

УДК 62-50

**СИНТЕЗ И АДАПТИВНАЯ НАСТРОЙКА МОДЕЛЕЙ GARCH  
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДИСПЕРСИЙ  
ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ  
С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ**

**В.Д. РОМАНЕНКО, А.В. БИЛЫЙ**

Рассмотрены теоретические положения проектирования моделей GARCH для прогнозирования условных дисперсий гетероскедастических процессов при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат — с большими. Динамика процессов в стохастической среде описана моделями авторегрессии и скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией. Разработан алгоритм адаптивной настройки коэффициентов относительно скользящего среднего модели GARCH. Приведены результаты экспериментальных исследований такой настройки и прогнозирования условной дисперсии при оптимальных коэффициентах.

**ВВЕДЕНИЕ**

В работах [1, 2] рассмотрены нелинейные стохастические условно-гауссовские модели для описания динамики изменения дисперсий гетероскедастических процессов в дискретном времени с однотемповой дискретизацией входных возмущений и выходных координат. Эти модели дают возможность прогнозировать условную дисперсию выходной координаты на один базовый период квантования  $T_0$ .

В работе [3] описаны теоретические положения проектирования разнотемповых дискретных систем прогнозирования изменяющихся максимальных условных дисперсий выходных координат одномерных и многомерных процессов на основе модели ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат — с большими.

Методика прогнозирования условных дисперсий для математических моделей авторегрессии и скользящего среднего (ARMA) с разнотемповой дискретизацией на основе ARCH заключается в следующем.

Пусть динамика процесса представлена моделью ARMA (2,2m) [3]

$$y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + a_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] + c_1 \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + c_2 \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - 2T_0 \right] + \dots \\
 & \quad + \dots + c_{2m} \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a_0, \tag{1}
 \end{aligned}$$

где  $h = mT_0$ , а  $\left[ \frac{k}{m} \right]$  — целое число от деления номера дискретного отсчета  $k$  на  $m$ . Последовательность возмущений в виде дискретного белого шума имеет такие вероятностные характеристики при  $i = 0, 1, \dots, 2m$ :

$$M \left\{ \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - iT_0 \right] \right\} = 0; \quad M \left\{ \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] y \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] \right\} = 0$$

( $M$  — оператор математического ожидания).

Тогда алгоритм прогнозирования условной дисперсии последовательности  $\left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$  выполняется на основе рекуррентной процедуры.

1. Определение условного математического ожидания для последовательности  $\left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$

$$\begin{aligned}
 M_{\left[ \frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\} & = a_1 y \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + a_2 y \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \\
 & + c_m \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + c_{m+1} \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - (m+1)T_0 \right] + \dots \\
 & \quad \dots + c_{2m} \xi \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a_0. \tag{2}
 \end{aligned}$$

2. Вычисление условной дисперсии для последовательности  $\left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$

$$\begin{aligned}
 M_{\left[ \frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\} & = \text{var} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \middle| y \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \right. \\
 & \quad y \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \left. \right\} = M_{\left[ \frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] - \right. \\
 & \quad \left. - M_{\left[ \frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \right\}^2 = \tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]. \tag{3}
 \end{aligned}$$

3. Вычисление ряда условных дисперсий на основе выражений (2), (3)

$$\begin{aligned} \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right] h &= \text{var} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right] h \mid y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right] h, y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right] h \right\}, \\ \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right] h &= \text{var} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right] h \mid y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right] h, y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 4 \right] h \right\}, \\ \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right] h &= \text{var} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right] h \mid y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 4 \right] h, y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 5 \right] h \right\}, \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right] h &= \text{var} \left\{ y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right] h \mid y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right] h, \right. \\ &\quad \left. y \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - 2 \right] h \right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

4. Построение математической модели динамики условных дисперсий на основе данных их вычисленного ряда путем применения метода наименьших квадратов (МНК) в виде модели авторегрессии

$$\begin{aligned} \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\beta}_1 \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right] h + \hat{\beta}_2 \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right] h + \dots \\ &\quad \dots + \hat{\beta}_\mu \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right] h + \hat{\gamma} + w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right], \end{aligned} \tag{5}$$

где  $w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  — процесс дискретного белого шума с нулевым средним.

