УДК 518.9

СИСТЕМЫ С ПРЕДЫСТОРИЕЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЖИВУЧЕСТЬ

А.П. ЯКОВЛЕВА

Исследуются системы с предысторией. Дано их наиболее общее описание в виде функционально-дифференциальных включений. Рассматриваются оптимизационные задачи на основе таких включений и применение этих систем при моделировании свойств живучести.

ВВЕДЕНИЕ

Отметим три направления исследований проблемы живучести для систем, динамика которых описывается функционально-дифференциальными включениями.

1. Распространение теории необходимых условий оптимальности на сложные объекты, представляющие собой системы с предысторией. В этих объектах будущее определяется не только состоянием системы в настоящий момент времени, но и историей ее развития в прошлом — предысторией, что улучшает качество управления и тем самым повышает надежность функционирования динамических систем.

2. Изучение систем, динамика которых описывается дифференциальными, а также функционально-дифференциальными включениями. К дифференциальным включениям (или дифференциальным уравнениям с многозначной правой частью) сводятся различные задачи управления: с обратной связью, дифференциальных игр, дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, а также задачи исследования динамических систем в условиях неопределенности и т.д. Дифференциальное включение обобщает задачу управления.

3. Выяснение условий относительно многозначных отображений, характеризующих динамику системы и трубку живучести, при которых для любого начального состояния системы существует хотя бы одна живучая траектория. Техника, разработанная для обычных задач живучести, применяется к задачам функциональной живучести для дифференциальных включений с памятью. Указанное свойство системы моделируется на основе теории функционально-дифференциальных включений.

© *А.П. Яковлева*, 2008

СИСТЕМЫ С ПРЕДЫСТОРИЕЙ

При изучении систем с предысторией во многих случаях возникает оптимизационная задача, в которой одним из ограничений является дифференциальное включение с последствием. Это задачи планирования в экономике, эволюционные задачи в биологии, задачи теории управления, где правая часть — множество возможных скоростей системы, зависящее от прошлой истории, представленной некоторой функцией, и от управления из множества управлений.

Системы с предысторией достаточно детально изучены. Наблюдая явления некоторый период времени, важно определить, что произойдет с развивающейся системой в дальнейшем. Для этого нужно принимать во внимание тот факт, что скорость изменения в физических системах зависит не только от их состояния в настоящий момент, но и от их предыстории. Нужно также рационально воздействовать на те процессы и явления, которыми мы можем в определенных пределах управлять. Системы с предысторией описываются дифференциальными включениями с последствием или, при более общем подходе, функционально-дифференциальными включениями.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПОСЛЕДСТВИЕМ

Рассмотрим следующее дифференциальное включение с последствием:

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t), x(t-\tau)),\\ t \in [t_0, t_1],\ F: R \times R^n \times R^n \to 2^{R^n}, \quad \tau = \text{const}.\end{gathered} \tag{1}$$

Решением включения (1) с непрерывной начальной функцией $\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \to R^n$ является такая непрерывная функция $x : [t_0 - \tau, t_1] \to R^n$, что

1) x абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$ и почти всюду выполняется включение (1);

2) $x(t) = \varphi(t),\ t \in [t_0 - \tau, t_0]$.

Обозначим $R(F, C_\tau)$ множество решений включения (1) с начальной функцией φ, если $\varphi(t) \in C_\tau(t)$ при всех $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, где $C_\tau(t) : R \to 2^{R^n}$ — некоторое многозначное отображение.

А теперь рассмотрим оптимизационную задачу

$$\min\{f(x(t_1)) : x \in R(F, C_\tau)\}. \tag{2}$$

В дальнейшем принимаем, что функция $f : R^n \to R$ удовлетворяет условию Липшица, многозначные отображения F, C_τ измеримы по t и компактнозначны, F удовлетворяет условию Липшица с суммируемой функцией $l(t)$, C_τ полунепрерывно сверху зависит от t.

