УДК 517.9 : 519.87
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.05

ПРОГНОЗНІ ОЦІНКИ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ЗА НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ , П.М. ЗІНЬКО, Ю.М. ШЕВЧУК

Анотація. Розглянуто моделі поширення довільної кількості видів інформації, які подано у вигляді систем нелінійних диференціальних рівнянь зі стаціонарними параметрами. Проаналізовано різні способи подання спостережень. Наведено алгоритми отримання усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки та гарантованої прогнозної оцінки. Наведено приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної оцінки для випадку поширення одного виду інформації та алгоритм знаходження гарантованих прогнозних оцінок для окремого випадку подання множини можливих похибок спостережень. Подано результати числового експерименту для задачі пошуку гарантованих прогнозних оцінок для систем з двома джерелами інформації.

Ключові слова: моделі поширення інформації, прогнозні оцінки, невизначеність, середньоквадратичні оцінки.

ВСТУП

Розглядається деяка соціальна група чисельністю L, на яку спрямовується інформаційна дія (атака, вплив) по N каналах, причому кількість суб’єктів, що сприйняли інформацію k -го типу залежить як від зовнішньої дії, так і від спілкування суб’єктів між собою. Позначимо через $x_k(t)$ кількість суб’єктів, що сприйняли інформацію k -го типу в момент часу t; через $\beta_k(t)$ — інтенсивність спілкування; $u_k(t)$ — зовнішні дії. Тоді зміну в часі величини $x_k(t)$ можна описати системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = \beta_k(t) x_k(t)\left(L - \sum_{j=1}^{N} x_j(t)\right) + u_k(t),\ x_k(0) = L_{0k},\ k = \overline{1, N}. \qquad (1)$$

У працях [1–4] виконано аналіз рівнянь (1) за постійних параметрів і спеціального вибору функцій $u_k(t)$. Властивості розв’язків системи (1) за спеціального вибору $u_k(t)$ проаналізовано у праці [5]. Постановки задач про гарантоване оцінювання параметрів за результатами спостережень та методи їх розв’язання розглядалися у працях [6, 7].

ПОБУДОВА ПРОГНОЗНИХ ОЦІНОК

Нехай в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m$, $t_i \in (0, \overline{T})$, $i = \overline{1, m}$, спостерігаються за невідомих параметрів $\theta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ величини $x_k(t_j)$ і $y_{kj} = \dot{x}_k(t_j) + v_{kj}$, де функції $x_k(t)$ є розв'язками системи рівнянь:

$$\dot{x}_k(t) = (\alpha_k + \beta_k x_k(t))\left(L - \sum_{j=1}^{N} x_j(t) \right), \; x_k(0) = L_{0k}, \; k = \overline{1, N} \tag{2}$$

(тут $v_k = (v_{k1}, ..., v_{km})^{\mathrm{T}}$ — вектор похибок спостережень).

Відомо також, що невідомі похибки спостережень та невідомі параметри θ_k належать відповідно заданим множинам $V_k \subset R^m$ і $\Theta_k, k = \overline{1, N}$.

Означення 1. Прогнозними оцінками величин $x_k(t_{m+1}), k = \overline{1, N}$, де $t_{m+1} > t_m$, назвемо

$$\hat{x}_k(t_{m+1}) = g_k(y, x)$$

(тут $y = (y_1, ..., y_N)$, $x = (x_1, ..., x_N)$, $y_k = (y_{k1}, ..., y_{km})$, $x_k = (x_k(t_1), \ldots, x_k(t_m))$, а $g_k, k = \overline{1, m}$ — деякі функції векторних аргументів).

Проблема, яка досліджується в роботі, полягає в знаходженні оптимальних у деякому сенсі прогнозних оцінок.

Позначимо через $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, m}$, множини

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k)) \in V_k\} \cap \Theta_k, \; k = \overline{1, N},$$

де

$$f_k(\theta_k) = (f_{k1}(\theta_k), ..., f_{km}(\theta_k)); f_{kj}(\theta_k) = \alpha_k \varphi_j + \beta_k \psi_{kj};$$

$$\varphi_j = L - \sum_{s=1}^{N} x_s(t_j); \; \psi_{kj} = x_k(t_j)\varphi_j, \; k = \overline{1, N}, \; j = \overline{1, m}.$$

Твердження 1. Нехай множини V_k, $k = \overline{1, N}$, — обмежені, а вектори $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ і $\psi(k) = (\psi_{k1}, ..., \psi_{km})$ є лінійно незалежними за кожного k. Тоді множини $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$, обмежені в R^2.

