$. Множества $X$ и $Y$ будем называть соответственно **входным** и **выходным алфавитами** сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. ■

Сразу же предложим здесь три возможных способа применения сигнальных пар. Во-первых, СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ может рассматриваться как фрагмент модели *системы связи*, где критерий $\mathsf{S}$ (или соответствующее ему ПН $(X,\mathsf{S})$) является описанием *источника сообщений*, а $\mathsf{V}$ — описание *канала связи*. Опираясь на эту интерпретацию, мы дальше так и будем говорить, что $\mathsf{S}$ есть **источник**, а $\mathsf{V}$ — **канал** сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ (а иногда источником будем называть также ПН $(X,\mathsf{S})$).

Во-вторых, СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ может рассматриваться как описание фрагмента задачи *принятия решений* (без указания множества решений и функции потерь). В этой задаче необходимость в принятии решения возникает на фоне *исходной* ситуации неопределенности, описываемой пространством $(X,\mathsf{S})$. Но условия задачи допускают возможность перед принятием решения провести некое *наблюдение*, которое может помочь принятию правильного решения путем уменьшения степени неопределенности ситуации. *Полное* описание условий проведения наблюдения может состоять из ответов на несколько самостоятельных вопросов. Например, таких: 1) каков характер *ситуации неопределенности*, касающейся результата наблюдения (т.е. точки множества $Y$), в зависимости от неизвестного *состояния природы* (т.е. точки множества $X$); 2) какова *стоимость* наблюдения (которая может зависеть от неизвестного состояния природы); 3) каковы *дополнительные убытки* (которые могут зависеть от *результата* наблюдения) и т.п. Ответы на все вопросы такого рода могут быть отражены путем соответствующего выбора канала $\mathsf{V}$ сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. Так что при описании задачи принятия решений канал $\mathsf{V}$ сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ может рассматриваться как *полное описание* условий наблюдения.

Наконец, еще один способ применения сигнальных пар вида $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ может состоять в том, чтобы рассматривать последние просто как *строительный материал*, позволяющий конструировать способы описания ситуаций неопределенности *более сложных типов* по сравнению с ситуацией, описываемой пространством $(X,\mathsf{S})$. Далее более подробно рассмотрим именно этот последний способ применения сигнальных пар.

Для получения первоначального представления о том, что именно понимается под использованием сигнальных пар в роли строительного материала, достаточно обратиться к элементарной теории вероятностей. Действительно, нетрудно построить теоретико-вероятностный аналог понятия *сигнальная пара*, а затем рассмотреть известные в теории вероятностей преобразования. Вероятностным аналогом сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ над парой алфавитов $(X,Y)$ будет пара вида $(p,s)$, где $p$ — распределение вероятностей (РВ) на множестве $X$, а $s$ — переходное распределение (ПР) с множества $X$ на множество $Y$. А известный аппарат *комбинирования* элементов пары $(p,s)$ позволяет построить из нее два новых распределения вероятностей: 1) *двумерное* РВ на произведении $X \times Y$ множеств $X$ и $Y$; и 2) *одномерное* РВ на множестве $Y$. Ниже мы сначала опишем оба эти способа построения новых РВ, а затем покажем, как построить аналогичные способы комбинирования элементов сигнальных пар.

## 2. ПОНЯТИЯ КОМПОЗИЦИИ И СВЕРТКИ ДЛЯ РВ

Множество всех РВ на множестве $X$ обозначается $\mathscr{P}(X)$ [1, с. 130]. Множество всех ПР с множества $X$ на множество $Y$ будем обозначать $\mathscr{S}(X,Y)$. Как видно из выражения (1) статьи [2], всякое ПР $s \in \mathscr{S}(X,Y)$ может быть представлено в виде семейства

$$s = \big(s(\bullet \mid x) \mid x \in X\big), \tag{1}$$

каждый элемент которого $s(\bullet \mid x)$ есть РВ на множестве $Y$ (т.е. $s(\bullet \mid x) \in \in \mathscr{P}(Y)$ ). А так как всякое семейство является *функцией* (для представления которой используется особый *язык семейств*), соотношение $s \in \mathscr{S}(X,Y)$ равносильно утверждению, что $s$ есть отображение множества $X$ в $\mathscr{P}(Y)$. Следовательно, $\mathscr{S}(X,Y)$ есть множество *всех* отображений $X$ в $\mathscr{P}(Y)$, т.е. имеем соотношение

$$\mathscr{S}(X,Y) = (\mathscr{P}(Y))^X . \tag{2}$$

Пусть теперь задана пара $(p,s)$ такая, что $p \in \mathscr{P}(X)$ и $s \in \mathscr{S}(X,Y)$. Построим два новых РВ: 1) (двумерное) распределение

$$p \square s \underset{df}{=} (x,y) \mapsto p(x) \cdot s(y \mid x) \lozenge X \times Y \tag{3}$$

на произведении множеств $X \times Y$ и 2) (одномерное) распределение

$$p * s \underset{df}{=} y \mapsto \sum_{x \in X} p(x) \cdot s(y \mid x) \lozenge Y \tag{4}$$

на множестве $Y$.