При исследовании оптимизационных задач с дифференциальными включениями стандартного вида обычно накладывались различные дополнительные предположения типа гладкости и выпуклости на входящие функции и множества (условия наличия локальных шатров или выпуклости графика, липшицевой производной от опорной функции правой части, непроверяемых избыточных условий) [1, 2]. В некоторых работах исследовались задачи оптимизации с дифференциальными включениями без предположений о гладкости и выпуклости [3–6]. Применялся прямой метод вариаций Л.С. Понтрягина для случая управляемых систем с дифференциальными включениями. Использование дифференцирования множества решений дифференциального включения по начальным данным позволяет перейти к более простому включению в вариациях [7–9]. Как важный элемент в исследованиях использовался метод дифференцирования многозначных отображений. Данные результаты были получены с применением указанного метода для случая включений с последействием [8–10].

При дифференцировании многозначных отображений применяется метод, согласно которому график многозначного отображения F приближается касательным конусом, который считается графиком другого многозначного отображения F', играющего роль производной. В зависимости от того, с помощью какого именно предела вводится касательный конус, используется та или иная терминология. Напомним некоторые определения касательных конусов и производных.

Пусть $Z = X \times Y, X, Y$ — нормированные пространства. Множества $A, B \subset X; \overline{A}$ — замыкание множества A; $\operatorname{int} A$ — внутренность множества $A; d(a, A) = \inf\{\|a-b\|;\, b \in A\}$ — расстояние от точки a до множества A; $S_z = \{z \in Z : \|z\| \le 1\}$ — единичный замкнутый шар в Z; $\rho(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами A, B.

$$\rho(A,B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a,B),\ \sup_{b \in B} d(b,A)\}.$$

Определение 1. Касательным конусом $T_T(A;a)$ к множеству A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество

$$T_T(A;a) = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\delta>0} \bigcap_{0<\pi<\delta} (\pi^{-1}(A-a) + \varepsilon S).$$

Определение 2. Асимптотическим касательным конусом $T_A(A;a)$ к множеству $A \subset Z$ в точке $a \in \overline{A}$ называется множество

$$T_A(A;a) = T_T(A;a) \overset{*}{-} T_T(A;a),$$

где $A \overset{*}{-} B = \{x : x + B \subset A\}$.

Определенные выше конусы замкнуты, а конус $T_A(A;a)$ — выпуклый. Справедливо включение $T_A(A;a) \subset T_T(A;a)$.

Определение 3. Производной многозначного отображения F в точке $z \in \overline{\operatorname{gr} F}$ по направлению $\overline{x}$ называется множество

$$DF(z)(\bar{x}) = \{\bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}) \in T_T(\operatorname{gr} F; z)\}. \qquad (3)$$

Определение 4. Производной функции $f : X \to R$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $\bar{x}$ называется число

$$Df(x_0)(\bar{x}) = \inf\{\alpha \in R : (\bar{x}, \alpha) \in T_T(\operatorname{epi} f; (x_0, f(x_0)))\}.$$

Определение 5. Субдифференциалом функции f в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ называется множество

$$\partial f(x_0) = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \le Df(x_0)(x) \forall x \in X\}. \qquad (4)$$

Теорема 1. Пусть при сделанных выше предположениях функция $\widetilde{x}$ является решением задачи (4). Тогда существуют такие абсолютно непрерывные функции ρ и ρ_1, что

1) $\rho(t_1) \in -\partial f(\widetilde{x}(t_1)),\ \rho_1(t_1) = 0$;

2) $(\dot{\rho}(t),\ \dot{\rho}_1(t),\ \rho(t)) \in T^*(\operatorname{gr} F(t), \widetilde{z}(t))$, п. в. $t \in [t_1 - \tau, t_1]$;