Доведення. Оскільки множини $V_k, k = \overline{1, N}$, — обмежені, то за деякого q^2 справедливе включення $V_k \subseteq S_q(k), k = \overline{1, N}$, де

$$S_q(k) = \{v_k : (v_k, v_k) \le q^2\}, \; k = \overline{1, m},$$

а отже, $G_k(x, y)$, $k = \overline{1, N}$, будуть включатись в множини $G_k^+(x, y)$, $k = \overline{1, N}$, де

$$G_k^+(x, y) = \{\theta_k : (y_k - f_k(\theta_k), y_k - f_k(\theta_k)) \le q^2\} \cap \Theta_k =$$

$$= G_k^{(1)}(x, y) \cap \Theta_k, k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Оскільки $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, N}$ точки мінімуму функцій $\Phi_k(\theta_k)$, $k = \overline{1, N}$, то $\Phi'_k(\hat{\theta}_k) = 0$.

Розкладемо функції $\Phi_k(\theta_k), k=\overline{1,N}$ в ряд Тейлора у відповідних точках $\hat{\theta}_k$ і дістанемо

$$\Phi_k(\theta_k) \cong \Phi_k(\hat{\theta}_k) + \frac{1}{2}(\Phi''_k(\hat{\theta}_k)(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), \ k=\overline{1,N},$$

де $\Phi''_k(\hat{\theta}_k)$ — матриці других похідних, які дорівнюють $2P_k$, $k=\overline{1,N}$. Звідси отримаємо, що множини $G_k^{(1)}(x,y)$, $k=\overline{1,N}$, мають вигляд

$$G_k^{(1)}(x,y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \le q^2 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

де $\Phi_k(\hat{\theta}_k) = (y_k - f_k(\hat{\theta}_k), y_k - f_k(\hat{\theta}_k))$; P_k — матриці вигляду

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{11}(k) & P_{12}(k) \\ P_{21}(k) & P_{22}(k) \end{pmatrix};$$

$$P_{11}(k) = (\varphi, \varphi), P_{22}(k) = (\psi(k), \psi(k)), P_{12}(k) = P_{21}(k) = (\varphi, \psi(k)),$$

$$\hat{\theta}_k \in \operatorname{Arg}\min \Phi_k(\theta_k).$$

Оскільки множини $G_k^{(1)}(x,y)$, $k=\overline{1,N}$, обмежені, то обмеженими є і множини $G_k^{+}(x,y)$, $k=\overline{1,N}$, а отже, і множини $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$.

Позначимо:

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N), \theta_1 \in G_1(x,y), \ldots, \theta_N \in G_N(x,y).$$

Уведемо множину прогнозних оцінок вектора

$$x(t_{m+1}, \theta) = (x_1(t_{m+1}, \theta), \ldots, x_N(t_{m+1}, \theta)),$$

яка визначається так:

$$X = \{x(t_{m+1}, \theta)\}.$$

Уведемо також на вимірних підмножинах множин $G_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$, імовірнісні міри $\mu_k(\cdot)$, $k=\overline{1,N}$, такі, що $\mu_k(G_k(x,y)) = 1$.

Якщо $\hat{x}(\theta) = \hat{x}(t_{m+1}, \theta)$ — деяка прогнозна оцінка, то визначимо середньоквадратичну похибку такої оцінки у вигляді:

$$\sigma(\hat{x}) = \left\{ \int_{G(x,y)} \left| \hat{x}(\theta) - x(\theta) \right|^2 \mu(d\theta) \right\}^{1/2},$$

де $G(x,y) = \prod_{k=1}^{N} G_k(x,y)$; $\mu(d\theta) = \prod_{k=1}^{N} \mu_k(d\theta)$.

Означення 2. Величину $\tilde{x}$, що визначається з умови

$$\tilde{x} \in \operatorname*{Arg\,min}_{\hat{x} \in X} \sigma(\hat{x}),$$

назвемо *усередненою оптимальною середньоквадратичною прогнозною оцінкою* (УОСКП-оцінка) величини $x(t_{m+1}, \theta)$, а величину $\sigma(\tilde{x})$ — *середньоквадратичною похибкою такої оцінки*.