**Определение 2.** Для любых $p \in \mathscr{P}(X)$ и $s \in \mathscr{S}(X,Y)$ распределения вероятностей $p \square s$ и $p * s$ (характеризуемые дефинициями (3) и (4)) будем называть соответственно **композицией** и **сверткой** пары $(p,s)$. ■

В силу дефиниций (3) и (4) вероятность $p \square s(x,y)$ совместного выпадения пары $(x,y)$ элементов $x \in X$ и $y \in Y$ имеет вид

$$p \square s(x,y) = p(x) \cdot s(y \mid x), \tag{5}$$

а вероятность $p * s(y)$ элемента $y \in Y$ — вид

$$p * s(y) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot s(y \mid x). \tag{6}$$

Сравнение же соотношений (5) и (6) дает для каждого $y \in Y$ следующее равенство:

$$p * s(y) = \sum_{x \in X} p \square s(x,y). \tag{7}$$

Композицию $p \square s$ и свертку $p * s$ пары $(p, s)$ дальше будем использовать в качестве образца для получения аналогичных понятий *композиции* и *свертки сигнальных пар* вида $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$.

## 3. КОМПОЗИЦИИ И СВЕРТКИ СИГНАЛЬНЫХ ПАР

Пусть заданы: КС $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$ (по множеству $X$) и (замкнутый) канал $\mathsf{V} \in \mathcal{V}(X, Y)$ (над парой алфавитов $(X, Y)$). Иначе говоря, задана СП вида $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$. В работе [2, разд. 2] было принято соглашение, что всякий канал $\mathsf{V} \in \mathcal{V}(X, Y)$ может быть представлен в виде семейства

$$\mathsf{V} \underset{df}{=} \left(\mathsf{V}^x \mid x \in X\right), \tag{8}$$

где $\mathsf{V}^x$ для каждого $x \in X$ есть КС по множеству $Y$ (ввиду замкнутости канала $\mathsf{V}$).

Начнем с построения *композиции* сигнальной пары $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$. Пусть задана некоторая (двуместная) функция $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^{X \times Y}$. Из функции $h$, определенной на множестве $X \times Y$, можно с помощью канала $\mathsf{V}$ получить (ввиду (8)) следующую (одноместную) функцию $h_1$, определенную на множестве $X$:

$$h_1 \underset{df}{=} x \mapsto \underset{y \in Y}{\mathsf{V}^x} h(x, y) \lozenge X. \tag{9}$$

Так как по условию каждый КС $\mathsf{V}^x$, входящий в состав канала $\mathsf{V}$, является *нормальным* (т.е. *сохраняет нуль*) [2, разд. 2, определение 1], значение

$$h_1(x) = \underset{y \in Y}{\mathsf{V}^x} h(x, y) \tag{10}$$

функции $h_1$ для каждого $x \in X$ удовлетворяет неравенству $h_1(x) \geq 0$ [2, разд. 2]. Таким образом, функция $h_1$ принадлежит множеству $\overline{\mathbf{R}}_+^X$, и к ней, следовательно, можно применить КС $\mathsf{S}$ (по множеству $X$) из СП $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$. Результат будет таким:

$$\mathsf{S}(h_1) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}} \underset{y \in Y}{\mathsf{V}^x} h(x, y). \tag{11}$$

**Определение 3.** Пусть задана сигнальная пара $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$ над парой алфавитов $(X, Y)$. **Композицией** сигнальной пары $(\mathsf{S}, \mathsf{V})$ будем называть (двумерное) ПН вида $\left(X \times Y,\ \mathsf{S} \square \mathsf{V}\right)$, а иногда — КС $\mathsf{S} \square \mathsf{V}$ этого пространства, характеризуемый дефиницией

$$\mathsf{S} \square \mathsf{V} \underset{df}{=} h \mapsto \underset{x \in X}{\mathsf{S}} \underset{y \in Y}{\mathsf{V}^x} h(x, y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^{X \times Y}. \blacksquare \tag{12}$$

Из дефиниции (12) следует, что для каждой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^{X\times Y}$ имеет место

$$\mathsf{S}\square\mathsf{V}(h) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y\in Y}{\overset{x}{\mathsf{V}}}\, h(x,y)\,. \tag{13}$$

Аналогично можно прийти к определению понятия *свертки* СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. Пусть задана функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^{Y}$. Из функции $g$, определенной на множестве $Y$, можно с помощью канала $\mathsf{V}$ получить функцию $g_1$, определенную на множестве $X$:

$$g_1 \underset{df}{=} x \mapsto \mathsf{V}^x(g) \Diamond X\,. \tag{14}$$

Ввиду нормальности каждого КС $\mathsf{V}^x$, для любого $x \in X$ значение

$$g_1(x) = \mathsf{V}^x(g) = \underset{y\in Y}{\overset{x}{\mathsf{V}}}\, g(y) \tag{15}$$

функции $g_1$ удовлетворяет неравенству $g_1(x) \geq 0$. Таким образом, функция $g_1$ принадлежит множеству $\overline{\mathbf{R}}_+^{X}$, и к ней можно применить КС $\mathsf{S}$ из СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$:

$$\mathsf{S}(g_1) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\, \mathsf{V}^x(g)\,. \tag{16}$$

**Определение 4.** Пусть задана сигнальная пара $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ над парой алфавитов $(X,Y)$. **Сверткой** сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ будем называть ПН вида $(Y,\mathsf{S}*\mathsf{V})$, а иногда — КС $\mathsf{S}*\mathsf{V}$ этого пространства, характеризуемый дефиницией

$$\mathsf{S}*\mathsf{V} \underset{df}{=} g \mapsto \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\, \mathsf{V}^x(g) \Diamond \overline{\mathbf{R}}_+^{Y}\,. \blacksquare \tag{17}$$