$(\dot{\rho}(t), \dot{\rho}_1(t), \rho(t) + \rho_1(t+\tau)) \in -T^*(\operatorname{gr} F(t), \widetilde{z}(t))$, п. в. $t \in [t_0, t_1 - \tau]$;

3) $\dot{\rho}(t) - T^*(C_\tau(t); \varphi(t)), \dot{\rho}_1(t) \in -T^*(C_\tau(t); \varphi(t)), \dot{\rho}(t) = \dot{\rho}_1(t+\tau)$,

п. в. $t \in [t_0 - \tau, t_0], \tilde{z}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-\tau), \dot{\tilde{x}}(t))$,

где T^* обозначается конус, сопряженный к конусу T; T — любой выпуклый замкнутый конус, удовлетворяющий включению

$$T(\operatorname{gr} F; \widetilde{z}(t)) \subset T_T(\operatorname{gr} F; \widetilde{z}(t)),\ t \in [t_0, t_1],$$

$$T(C_\tau; \varphi(t)) \subset T_T(C_\tau; \varphi(t)),\ t \in [t_0 - \tau, t_0];$$

$T(t)$ — измеримое многозначное отображение.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ И ЖИВУЧЕСТЬ

Свойством живучести обладают в той или иной степени все системы со сложной структурой. Именно живучесть позволяет системе сохраняться в экстремальных условиях, разрушающих ее структуру, целостность, ведущих к потере цели функционирования [11]. Сравнительный анализ известных работ показал отсутствие единого подхода к разрешению проблемы живучести сложных технических систем. Как правило, в каждой практической задаче применяется свой подход, базирующийся на общих принципах способности объекта к реконструкции в процессе функционирования. Разработанные математические аппараты исследований поведения так называемых живучих траекторий отражают некоторые аспекты понятия живучести технических систем. Такие траектории хорошо описываются в рамках теории дифференциальных игр и теории дифференциальных включений. В некоторых работах рассматриваются общие физические и математические свойства живучести как технических, так и информационных систем, изучаются свойства живучих траекторий [12–15].

Понятие живучести траекторий дифференциального включения определенным образом соответствует известному в технике понятию «живучесть», связанному с надежностью функционирования технических систем. Траектории динамических систем являются живучими, если удовлетворяют некоторым ограничениям, которые называются ограничениями живучести. Они возникают из сущности изучаемой системы. Такими ограничениями могут быть, например, соотношение баланса между наличием некоторых ресурсов и их использованием.

Рассмотрим динамическую систему, скорость изменения которой зависит от текущего состояния системы многозначным образом. Математически это выражается с помощью дифференциального включения вида

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), x(0) = x_0, t \in [0, \infty),$$

где a — многозначное отображение; $a: R \times X \to 2^x$, $X = C_{[0,\infty)}$.

Дифференциальное включение обобщает задачу управления, если положить $a(t,x) = f(t,x,U)$, где f — некоторая функция; U — множество значений управления u. Задается некоторое многозначное отображение $P: R \to 2^x$, называемое трубкой живучести, которое определяет ограничения живучести в том смысле, что живучими будут считаться траектории, попадающие в многозначное отображение $P: R \to 2^x$, $x(t) \in P(t)$, $t \geq 0$.

Ставится следующая задача: выяснить, при каких условиях относительно многозначных отображений a и P для любых $x_0 \in P(0)$ существует хотя бы одна траектория дифференциального включения, содержащаяся в P.

Дифференциальные уравнения и включения описывают однозначным или многозначным образом динамику системы, в которой в каждый момент времени скорость зависит от состояния системы только в этот момент времени. Дифференциальные включения с памятью, называемые также функционально-дифференциальными включениями, выражают зависимость скорости в каждый момент времени от истории развития системы до этого момента времени. Под функциональной живучестью подразумеваются ограничения живучести, также зависящие от истории развития системы, т.е. ограничения, накладываемые не только на состояние системы, но и на ее прошлое развитие.