Уравнение (5) представляет авторегрессионную условно гетероскедастическую модель ARCH, на основе которой выполняется прогнозирование условной дисперсии (3) на один большой период квантования  $h = mT_0$ .

$$\begin{aligned} \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] + 1 \right] h &= \hat{\beta}_1 \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\beta}_2 \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right] h + \dots \\ &\quad \dots + \hat{\beta}_\mu \xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu + 1 \right] h + \hat{\gamma}. \end{aligned} \tag{6}$$

Модель ARCH (5) обеспечивает ограниченную точность прогнозирования (6) вследствие того, что не учитывается динамика изменения четвертого момента  $w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$ .

Цель данной статьи — на основе модели ARCH (5) разработать обобщенную авторегрессионную условно гетероскедастическую модель GARCH

(Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) с большим периодом квантования  $h = mT_0$  для описания динамики изменяющейся условной дисперсии и исследовать вопросы достижения максимальной точности прогнозирования условной дисперсии на основе разработанной модели GARCH.

**РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ GARCH ПРИ ПЕРИОДЕ КВАНТОВАНИЯ  $H = mT_0$**

Введем новые переменные.

$$\tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = \sqrt{H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]} v \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right], \quad (7)$$

где  $v \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  — нормальная последовательность с нулевым средним и единичной дисперсией

$$M \left\{ v \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\} = 0; \quad M \left\{ v^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\} = 1.$$

На основе (7) для условной дисперсии можно записать

$$\tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] v^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right], \quad (8)$$

Если

$$H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = \gamma + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right], \quad (9)$$

то, согласно выражению (7),

$$\begin{aligned} & M_{\left[ \frac{k}{m} \right] - 1} \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \middle| \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right], \dots \right\} = \\ & = \gamma + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right]. \end{aligned}$$

Если подставить (8), (9) в выражение (5), получим

$$\tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] v^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] + w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]. \quad (10)$$

Таким образом,  $H \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  представляет собой линейную проекцию максимального значения квадрата ошибки  $\xi^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  и является прогнозом для условной дисперсии  $\tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$ .

Учитывая представление (8), инновация  $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$  в уравнении авторегрессии (5) может быть выражена как

$$w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \left\{ v^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - 1 \right\}. \quad (11)$$

В то время как безусловная дисперсия  $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$  является постоянной, условная дисперсия согласно (11) со временем изменяется.

Запишем формулу (9) так:

$$H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \gamma + (\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) \xi^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right], \quad (12)$$

где  $z^{-1}$  — оператор обратного сдвига на период квантования  $h = mT_0$ . Представим полином  $(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu})$  в виде отношения

$$(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) = \frac{(r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_{\mu+n} z^{-(\mu+n)})}{(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n})}. \quad (13)$$

При этом корни уравнения  $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$  должны находиться в середине круга единичного радиуса. Применяя выражение (13), можно представить равенство (12) в виде конечно-разностного уравнения

$$\begin{aligned} H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \lambda + \sigma_1 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \sigma_2 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \dots \\ &\dots + \sigma_n H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + r_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + r_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \dots \\ &\dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\lambda = (1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \dots - \sigma_n)\gamma$ .

Прибавим к обеим частям равенства (14)  $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$  и выполним преобразование полученного выражения

$$\begin{aligned} H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \lambda - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - \\ &- \sigma_2 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] - \dots - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \dots + (\sigma_n + r_n) \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n + 1 \right) h \right] + r_{n+1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + \dots \\ & \dots + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - n + 1 \right) h \right] - \\ & - \sigma_1 w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] - \dots - \sigma_n w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n + 1 \right) h \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

**АДАПТИВНАЯ НАСТРОЙКА КОЭФФИЦИЕНТОВ  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  МОДЕЛИ GARCH**

Экспериментально установлено, что коэффициенты  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  модели GARCH (15) сильно влияют на точность прогнозирования (16) даже при условии, что корни уравнения  $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$  будут по модулю меньше единицы. Поэтому для достижения максимальной точности прогнозирования согласно (16) необходимо производить адаптивную настройку  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  из условия минимизации критерия оптимальности

$$J_N = \sum_{\left[ \frac{k}{m} \right]=1}^N \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] - \hat{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^2, \quad (17)$$