Из дефиниции (17) следует, что для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^{Y}$ имеет место

$$\mathsf{S}*\mathsf{V}(g) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\, \mathsf{V}^x(g) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y\in Y}{\overset{x}{\mathsf{V}}}\, g(y)\,. \tag{18}$$

Таким образом, найдены два способа комбинирования элементов СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$, в результате применения которых получаются: 1) (двумерное) ПН вида $(X\times Y,\ \mathsf{S}\square\mathsf{V})$, названное *композицией* СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$; и 2) (одномерное) ПН вида $(Y,\mathsf{S}*\mathsf{V})$, названное *сверткой* СП $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. Теперь необходимо показать, что эти новые понятия композиции и свертки действительно являются расширениями соответствующих понятий композиции и свертки пар вида $(p,s)$. Иначе говоря, нужно показать, что выполняется *требование преемственности* в развитии аппарата неопределенности, которое было сформулировано в работе [3, разд. 3].

## 4. ВЫПОЛНЕНИЕ ТРЕБОВАНИЯ ПРЕЕМСТВЕННОСТИ

Как показано в работах [3, 4], для проверки выполнения требования преемственности достаточно применить новый аппарат к *вероятностному* типу неопределенности.

Итак, пусть задана пара $(p,s)$, где $p\in\mathscr{P}(X)$ и $s\in\mathscr{S}(X,Y)$. Фактически задание пары $(p,s)$ равносильно заданию СП вида $(\Sigma_p,\underline{\underline{\Sigma}}_s)$, где $\Sigma_p$ — КС шенноновского пространства $(X,\Sigma_p)$ [1, с. 130], а $\underline{\underline{\Sigma}}_s$ — шенноновский канал [2, разд. 1]. Сигнальную пару $(\Sigma_p,\underline{\underline{\Sigma}}_s)$ тоже будем называть **шенноновской**. Наша задача сводится к тому, чтобы сравнить композицию и свертку пары $(p,s)$ с композицией и сверткой шенноновской СП $(\Sigma_p,\underline{\underline{\Sigma}}_s)$.

**Теорема.** Для любых $p\in\mathscr{P}(X)$ и $s\in\mathscr{S}(X,Y)$ имеют место равенства

$$\Sigma_p \square \underline{\underline{\Sigma}}_s=\Sigma_{p\,\square\, s}\,,\quad \Sigma_p * \underline{\underline{\Sigma}}_s=\Sigma_{p\,*\,s}\,, \tag{19}$$

где $\Sigma_{p\,\square\, s}$ и $\Sigma_{p\,*\,s}$ — критерии свертывания шенноновских пространств $(X\times Y,\Sigma_{p\,\square\, s})$ и $(Y,\Sigma_{p\,*\,s})$, соответствующих композиции $p\square s$ и свертке $p*s$ пары $(p,s)$. ■

**Доказательство**. Докажем сначала первое равенство из (19). КС $\Sigma_{p\,\square\, s}$ шенноновского пространства $(X\times Y,\Sigma_{p\,\square\, s})$ характеризуется (по аналогии с выражением (1) из работы [1]) следующим условием: для каждой (двуместной) функции $h\in\overline{\mathbf{R}}_+^{X\times Y}$ должно выполняться равенство

$$\Sigma_{p\,\square\, s}(h)=\sum_{(x,y)\in X\times Y} p\square s(x,y)\odot h(x,y)\,, \tag{20}$$

откуда ввиду (5) получим

$$\Sigma_{p\,\square\, s}(h)=\sum_{x\in X} p(x)\odot\sum_{y\in Y} s(y\,|\,x)\odot h(x,y)\,. \tag{21}$$

Дальнейшие же элементарные преобразования выражения (21) дают

$$\Sigma_{p\,\square\, s}(h)=\sum_{x\in X} p(x)\odot\ \underset{y\in Y}{\Sigma_{s(\bullet|x)}}\, h(x,y)=\underset{x\in X}{\Sigma_p}\ \underset{y\in Y}{\Sigma_{s(\bullet|x)}}\, h(x,y)\,. \tag{22}$$

С другой стороны, ввиду дефиниции (12) КС $\Sigma_p \square \underline{\underline{\Sigma}}_s$ имеет вид

$$\Sigma_p \square \underline{\underline{\Sigma}}_s=h\ \mapsto \underset{x\in X}{\Sigma_p}\ \underset{y\in Y}{\Sigma_{s(\bullet|x)}}\, h(x,y)\Diamond\,\overline{\mathbf{R}}_+^{X\times Y}\,. \tag{23}$$

Сравнение выражений (22) и (23) показывает, что имеет место первое из равенств (19).

Второе из равенств (19) доказывается аналогично. Так, КС $\Sigma_{p*s}$ шенноновского пространства $(Y, \Sigma_{p*s})$ характеризуется следующим условием: для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}$ должно выполняться равенство

$$\Sigma_{p*s}(g) = \sum_{y \in Y} p * s(y) \odot g(y)\,, \tag{24}$$

откуда ввиду (7) нетрудно получить выражение

$$\Sigma_{p*s}(g) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p \square s(x,y) \odot g(y) = \Sigma_{\substack{p \\ x \in X}} \Sigma_{\substack{s(\bullet|x) \\ y \in Y}} g(y)\,. \tag{25}$$

С другой стороны, ввиду дефиниции (17) КС $\Sigma_p * \Sigma_s$ имеет вид

$$\Sigma_p * \Sigma_s = h \mapsto \Sigma_{\substack{p \\ x \in X}} \Sigma_{\substack{s(\bullet|x) \\ y \in Y}} g(y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_{+}^{Y}\,. \tag{26}$$

Сравнение выражений (25) и (26) показывает, что имеет место второе из равенств (19).