Техника, разработанная для обычных задач живучести, применяется к задачам функциональной живучести с дифференциальными включениями с памятью, что позволяет описать свойство функциональной живучести как условие функционального касания, означающее, что для любого прошлого состояния системы существует, по крайней мере, «скоростное касание» ко множеству различных состояний, удовлетворяющих ограничениям функциональной живучести.

Функционально-дифференциальное включение описывает связь между скоростью системы и историей ее развития до времени $t > 0$ следующим образом:

$$\dot{x}(t) \in a(t, T(t)x), \text{ п. в. } t \in [0, \infty), \tag{5}$$

где оператор T ставит в соответствие любой непрерывной функции x ее историю $T(t)x$ до момента времени t таким образом:

$$\forall\,\tau \in (-\infty,0]:[T(t)x](\tau) = x(t+\tau)\,. \tag{6}$$

Начальные условия выражают тот факт, что история развития системы до момента времени *t=0* известна и определяется функцией $\varphi \in C$ как

$$T(0)x = \varphi\,. \tag{7}$$

Ограничения функциональной живучести записываются с помощью требования, чтобы в любой момент времени $t \in [0,\infty)$

$$T(t)x \in P(t)\,. \tag{8}$$

P обладает свойством живучести относительно отображения a, если для любой начальной функции $\varphi \in P(0)$ существует решение $x(\cdot)$ такое, что почти всюду при $t \ge 0$ выполняются следующие соотношения [11]:

$$\dot{x}(t) \in a(t, T(t)x)\,,$$

$$T(0)x = \varphi\,,$$

$$T(t)x \in P(t)\,, \quad \forall\, t \ge 0\,.$$

Для автономного случая задача живучести

$$\dot{x}(t) \in a(T(t)x)\,,\ \text{п. в. } t \in [0,\infty)\,, \tag{9}$$

$$T(0)x = \varphi\,, \tag{10}$$

$$T(t)x \in P\,, \tag{11}$$

где $P \subset C$ — замкнутое подмножество.

Считается [11], что подмножество $P \subset C$ обладает свойством живучести относительно отображения *a*, если для любой начальной функции $\varphi \in P$ существует решение $x(\cdot)$ включения (9), начинающееся на φ в смысле (10) и живучее в P в смысле (11).

Обычная задача живучести является частным случаем задачи функциональной живучести. Действительно, полагая $A(y) = a(y(0))$ и $\prod =$ $= \{y \in C : y(0) \in P\}$, где $a : X \to 2^x$, $P \subset C$, получаем, что вследствие (6) $\dot{x}(t) \in a(t, T(t)x) = a(t, T(t)x(0)) = a(x(t))$, а также $x(t) = (T(t)x(0)) \in P$ тогда и только тогда, когда $T(t)x \in \prod$.

Задача живучести с m переменными запаздывания также укладывается в схему функциональной живучести. Рассмотрим m функций запаздывания $\tau : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Дифференциальное включение с запаздывающим аргументом описывается многозначным отображением $a : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{m} \to 2^x$ таким образом:

$$\dot{x}(t) \in a(x(t-\tau_1(t)), \ldots, x(t-\tau_m(t)))\,.$$

Ограничения живучести с запаздываниями можно описать с помощью n функций запаздывания $\xi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ и многозначного отображения $R:\underbrace{X\times\ldots\times X}_{m}\to 2^{x}$, $\forall\, t\in[0,\infty)$.