где  $\tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  — вычисленное значение условной дисперсии на основе (3),

а  $\hat{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right]$  — условная дисперсия, которая определяется по модели

GARCH (15). Эта модель при учете соотношения (13) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] &= \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \\ & - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_3 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 4 \right) h \right] - \dots \\ & \dots - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots \\ & \left. \dots - \beta_\mu \tilde{\xi}_{\max}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \left\} \sigma_1 + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \right. \\
 & - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 4 \right) h \right] - \dots \\
 & \dots - \beta_{n-2} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots \\
 & \dots - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \left\} \sigma_2 + \dots + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \right. \\
 & - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots - \beta_{\mu-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - n + 1 \right) h \right] - \\
 & - \beta_{\mu} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - n \right) h \right] - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] \left\} \sigma_n + \\
 & + \left\{ \lambda + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots \right. \\
 & \left. \dots + \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + \dots + \beta_{\mu} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\} + w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right].
 \end{aligned}$$

Запишем это выражение в векторной форме

$$\hat{\tilde{\xi}}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \bar{\theta} + w \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right], \quad (18)$$

где вектор вычисляемых координат определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] = & \left\{ \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \dots \right. \right. \\
 & \dots - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots \\
 & \dots - \beta_{\mu} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \left\}, \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \right. \\
 & - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \dots - \beta_{n-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots \\
 & \left. \dots - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\}, \dots, \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \dots \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots - \beta_{\mu-1} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - n + 1 \right) h \right] - \beta_{\mu} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu - n \right) h \right] - \\ & - w \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] \}, \left\{ \lambda + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots \right. \\ & \left. \dots + \beta_n \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + \dots + \beta_{\mu} \tilde{\xi}^2 \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\}, \end{aligned}$$

а вектор неизвестных коэффициентов

$$\hat{\theta} = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3, \dots, \hat{\sigma}_n, 1]^T.$$

Тогда критерий оптимальности (17) примет вид

$$J_N = \sum_{\left[ \frac{k}{m} \right]=1}^N \left\{ \tilde{\xi}_{\max}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\theta} \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (19)$$

Для оценивания вектора неизвестных коэффициентов  $\hat{\theta}$ , при которых минимизируется критерий (19), применяется рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) согласно [4]. Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\theta} \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + K \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \times \\ &\times \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\theta} \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} K \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \bar{X} \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \times \right. \\ &\times \left. P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \bar{X} \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \times \\ &\times \bar{X} \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \times \right. \\ &\times \left. \bar{X} \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1} \bar{X}^T \left[ \left[ \frac{k}{m} \right] h \right] P \left[ \left( \left[ \frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Начальное значение коэффициентов вектора  $\hat{\theta}(0)$  формируется на основе  $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$ , где  $|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Пример.** Исходная модель ARMA с разнотемповой дискретизацией координат при  $h = 11T_0$  имеет вид

$$y\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] = a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] + \xi(kT_0) + c_1 \xi[(k-1)T_0] + \\ + c_2 \xi[(k-2)T_0] + c_3 \xi[(k-3)T_0] + c_4 \xi[(k-4)T_0] + \\ + c_5 \xi[(k-5)T_0] + c_6 \xi[(k-6)T_0] + c_7 \xi[(k-7)T_0] + \\ + c_8 \xi[(k-8)T_0] + c_9 \xi[(k-9)T_0] + c_{10} \xi[(k-10)T_0] + a_0,$$

где коэффициенты  $a_1 = 0,80253$ ;  $c_1 = 0,9802$ ;  $c_2 = 0,9608$ ;  $c_3 = 0,94176$ ;  $c_4 = 0,92312$ ;  $c_5 = 0,90484$ ;  $c_6 = 0,88692$ ;  $c_7 = 0,86936$ ;  $c_8 = 0,85215$ ;  $c_9 = 0,83528$ ;  $c_{10} = 0,81874$ ;  $a_0 = 0,19746$ .