Теорема доказана. ■

## 5. СВЯЗЬ СВЕРТОК С КОМПОЗИЦИЯМИ

Существование некой связи между свертками и композициями не вызывает сомнений — достаточно сравнить выражения (13) и (18) или просто взглянуть на выражение (7). Сейчас мы хотим выяснить *характер* этой связи. Для этого рассмотрим сначала известный из теории вероятностей метод построения *маргинальных* РВ (или иначе — *проекций*) по заданному на произведении двух множеств *двумерному* распределению вероятностей.

Итак, пусть на произведении $X \times Y$ множеств $X$ и $Y$ задано двумерное РВ $\pi \in \mathscr{P}(X \times Y)$. **Первой** и **второй проекцией** распределения $\pi \in \mathscr{P}(X \times Y)$ называются следующие два РВ соответственно на множестве $X$ и на множестве $Y$:

$$\mathrm{pr}_1 \pi = x \mapsto \sum_{y \in Y} \pi(x,y) \lozenge X\,, \tag{27}$$

$$\mathrm{pr}_2 \pi = y \mapsto \sum_{x \in X} \pi(x,y) \lozenge Y\,. \tag{28}$$

Пусть теперь заданы: РВ $p \in \mathscr{P}(X)$ (на множестве $X$) и ПР $s \in \mathscr{S}(X,Y)$ (с $X$ на $Y$). Тогда, поскольку композиция $p \square s$ пары $(p,s)$ есть двумерное РВ на произведении $X \times Y$, с помощью выражений (27) и (28) можно найти первую и вторую проекции распределения $p \square s$. Сопоставив выражения (7) и (28), приходим к выводу, что интересующая нас связь между сверткой и композицией пары $(p,s)$ имеет следующий простой вид:

$$p * s = \mathrm{pr}_2\,(p \square s)\,. \qquad (29)$$

Сразу возникает вопрос о характере связи между сверткой $\mathsf{S}*\mathsf{V}$ и композицией $\mathsf{S}\square\mathsf{V}$ сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. Можно ли эту связь выразить с помощью соотношения, аналогичного (29)? Для ответа на этот вопрос пришлось бы сначала построить понятие *проекции* для двумерных ПН. Однако эта задача уже была решена в работе [5, разд. 9]. Так что здесь имеется возможность просто взять готовый результат.

Итак, пусть задано некоторое *двумерное* ПН вида $(X \times Y,\ \mathsf{W})$ (где $\mathsf{W}$ — КС по произведению $X \times Y$). Тогда можно построить два новых (одномерных) ПН $(X,\ \mathrm{pr}_1\mathsf{W})$ и $(Y,\ \mathrm{pr}_2\mathsf{W})$, где критерии $\mathrm{pr}_1\mathsf{W}$ и $\mathrm{pr}_2\mathsf{W}$ характеризуются следующими условиями: для любых двух функций $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ и $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$ выполняются равенства

$$\mathrm{pr}_1\mathsf{W}(f) = \underset{(x,y)\in X\times Y}{\mathsf{W}} f(x)\,, \qquad (30)$$

$$\mathrm{pr}_2\mathsf{W}(g) = \underset{(x,y)\in X\times Y}{\mathsf{W}} g(y)\,. \qquad (31)$$

Если теперь посмотреть сначала на выражения (13) и (18), а затем — на (31), то станет ясно, что для сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ имеет место равенство

$$\mathsf{S}*\mathsf{V} = \mathrm{pr}_2\,(\mathsf{S}\square\mathsf{V})\,, \qquad (32)$$

аналогичное равенству (29). Таким образом, мы выяснили характер связи между свертками и композициями сигнальных пар (и показали одновременно, что смысл этой связи при переходе от вероятностного типа неопределенности к общему случаю совершенно не изменился).

## 6. СИГНАЛЬНЫЕ ПАРЫ С ФИКТИВНЫМИ КАНАЛАМИ

Рассмотрим теперь СП над парой алфавитов $(X, Y)$ вида $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ такую, что канал $\mathsf{V}$ является *фиктивным* [2, разд. 5, пример 8]. Фиктивность канала $\mathsf{V}$ означает, что он имеет вид

$$\mathsf{V} = (\mathsf{T} \mid x \in X)\,, \qquad (33)$$

где $\mathsf{T}$ — *реализатор* канала $\mathsf{V}$, представляющий собой КС по множеству $Y$. Построим композицию $\mathsf{S}\square\mathsf{V}$ сигнальной пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ с таким каналом $\mathsf{V}$. Тогда ввиду выражения (13) для каждой (двуместной) функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_+^{X\times Y}$ можем написать

$$\mathsf{S}\square\mathsf{V}(h) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y\in Y}{\mathsf{T}}\ h(x,y)\,. \qquad (34)$$

Полученное выражение (34) выглядит довольно странно. В самом деле, его правая часть не содержит буквы $\mathsf{V}$, которая имеется в левой части, а вместо нее содержит букву $\mathsf{T}$ (которой в левой части нет). Это означает, что правая часть выражения (34) *фактически* описывает некоторую конструкцию, скорее, из элементов пары $(\mathsf{S},\mathsf{T})$, чем из элементов пары $(\mathsf{S},\mathsf{V})$. Это наблюдение можно узаконить с помощью следующего определения.