Твердження 2. УОСКП-оцінка має вигляд

$$\widetilde{x} = \int\limits_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta)\mu(d\theta)\,, \qquad (4)$$

де рівність виконується майже скрізь за мірою $\mu(\cdot)$; при цьому

$$\sigma(\widetilde{x}) = \int\limits_{G(x,y)} |x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) - |\widetilde{x}|^2 .$$

Доведення. Оскільки

$$\sigma^2(\hat{x}) = \int\limits_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \widetilde{x}|^2 \mu(d\theta) + \int\limits_{G(x,y)} |\widetilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) \geq$$

$$\geq \int\limits_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \widetilde{x}|^2 \mu(d\theta)\,,$$

то

$$\min_{\hat{x}\in X} \sigma^2(\hat{x}) = \int\limits_{G(x,y)} |\widetilde{x} - x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) = \int\limits_{G(x,y)} |x(t_{m+1}, \theta)|^2 \mu(d\theta) - |\widetilde{x}|^2 ,$$

і мінімум досягається на такому векторі $\hat{x}(\theta)$, для якого виконується рівність

$$\int\limits_{G(x,y)} |\hat{x}(\theta) - \widetilde{x}|^2 \mu(d\theta) = 0\,,$$

тому майже скрізь за мірою μ виконується рівність $\widetilde{x} = \int\limits_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \theta)\mu(d\theta)$, що і потрібно було довести.

Нехай далі вектори v_k , $k = \overline{1, N},$ належать відповідним множинам V_k , $k = \overline{1, N},$ вигляду

$$V_k = \{v_k : (Q_k v_k, v_k) \leq 1\}\,,$$

а вектор θ належить простору R^2 ; Q_k , $k = \overline{1, N},$ — додатно визначені матриці.

Твердження 3. Нехай вектори $\varphi, \psi(k),\ k = \overline{1, N}$ — лінійно незалежні. Тоді множини $G_k(x, y),\ k = \overline{1, N},$ матимуть вигляд

$$G_k(x, y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \leq \gamma^2\},\ k = \overline{1, N}\,,$$

де P_k , $k = \overline{1, N}$ — матриці з елементами $P_{ij}(k),\ i, j = 1{,}2,\ k = \overline{1, N}$:

$$P_{11}(k) = (Q_k\varphi, \varphi),\ P_{22}(k) = (Q_k\psi(k), \psi(k)),\ P_{12}(k) = P_{21}(k) = (Q_k\varphi, \psi(k))\,,$$

а вектори $\hat{\theta}_k = (\hat{\alpha}_k, \hat{\beta}_k),\ k = \overline{1, N},$ є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} P_{11}(k)\alpha_k + P_{12}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \varphi); \\ P_{21}(k)\alpha_k + P_{22}(k)\beta_k = (Q_k y_k, \psi(k)) \end{cases} \qquad (5)$$

і параметри γ_k , $k = \overline{1, N}$, такі:

$$\gamma_k = 1 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\,;$$

$$\Phi_k(\theta_k) = (Q_k(y_k - \alpha_k\varphi - \beta_k\psi(k)),\ y_k - \alpha_k\varphi - \beta_k\psi(k)),\ k = \overline{1, N}\,.$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що

$$\min_{\theta} \Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k),$$

де $\hat{\theta}_k$, $k = \overline{1,N}$, визначають із системи рівнянь (5).

Із формули Тейлора будемо мати рівності

$$\Phi_k(\theta_k) = \Phi_k(\hat{\theta}_k) + (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k), \ k = \overline{1,N},$$

з яких отримуємо

$$G_k(x,y) = \{\theta_k : (P_k(\theta_k - \hat{\theta}_k), \theta_k - \hat{\theta}_k) \le 1 - \Phi_k(\hat{\theta}_k)\},$$

що і треба було довести.

Наслідок. Візьмемо міри $\mu_k(\cdot)$, $k = \overline{1,N}$, у вигляді $\mu_k(d\theta) = d\theta / S(G_k(x,y))$, де $S(G_k(x,y))$ — площа еліпса $G_k(x,y)$. Тоді справедлива рівність:

$$\tilde{x} = \pi^{-N} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)}{\gamma_k} \right)^{1/2} \int_{\overline{G}(x.y)} x(t_{m+1}, \theta + \hat{\theta}) d\theta,$$

де $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_N)$,

$$\overline{G}(x,y) = \prod_{k=1}^{N} \overline{G}_k(x,y), \overline{G}_k(x,y) = \{\theta_k : (P_k\theta_k, \theta_k) \le \gamma_k\};$$

$\lambda_1(k)$ і $\lambda_2(k)$ — власні значення матриць P_k, $k = \overline{1,N}$.

Розглянемо далі гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1,N}$. Припускаємо, що вектори θ_k, $k = \overline{1,N}$, належать заданим множинам $\Theta_k \subset R^m$, $k = \overline{1,N}$.