Условная дисперсия (3) для приведенной модели вычисляется по формуле

$$\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] = \left\{ y\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] - a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] - \right. \\ - c_1 \xi[(k-1)T_0] - c_2 \xi[(k-2)T_0] - c_3 \xi[(k-3)T_0] - c_4 \xi[(k-4)T_0] - \\ - c_5 \xi[(k-5)T_0] - c_6 \xi[(k-6)T_0] - c_7 \xi[(k-7)T_0] - \\ \left. - c_8 \xi[(k-8)T_0] - c_9 \xi[(k-9)T_0] - c_{10} \xi[(k-10)T_0] - a_0 \right\}^2. \quad (23)$$

На основе ряда условных дисперсий (4), (5) по МНК на каждом периоде квантования  $h$  строится модель ARCH (6)

$$\hat{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \beta_1 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-2\right)h\right] + \\ + \beta_3 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-3\right)h\right] + \beta_4 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-4\right)h\right] + \hat{\gamma} + w\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right],$$

на основе которой по методике (7)–(14) формируется модель GARCH (15) при  $\mu = 4$  и  $n = 3$

$$\hat{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] = \lambda + (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] + (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-2\right)h\right] + \\ + (\sigma_3 + r_3) \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-3\right)h\right] + r_4 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-4\right)h\right] + \\ + r_5 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-5\right)h\right] + r_6 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-6\right)h\right] + \\ + r_7 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-7\right)h\right] + w\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] -$$

$$-\sigma_2 w \left[ \left( \left[ \frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] - \sigma_3 w \left[ \left( \left[ \frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right]. \quad (24)$$