**Определение 5.** Пусть заданы два ПН $(X,\mathsf{S})$ и $(Y,\mathsf{T})$, причем пространство $(Y,\mathsf{T})$ является *нормальным*. **Произведением** пространств $(X,\mathsf{S})$ и $(Y,\mathsf{T})$ (взятых в указанном порядке) будем называть (двумерное) ПН вида $(X\times Y,\ \mathsf{S}\times\mathsf{T})$, КС $\mathsf{S}\times\mathsf{T}$ которого характеризуется дефиницией

$$\mathsf{S}\times\mathsf{T} \underset{df}{=} h \mapsto \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y\in Y}{\mathsf{T}}\ h(x,y) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X\times Y}\,. \blacksquare \tag{35}$$

Рассмотрим вопрос о том, насколько согласуется такое понятие произведения двух ПН с известным понятием произведения двух РВ. С этой целью применим понятие произведения ПН к двум шенноновским пространствам $(X,\ \Sigma_p)$ и $(Y,\ \Sigma_q)$ (где $p\in\mathscr{P}(X)$ и $q\in\mathscr{P}(Y)$). Найдем КС $\Sigma_p\times\Sigma_q$ двумерного пространства $(X\times Y,\ \Sigma_p\times\Sigma_q)$. Ввиду выражения (35) для каждой функции $h\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X\times Y}$ получим

$$\Sigma_p\times\Sigma_q(h) = \sum_{x\in X} p(x)\cdot \sum_{y\in Y} q(y)\odot h(x,y)\,. \tag{36}$$

С другой стороны, двумерное РВ $p\times q\in\mathscr{P}(X\times Y)$, представляющее собой *произведение* распределений $p$ и $q$, есть, очевидно, функция следующего вида:

$$p\times q \underset{df}{=} (x,y)\mapsto p(x)\cdot q(y) \lozenge X\times Y\,. \tag{37}$$

Следовательно, соответствующее распределению $p\times q$ двумерное шенноновское пространство $(X\times Y, \Sigma_{p\times q})$ описывается выражением

$$\Sigma_{p\times q}(h) = \sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} p(x)\cdot q(y)\odot h(x,y)\,, \tag{38}$$

имеющим место для каждой функции $h\in\overline{\mathbf{R}}_{+}^{X\times Y}$. Сравнение же выражений (36) и (38) позволяет убедиться, что имеет место равенство $\Sigma_p\times\Sigma_q = \Sigma_{p\times q}$, которое и означает согласованность понятия произведения двух ПН с понятием произведения двух РВ.

## 7. ПРИМЕРЫ КОМБИНИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Ввиду того что, как мы видели, описания композиции и свертки одной и той же СП имеют очень много общего, здесь мы не будем (за исключением одного случая) рассматривать *параллельные* примеры сверток и композиций.

**1. Свертка бесструктурного источника и шенноновского канала.** Рассмотрим СП над парой алфавитов $(X, Y)$ вида $(\mathsf{SUP}_X, \Sigma_S)$, где $\mathsf{SUP}_X$ — КС *бесструктурного* ПН $(X, \mathsf{SUP}_X)$ [1, с. 131], $\Sigma_S$ — шенноновский канал, а $s$ — ПР с $X$ на $Y$. И пусть задана функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Тогда, как следует из выражения (18), результат $\mathsf{SUP}_X * \Sigma_S(g)$ применения свертки $\mathsf{SUP}_X * \Sigma_S$ к функции $g$ должен иметь вид

$$\mathsf{SUP}_X * \Sigma_S(g) = \sup_{x \in X} \Sigma_{s(\bullet|x)} \underset{y \in Y}{} g(y) = \sup_{x \in X} \sum_{y \in Y} s(y\,|\,x) \odot g(y)\,. \qquad (39)$$

**2. Свертка шенноновского источника и канала Заде.** Теперь рассмотрим комбинацию, которую с некоторой натяжкой можно было бы считать обратной к рассмотренной выше. Пусть заданы: РВ $p \in \mathscr{P}(X)$ (на множестве $X$) и переходная функция принадлежности $\lambda = (\lambda(\bullet\,|\,x)\,|\, x \in X)$ с множества $X$ на множество $Y$ [2, выражение (10)]. Это значит, что мы имеем СП над парой алфавитов $(X, Y)$ вида $(\Sigma_p, \mathsf{SUP}_\lambda)$, где

$$\mathsf{SUP}_\lambda = \left(\mathsf{SUP}_{\lambda(\cdot|x)} \,\middle|\, x \in X\right)$$

[там же, выражение (12)]. И пусть задана функция $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^Y$. Тогда, как следует из выражения (18), результат $\Sigma_p * \mathsf{SUP}_\lambda(g)$ применения свертки $\Sigma_p * \mathsf{SUP}_\lambda$ к функции $g$ должен иметь вид

$$\Sigma_p * \mathsf{SUP}_\lambda(g) = \sum_{x \in X} p(x) \odot \underset{y \in Y}{\mathsf{SUP}_{\lambda(\bullet|x)}}\, g(y) =$$

$$= \sum_{x \in X} p(x) \odot \sup_{y \in Y}\, \lambda(y\,|\,x) \odot g(y)\,. \qquad (40)$$