$$\dot{x}(t)\in R(x(t-\xi_1(t)),\ldots,x(t-\xi_m(t))).$$

Эта задача укладывается в общую схему, если положить

$$A(y)=a(y(-\tau_1(t)),\ldots,y(-\tau_n(t))),$$

$$\prod=\{y\in C: y(0)\in R(y(-\xi_1(t)),\ldots,y(-\xi_m(t)))\}.$$

Действительно,

$$\dot{x}(t)\in A(T(t)x)=a(T(t)x(t-\tau_1(t)),\ldots,T(t)x(t-\tau_m(t)))=$$

$$=a(x(t-\tau_1(t)),\ldots,x(t-\tau_m(t)));$$

$$x(t)=(T(t)x)(0).$$

Следовательно,

$$x(t)\in R(x(t-\xi_1(t)),\ldots,x(t-\xi_m(t))),$$

$$T(t)x(0)\in R(x(t-\xi_1(t)),\ldots,x(t-\xi_m(t))),\ \ T(t)x\in\prod.$$

Аналогично можно убедиться, что задача живучести Вольтерра

$$\dot{x}(t)\in a\left(\int_{-\infty}^{t}k(t,s,x(s))ds\right),$$

$$x(t)\in P\left(\int_{-\infty}^{t}l(t,s,x(s))\,ds\right)$$

также укладывается в эту схему.

Ниже приведена теорема, которая называется теоремой функциональной живучести и в которой указаны условия, при каких отображения a и P определяют живучую траекторию.

Приведем понятие области функциональной живучести. Пусть задана некоторая функция y на подмножестве $P\subset C$. Обозначим $K_p(y)$ подмножество элементов $v\in X$ таких, что $\forall\,\varepsilon>0$ существует число $h\in[0,\varepsilon]$ и функция $y_h\in C$, удовлетворяющая условиям

$$T(0)\,y_n=\varphi,$$

$$T(h)y_n\in P, \tag{12}$$

$$\frac{y_h(h)-y_h(0)}{h}\in v+\varepsilon B,$$

где $\varepsilon>0$; B — шар единичного радиуса с центром в нуле. Множество $P\subset \operatorname{dom} a$ является областью функциональной живучести для многозначного отображения a, если $\forall y\in P$.

$$a(y) \cap K_p(y) \neq 0 . \tag{13}$$

Пусть многозначное отображение a не пусто, полунепрерывное сверху, компактнозначно, выпуклозначно, а также линейно растет, т.е. $\|a(x)\| \leq C(\|x\|+1)$, $C = \text{const}$, $\|a(x)\| = \sup \|y\|$, а P замкнуто. Тогда имеет место

Теорема 2. P обладает свойством живучести тогда и только тогда, когда оно является областью функциональной живучести, т.е. когда выполняется соотношение (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
2. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1985.— **169**. — С. 194–252.
3. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 280 с.
4. *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360 с.
5. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений // Докл. АН СССР. — 1986. — **288**. — № 2. — С. 296–301.
6. *Обэн Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 512 с.
7. *Яковлева А.П.* Задача оптимального управління для диференціального включення з післядією // Докл. АН УССР. — 1989. — № 11. — С. 70–72.
8. *Jakovleva A.P.* Necessary extremum conditions for differential inclusions with aftereffect // Optimization. — 1992. — **25**. — P. 117–127.
9. *Яковлева А.П.* Оптимизационная задача и необходимые условия экстремума для дифференциальных включений с последствием // Дифференциальные уравнения. — 1992. — № 2. — С. 223–231.
10. *Додонов А.Г., Кузнецова М.Г., Горбачик Е.С.* Живучесть и надежность сложных систем: Метод. пособие. — Киев: Междунар. науч.-учебн. центр, 2001. — 163 с.
11. *Aubin J.-P.* Viability Theory. — Boston–Bazel–Berlin: Birkhäuser, 1991. — 543 p.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
13. *Додонов А.Г., Кузнецова М.Г., Горбачик Е.С.* Введение в теорию живучести вычислительных систем. — Киев: Наук. думка, 1990. — 184 с.
14. *Haddad G.* Monotone viable trajectories for functional differential inclusions // Journal of Differential Equations. — 1981. — № 42. — P. 1–24.
15. *Остапенко В.В., Яковлева А.П., Шубенкова Т.А.* Моделювання властивостей живучості // В зб.: Теорія обчислень. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 1999. — С. 276–280.

Поступила 07.12.2007