Означення 3. *Гарантованою прогнозною оцінкою* величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1,N}$, назвемо вектори z_k, $k = \overline{1,N}$, які визначаються з умов:

$$\min_{\gamma_i, i=\overline{1,N}} \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} \left| x_k(t_{m+1}, \gamma_1, ..., \gamma_N) - x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) \right| =$$

$$= \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} \left| z_k - x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) \right| = \sigma_{1k}, \ k = \overline{1,N},$$

(тут $\gamma_1 \in G_1(x,y), ..., \gamma_N \in \mathrm{G}_N(x,y)$, $\theta_1 \in G_1(x,y), ..., \theta_N \in \mathrm{G}_N(x,y)$), а σ_{1k}, $k = \overline{1,N}$, назвемо *гарантованими похибками оцінок* z_k, $k = \overline{1,N}$.

Твердження 4. Нехай множини $G_k(x,y)$, $k = \overline{1,N}$, — обмежені та замкнені. Гарантовані прогнозні оцінки z_k, $k = \overline{1,N}$, мають вигляд:

$$z_k = \frac{1}{2} \left(\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) + \min_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) \right),$$

$$\theta_1 \in G_1(x,y), ..., \theta_N \in \mathrm{G}_N(x,y),$$

при цьому

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{2} \left(\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) - \min_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) \right);$$

$$\theta_1 \in G_1(x, y), ..., \theta_N \in \mathrm{G}_N(x, y).$$

Доведення. Зауважимо, що величини $x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N)$, $k = \overline{1, N}$, належать до відповідних відрізків $[x_k^-, x_k^+]$, $k = \overline{1, N}$, де

$$x_k^- = \min_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N), x_k^+ = \max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N);$$

$$\theta_1 \in G_1(x, y), ..., \theta_N \in \mathrm{G}_N(x, y).$$

Тоді справджується:

$$\max_{\theta_i, i=\overline{1,N}} \left| x_k(t_{m+1}, \gamma_1, ..., \gamma_N) - x_k(t_{m+1}, \theta_1, ..., \theta_N) \right| =$$

$$= \left| x_k(t_{m+1}, \gamma_1, ..., \gamma_N) - \frac{1}{2}(x_k^- + x_k^+) \right| + \sigma_{1k} \geq \sigma_{1k}, \theta_i \in G_i(x, y), \; k = \overline{1, N},$$

а отже, нижня границя досягається на значеннях, які дорівнюють векторам $z_k, k = \overline{1, N}$, що і потрібно було довести.

Розглянемо тепер випадок, коли в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m$, $t_i \in (0, \overline{T})$, $i = \overline{1, m}$, спостерігають вектори:

$$y_k = H_k(t_k, \theta) + v_k, \; k = \overline{1, m},$$

де H_k, $k = \overline{1, m}$, — матриці розмірності $n \times N$, $x(t_k) = (x_1(t_k), ..., x_N(t_k))^{\mathrm{T}}$, $k = \overline{1, m}$; v_k, $k = \overline{1, m}$, — похибки спостережень; $x(t_k, \theta)$, $k = \overline{1, m}$, — розв'язок системи рівнянь (2) за деяких значень параметра $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$.

Будемо припускати, що вектор $v = (v_1, ..., v_m)$ і параметр θ належать відповідно V і Θ.

Уведемо множину

$$\Theta_y = \{\theta : (y_1 - H_1 x(t_1, \theta), ..., y_m - H_m x(t_m, \theta)) \in V\} \cap \Theta.$$

Припустімо, що множина Θ_y — обмежена. Через $\mathrm{co}\Theta_y$ позначимо найменшу замкнену опуклу множину, що містить множину Θ_y. На множині Θ_y розглянемо гарантовані прогнозні оцінки величин $x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$, які знаходимо з умов:

$$\min_{\hat{\theta} \in co\Theta_y} \max_{\theta \in co\Theta_y} \left| x_x(t_{m+1}, \hat{\theta}) - x_k(t_{m+1}, \theta) \right| =$$

$$= \max_{\theta \in \mathrm{co}\Theta_y} \left| \hat{x}_k - x_k(t_{m+1}, \theta) \right| = \sigma_{2k}, \; k = \overline{1, N}.$$

Аналогічно тому, як це зроблено у твердженні 4, можна показати, що

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ + \hat{x}_k^-), \sigma_{2k} = \frac{1}{2}(\hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-), \; k = \overline{1, N},$$

де $\hat{x}_k^+ = \max_{\theta \in co\Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$, $\hat{x}_k^- = \min_{\theta \in co\Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$.