**3. Свертка СП с идеальным каналом.** Построим теперь свертку сигнальной пары вида $(\mathsf{S}, \mathbf{1})$ (состоящей из произвольного КС $\mathsf{S}$ и идеального канала $\mathbf{1}$) над парой алфавитов $(X, X)$. Для всякой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ согласно выражению (18) получим

$$\mathsf{S} * \mathbf{1}(f) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y \in X}{\mathbf{1}^x} f(y)\,. \qquad (41)$$

А в силу выражения (22) из работы [2, разд. 5] можно написать

$$\underset{y \in X}{\mathbf{1}^x} f(y) = \mathbf{1}^x(f) = f(x)\,. \qquad (42)$$

Таким образом, мы получили вывод, что для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место равенство

$$\mathsf{S} * \mathbf{1}(f) = \underset{x \in X}{\mathsf{S}}\ f(x) = \mathsf{S}(f)\,, \qquad (43)$$

из которого следует, что выполняется равенство $\mathsf{S} * \mathbf{1} = \mathsf{S}$.

**4. Композиция СП с идеальным каналом.** Построим теперь композицию той же сигнальной пары вида $(\mathsf{S},\mathbf{1})$ над парой алфавитов $(X, X)$. Для всякой функции $h \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X\times X}$ ввиду (13) можно написать

$$\mathsf{S}\circ\mathbf{1}(h) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}}\ \underset{y\in X}{\mathbf{1}^{x}} h(x,y) . \qquad (44)$$

Для того чтобы раскрыть выражение (44), двуместную функцию $h$ представим в виде семейства одноместных функций. С этой целью для каждого $x \in X$ зададим одноместную функцию $h_x$ (определенную на множестве $X$) следующего вида:

$$h_x \underset{df}{=} y \mapsto h(x,y) \lozenge X . \qquad (45)$$

Ввиду (45) для любых $x, y \in X$ имеем равенство $h(x,y) = h_x(y)$, из которого в силу соотношения (22) из работы [2] следует, что для каждого $x \in X$ имеет место

$$\underset{y\in X}{\mathbf{1}^{x}} h(x,y) = \underset{y\in X}{\mathbf{1}^{x}} h_x(y) = \mathbf{1}^{x}(h_x) = h_x(x) = h(x,x) . \qquad (46)$$

Поэтому вместо (44) окончательно получим

$$\mathsf{S}\circ\mathbf{1}(h) = \underset{x\in X}{\mathsf{S}} h(x,x) . \qquad (47)$$

Заметим, что в построенном таким образом двумерном ПН $(X \times X,\ \mathsf{S}\circ\mathbf{1})$ все точки $x, y \in X \times X$ такие, что $y \neq x$, образуют *область безразличия* этого пространства. Кроме того, выражения (47) и (43) полностью разъясняют характерные особенности функционирования идеального канала $\mathbf{1}$.

## 8. КОММЕНТАРИИ

Хорошо известно, что взятый за образец теоретико-вероятностный аппарат композиций и сверток для пар вида $(p, s)$ (где $p \in \mathscr{P}(X)$ и $s \in \mathscr{S}(X, Y)$) *не позволяет* выйти за рамки вероятностного типа неопределенности. Поэтому здесь ст*о*ит специально подчеркнуть, что предложенный аппарат композиций и сверток сигнальных пар вида $(\mathsf{S},\mathsf{V})$ (где $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$ и $\mathsf{V} \in \mathscr{V}(X, Y)$) дает возможность получать комбинированные пространства неопределенности совершенно *новых типов* (не сводящихся ни к типу критерия $\mathsf{S}$, ни к типу канала $\mathsf{V}$). То же самое можно сказать и о возникшем как бы попутно аппарате для построения *произведений* $(X \times Y,\ \mathsf{S}\times\mathsf{T})$ двух ПН $(X,\mathsf{S})$ и $(Y,\mathsf{T})$.

Это значит, что предложенный аппарат позволяет резко увеличить разнообразие тех типов неопределенности, которые могут быть формализованы (и получить тем самым доступ ко всему математическому инструментарию теории неопределенности). Как уже отмечалось, наряду с (уже освоенными) простейшими типами неопределенности могут существовать и более сложные типы, формализация которых становится возможной благодаря аппарату сверток, композиций и произведений. Легко также понять, что этот аппарат можно применять *больше одного раза* (так как комбинированные КС, такие как $\mathsf{S} * \mathsf{V}$, $\mathsf{S} \square \mathsf{V}$ и $\mathsf{S} \times \mathsf{T}$, могут снова использоваться в качестве источников сигнальных пар и порождать таким образом новые свертки, композиции и произведения). Причем очевидно, что при увеличении числа таких ступеней комбинирования разнообразие новых более сложных пространств неопределенности будет очень быстро расти.

Нужно еще специально подчеркнуть, что все без исключения комбинированные ПН, которые можно построить с помощью предложенного аппарата сверток, композиций и произведений, ничем «не хуже» любых других пространств в том смысле, что к ним можно применять *все общие результаты* теории неопределенности.

Так, например, в силу теоремы 1 из работы [6, разд. 2] *все* пространства неопределенности (значит, и комбинированные тоже) обладают *энтропией*, а следовательно, удовлетворяют *основной теореме кодирования* [там же, теорема 4]. Далее, если комбинированное ПН является *информационным* [7, определение 6], то для него определена *информационная функция*. Иначе говоря, каждой его точке поставлено в соответствие некоторое *количество информации* [там же, определение 7]. Каждое информационное пространство (и комбинированное тоже) ввиду наличия у него информационной функции обладает кроме энтропии еще одной интегральной характеристикой — *мерой неопределенности* (которая обычно отличается от энтропии) [там же, определение 8]. А это значит, что для информационных пространств справедлива также *усиленная теорема кодирования* [там же, с. 78].