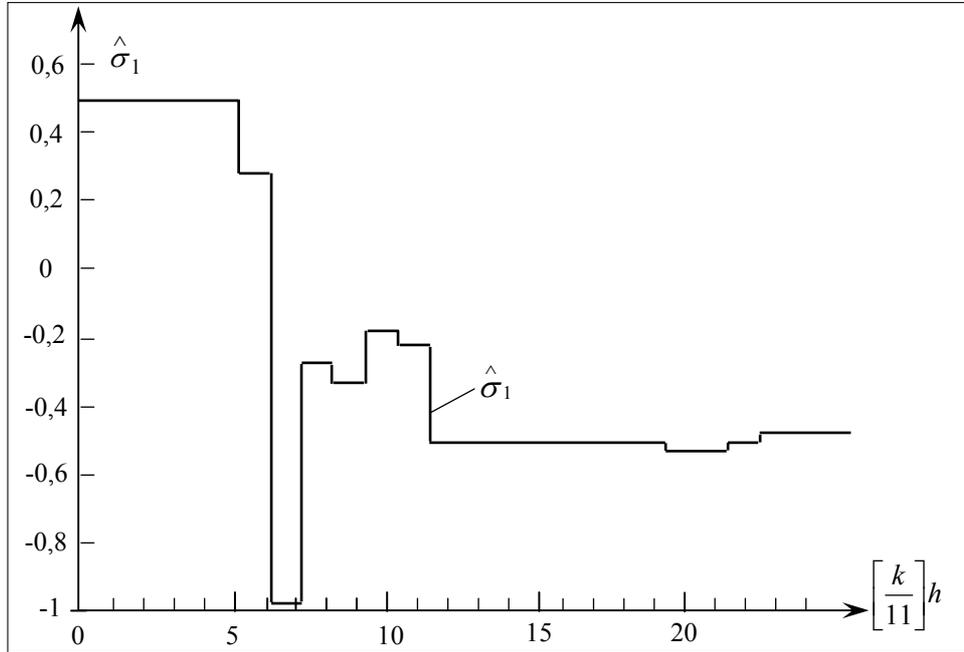


Рис. 1. График адаптивной настройки коэффициента  $\hat{\sigma}_1$  по РМНК

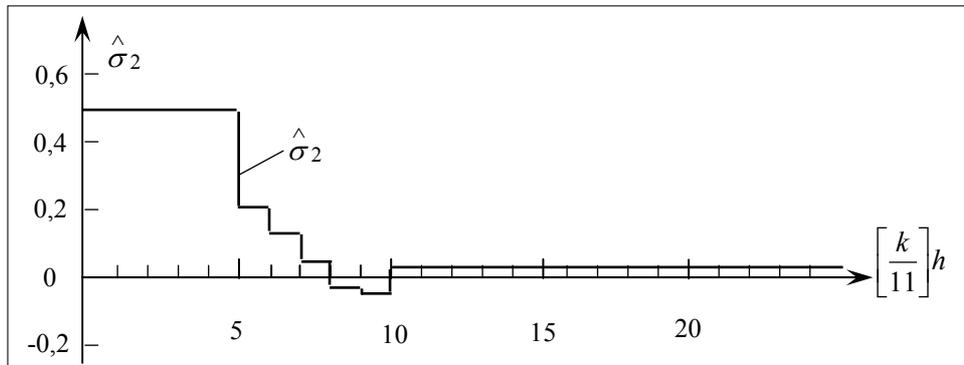


Рис. 2. График адаптивной настройки коэффициента  $\hat{\sigma}_2$  по РМНК

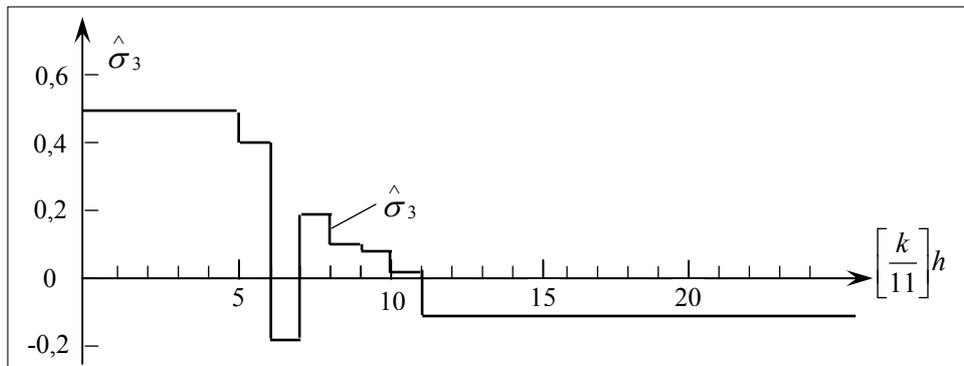


Рис.3. График адаптивной настройки коэффициента  $\hat{\sigma}_3$  по РМНК

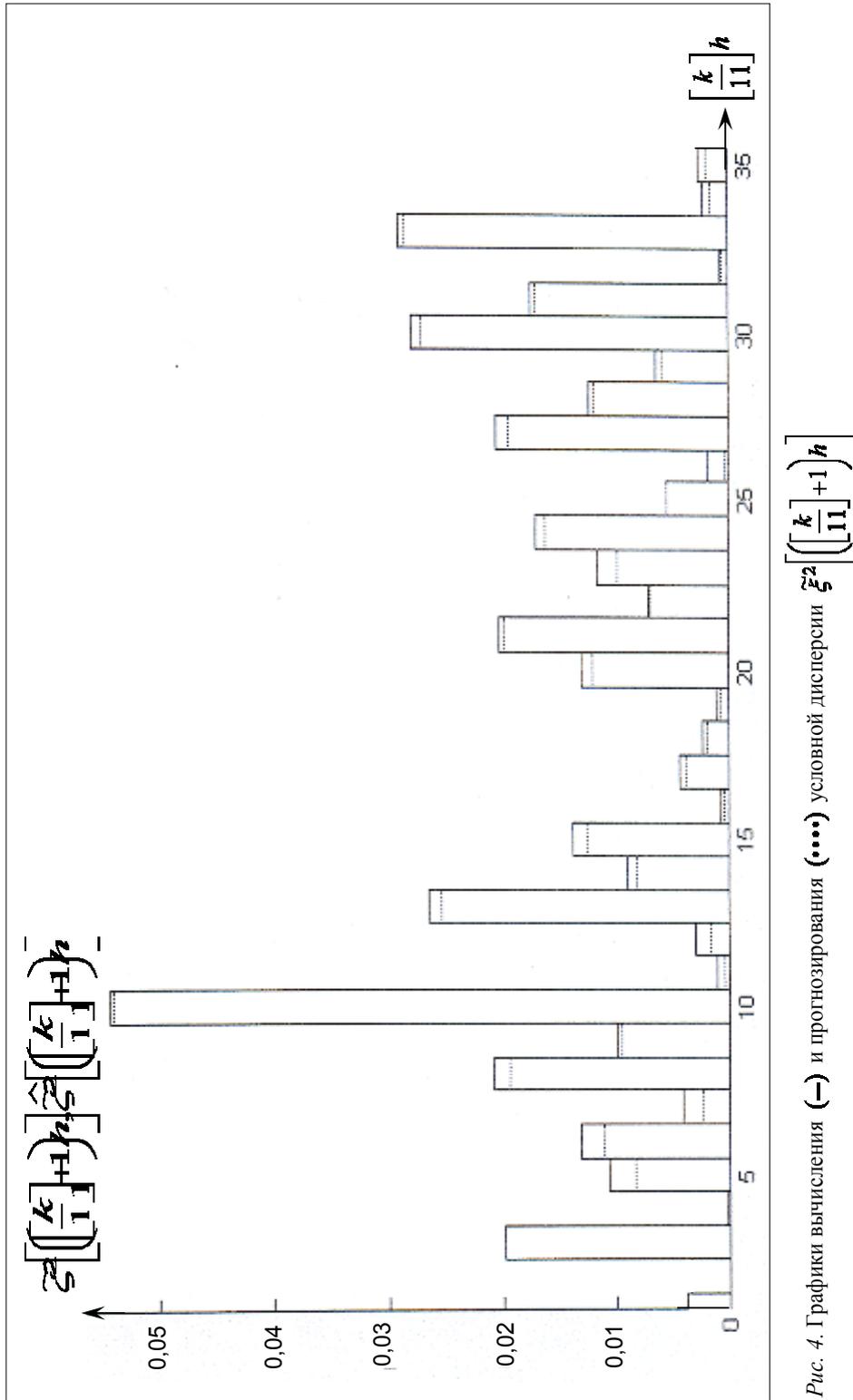


Рис. 4. Графики вычисления  $\left( \left[ \begin{matrix} k \\ 11 \end{matrix} \right] h \right)$  и прогнозирования  $\left( \left[ \begin{matrix} k \\ 11 \end{matrix} \right] h \right)$  условной дисперсии  $\xi^2 \left( \left[ \begin{matrix} k \\ 11 \end{matrix} \right] h \right)$

На основе РМНК (19)–(22) выполняется оценка оптимальных значений коэффициентов  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ . Процесс адаптивной настройки этих коэффициентов приведен на рис. 1, 2, 3. Прогнозирование условной дисперсии выполняется на основе модели GARCH (24). На рис. 4 приведены результаты цифрового моделирования для вычисления условной дисперсии (23) и ее прогнозирования на основе GARCH (24) при оптимальных значениях коэффициентов  $\hat{\sigma}_{1\text{опт}} = -0,4766$ ;  $\hat{\sigma}_{2\text{опт}} = 0,0213$ ;  $\hat{\sigma}_{3\text{опт}} = -0,1190$  для отсчета квантования  $\left[ \left( \left[ \frac{k}{11} \right] + 1 \right) h \right]$ . Результаты экспериментов, приведенные на графике, подтверждают высокую точность прогнозирования условной дисперсии на один период квантования  $h = 11T_0$ .

## ВЫВОДЫ

1. Разработана методика перехода от модели ARCH к модели GARCH для процессов ARMA с разнотемповой дискретизацией.
2. Экспериментально установлено, что коэффициенты модели GARCH  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  относительно скользящего среднего существенно влияют на точность прогнозирования условной дисперсии гетероскедастических процессов.
3. Разработан алгоритм адаптивной настройки коэффициентов модели GARCH относительно скользящего среднего на основе РМНК для достижения оптимальной точности прогнозирования условной дисперсии.
4. Проведено экспериментальное исследование алгоритма адаптивной настройки коэффициентов модели GARCH и прогнозирования условной дисперсии с использованием модели GARCH при оптимально настроенных коэффициентах, которое подтвердило высокую точность прогнозирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Hamilton J.D.* Time series analysis. — N.-Y.: Prinseton University Press. — 1994. — 799 p.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. — М.: Фазис, 1998. — 512 с.
3. *Романенко В.Д.* Прогнозирование и минимизация дисперсий гетероскедастических процессов на основе моделей с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2007. — № 2. — С. 115–130.
4. *Романенко В.Д.* Методи автоматизації прогресивних технологій: Підручник. — Київ: Вища шк., 1995. — 519 с.

Поступила 05.12.2007