Но это — не все. Так, каждое ПН (комбинированное или нет) обладает так называемой *шкалой* (шкала представляет собой функцию, отображающую $\overline{\mathbf{R}}_+$ в $\overline{\mathbf{R}}$ [8, разд. 1]. Особо интересны свойства пространств, у которых шкала является *инъекцией*. Такие пространства названы *усредняющими* [там же, разд. 3]. Они допускают построение своих *равномерных версий* [там же, разд. 6], а кроме того, каждое такое пространство характеризует некоторое специфическое понятие *среднего значения функции* [там же, разд. 4] (откуда и название *усредняющие* ПН). Таким образом, в качестве побочного результата, связанного с появлением аппарата сверток, композиций и произведений, мы получили аппарат для построения большого количества новых типов понятия *среднего*.

Специального внимания заслуживает аппарат *сверток* сигнальных пар, отличающийся от аппарата композиций и произведений тем, что приводит к повышению уровня сложности результата *без нарастания размерностей*. Эта особенность позволяет использовать свертки для формализации ситуаций неопределенности, имеющих как бы внутреннюю иерархическую структуру. Одним из наиболее важных примеров этого рода является *поливероятностный* тип неопределенности, описание которого дается ниже.

## 9. ПОНЯТИЕ ПОЛИВЕРОЯТНОСТНОЙ СИТУАЦИИ

До сих пор широко распространена одна довольно забавная иллюзия. Многие, в том числе и специалисты по теории вероятностей, думают, что ко всем ситуациям неопределенности, имеющим *вероятностную природу*, можно применять аппарат теории вероятностей. Поливероятностные ситуации являются простейшим очевидным опровержением этого мнения. Описываются такие ситуации следующим образом.

Предположим, известно, что из множества (которое предполагается дискретным) всех возможных состояний природы выбрано (но результат выбора остался неизвестным) некоторое состояние в результате *жеребьевки*, которая управлялась *конкретным* распределением вероятностей. Таким образом, ситуация неопределенности, касающаяся неизвестного состояния природы, явно имеет *вероятностную природу*. Однако отсюда еще не следует, что она является *вероятностной* ситуацией, т.е. такой, к которой можно применить математический аппарат теории вероятностей! Действительно, затруднение состоит в том, что о распределении, которое управляло упомянутой жеребьевкой, имеются лишь неполные или косвенные сведения (например, известна система ограничений, которым оно должно удовлетворять) или же сведения вообще отсутствуют. Наиболее универсальный способ описания ситуаций этого типа состоит в явном указании некоторого *множества* РВ, которому гарантированно принадлежит неизвестное распределение, управлявшее жеребьевкой. Такие ситуации мы и называем *поливероятностными*.

Говоря точнее, ситуация неопределенности на дискретном множестве $X$ называется **поливероятностной ситуацией**, если она *характеризуется (исчерпывающим образом) заданием некоторого (непустого) множества распределений вероятностей* $Q \subset \mathscr{P}(X)$ *(при заранее оговоренном условии, что фактически действующее в этой ситуации РВ принадлежит множеству* $Q$*)*. Это определение подразумевает, что кроме множества $Q$, к которому принадлежит действующее РВ, об описываемой поливероятностной ситуации неизвестно больше *ничего*. Так, например, *не предполагается*, что на множестве $Q$ задана какая-либо структура (вероятностный закон, порядок и т.п.).

Заметим, что согласно предложенному определению в объем понятия *поливероятностная ситуация* включаются два крайних частных случая: 1) обычная *вероятностная ситуация*, т.е. такая, что $Q = \{q\}$, где $q$ есть действующее РВ; 2) *ситуация полной неизвестности*, т.е. такая, что $Q \subset \mathscr{P}(X)$.

## 10. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОЛИВЕРОЯТНОСТНЫХ СИТУАЦИЙ

Теперь мы покажем, как можно *погрузить* поливероятностные ситуации неопределенности в пространства неопределенности. Сначала предположим, что множество $Q$ (характеризующее поливероятностную ситуацию) дискретно. Подчеркнем сразу, что предположение о дискретности множества $Q$ (которое, очевидно, исключает возможность равенства $Q = \mathscr{P}(X)$) в дальнейшем будет снято. Поскольку определение поливероятностных ситуаций предполагает *отсутствие* на множестве $Q$ какой бы то ни было структуры, наиболее естественно предположить, что на множестве $Q$ имеет место именно *бесструктурная ситуация неопределенности*. Таким образом, согласно нашему *погружению* бесструктурных ситуаций [1, с. 131], на множестве $Q$ можно построить ПН $(Q, \mathsf{SUP}_Q)$, где КС $\mathsf{SUP}_Q$ имеет вид

$$\mathsf{SUP}_Q \underset{df}{=} g \mapsto \sup_{q \in Q} g(q) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^Q \tag{48}$$

(верхняя грань берется в множестве $\overline{\mathbf{R}}$).

Рассмотрим теперь канал

$$\underline{\underline{\Sigma}}_Q \underset{df}{=} \left(\Sigma_q \mid q \in Q\right) \tag{49}$$

над парой алфавитов $(Q, X)$, *ассоциированный с вероятностями из* $Q$ [2, разд. 5, выражение 17]. Поскольку канал $\underline{\underline{\Sigma}}_Q$ является замкнутым, можем образовать сигнальную пару $(\mathsf{SUP}_Q, \underline{\underline{\Sigma}}_Q)$ (над той же парой алфавитов $(Q, X)$) и построить ее свертку по образцу выражения (17), которую обозначим $\boldsymbol{(Q)}$:

$$\boldsymbol{(Q)} \underset{df}{=} \mathsf{SUP}_Q * \underline{\underline{\Sigma}}_Q = f \mapsto \sup_{q \in Q} \Sigma_q(f) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^X . \tag{50}$$

В результате мы получили новое ПН вида $(X, \boldsymbol{(Q)})$. Заметим, что ввиду (50) и выражения (2) из работы [2] для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место

$$\boldsymbol{(Q)}(f) = \sup_{q \in Q} \sum_{x \in X} q(x) \odot f(x) . \tag{51}$$

Это новое ПН $(X, \boldsymbol{(Q)})$ и предлагается здесь в качестве формализации поливероятностной ситуации, характеризуемой множеством распределений $Q \subset \mathscr{P}(X)$. Причем, принятое выше допущение о дискретности множества $Q$ *не является необходимым* для существования пространства $(X, \boldsymbol{(Q)})$ и, следовательно, это допущение можно снять. Действительно, можно показать, что в выражении (51) верхняя грань будет существовать независимо от того, какова функция $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ и каково множество $Q \subset \mathscr{P}(X)$. Поэтому не исключен также случай $Q = \mathscr{P}(X)$.

В честь М. Бонгарда, который, по-видимому, первый не только обратил внимание на практическую важность поливероятностных ситуаций неопределенности, но и попытался создать для таких ситуаций математический аппарат [9, 10], пространства вида $(X, \boldsymbol{(Q)})$ (где $Q$ — *произвольное* под-множество множества $\mathscr{P}(X)$)) мы будем называть **пространствами Бонгарда**.

Подчеркнем снова, что на пространства Бонгарда (так же, как и на все остальные ПН, получаемые с помощью аппарата сверток, композиций и произведений) распространяется весь математический аппарат, а также все общие результаты теории неопределенности. Заметим еще, что математический аппарат, предложенный М. Бонгардом для поливероятностных ситуаций, довольно близок к тому, который получится в результате применения общего аппарата неопределенности к пространствам Бонгарда.

Ввиду того что поливероятностные ситуации представляют собой чрезвычайно важный с практической точки зрения тип неопределенности, пространства Бонгарда в дальнейшем подлежат очень пристальному изучению (поскольку каждый частный случай чреват собственными специфическими проблемами; типичная из таких проблем — нахождение практичного метода вычисления энтропии).

## ВЫВОДЫ

1. Введено новое понятие *сигнальная пара*, которое может использоваться несколькими способами: а) как фрагмент модели системы связи; б) как часть описания задачи принятия решений; в) как строительный материал, используемый для конструирования способов описания сложных типов неопределенности.

2. Построен еще один фрагмент общего аппарата неопределенности, содержащий преобразования сигнальных пар — *свертку*, *композицию* и *произведение*, — аналогичные хорошо известным из элементарной теории вероятностей преобразованиям распределений вероятностей.

3. С помощью аппарата сверток построен класс пространств неопределенности (*пространства Бонгарда*), которые позволяют формализовать ситуации неопределенности *поливероятностного* типа. Предложенное таким образом *погружение* поливероятностных ситуаций в пространства неопределенности позволит применять к ним общий математический аппарат неопределенности, который *подобен* (не по форме, но по смыслу) существующему аппарату для вероятностных ситуаций.

4. Этот результат имеет особое значение ввиду того, что, хотя поливероятностные ситуации встречаются в практических задачах очень часто, работа с ними наталкивается на следующие трудности. Они *не являются* вероятностными ситуациями в обычном смысле — к ним *неприменим* аппарат теории вероятностей (а также и аппарат теории информации). С целью сделать все же возможным решение практических задач поливероятностные ситуации чаще всего заранее (т.е. еще до начала решения задачи) «приблизительно» подменяют обычными вероятностными ситуациями (например, путем якобы «усреднения»). Предложенное здесь погружение поливероятностных ситуаций позволит отказаться от подобной практики некорректного решения задач.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
2. *Дидук Н.Н.* Информационные каналы как развитие представлений о каналах связи // Там же. — 2007. — № 1. — С. 129–141.
3. *Дидук Н.Н.* Прообразы пространств неопределенности. Простые подпространства // Там же. — 2005. — № 1. — С. 127–142.
4. *Дидук Н.Н.* Решение задачи ограничения пространств неопределенности // Там же. — 2006. — № 1. — С. 106–118.
5. *Дидук Н.Н.* Система морфизмов для пространств неопределенности и ее применение // Там же. — 2003. — № 1. — С. 34–47.
6. *Дидук Н.Н.* Свойства дискретных пространств неопределенности. Уточнение основной теоремы кодирования // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 1. — С. 14–24.
7. *Дидук Н.Н.* Информационные пространства. Понятия собственной информации и неопределенности // Кибернетика. — 1986. — № 4. — С. 74–80.
8. *Дидук Н.Н.* Понятие шкалы пространства неопределенности и его применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2004. — № 3. — С. 115–127.
9. *Бонгард М.М.* О понятии «полезная информация» // Проблемы кибернетики. Вып. 9. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. — С. 71–102.
10. *Бонгард М.М.* Проблема узнавания. — М.: Наука, 1967. — 320 с.

*Поступила 21.07.2006*