Для прикладу розглянемо випадок, коли множина V має вигляд

$$V = \left(v : \sum_{k=1}^{m} (Q_k v_k, v_k) \le 1 \right),$$

де Q_k — додатно визначена матриця, $\Theta = R^{2N}$.

Згідно з формулою (3) множина Θ_y задається у вигляді

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{k=1}^{m} (Q_k (y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \le 1 \right\},$$

і задачі знаходження гарантованих оцінок та похибок прогнозу зведуться до проблеми знаходження значень $\min\limits_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$ і $\max\limits_{\theta \in \Theta_y} x_k(t_{m+1}, \theta)$, $k = \overline{1, N}$, на множині

$$\Theta_y = \left\{ \theta : \sum_{k=1}^{m} (Q_k (y_k - H_k x(t_k, \theta)), y_k - H_k x(t_k, \theta)) \le 1 \right\}.$$

ПРИКЛАД ЗНАХОДЖЕННЯ УОСКП-ОЦІНКИ

Розглянемо приклад інформаційного потоку (коли немає зовнішніх впливів, тобто $\alpha = 0$, а параметр інтенсивності міжособистісного спілкування β невідомий) за спостережень:

$$y_j = \dot{x}(t_j) + v_j, \;\; j = \overline{1, m}, \;\; \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \le \delta_m^2 .$$

Потрібно знайти прогнозну оцінку кількості осіб, що сприйняли дану інформацію. Математична модель у такому випадку буде мати вигляд

$$\dot{x}(t) = \beta x(t)(L - x(t)), \;\; x(0) = L_0 .$$

Уважатимемо, що обмежень на параметр β немає (тобто $\beta \in R$). Використаємо усереднений метод знаходження прогнозних оцінок.

Тоді згідно з формулою (3) отримаємо

$$G(x, y) = \left\{ \beta : \sum_{j=1}^{m} (y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \le \delta_m^2 \right\}.$$

Нерівність

$$\sum_{j=1}^{m} (y_j - \beta x(t_j)(L - x(t_j)))^2 \le \delta_m^2$$

можна подати у вигляді

$$\beta^2 \sum_{j=1}^{m} [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 - \beta \sum_{j=1}^{m} 2 y_j x(t_j)(L - x(t_j)) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2 - \delta_m^2 \le 0 .$$

Звідси маємо:

$$(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2) \le 0 , \tag{6}$$

де $\beta_{1,2} = \dfrac{\sum_{j=1}^{m} y_j x(t_j)(L - x(t_j)) \pm \sqrt{D}}{2\sum_{j=1}^{m} [x(t_j)(L - x(t_j))]^2}$;

$$D = \left[2\sum_{j=1}^{m} y_j x(t_j)(L - x(t_j)) \right]^2 + 4\left(\delta_m^2 - \sum_{l=1}^{m} y_l^2 \right) \sum_{j=1}^{m} [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 =$$

$$= 4\delta_m^2 \sum_{j=1}^{m} [x(t_j)(L - x(t_j))]^2 +$$

$$+ 4\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1, l \neq j}^{m} y_j x(t_l)(L - x(t_l))[y_l x(t_j)(L - x(t_j)) - y_j x(t_l)(L - x(t_l))].$$

Тоді розв'язок нерівності (6) буде таким:

$$G(x, y) = [\beta_1, \beta_2].$$

Для того, щоб знайти УОСКП-оцінку (μ — усереднену оптимальну прогнозну оцінку, де $\mu(\cdot)$ — нормована міра Лебега), розв'яжемо рівняння Рікатті:

$$\dot{x}(t) = \beta L x(t) - \beta x^2(t).$$

Виконавши заміну

$$z(t) = \frac{1}{x(t)}, \ \dot{z}(t) = -\frac{1}{x^2(t)} \dot{x}(t),$$

отримаємо диференціальне рівняння та відповідну йому початкову умову:

$$\dot{z}(t) = \beta - \beta L z(t), z(0) = 1 / L_0.$$

Користуючись формулою Коші, отримаємо:

$$z(t) = z(0) \exp\left(-\int_0^t \beta L ds \right) + \int_0^t \left[\exp\left(-\int_0^t \beta L ds \right) \beta \right] d\tau = \frac{L_0 + (L - L_0) e^{-\beta L t}}{L L_0}.$$

Звідси

$$x(t) = \frac{L L_0}{L_0 + (L - L_0) e^{-\beta L t}}.$$

Тоді із формули (4) справджується

$$\widetilde{x} = \int_{G(x,y)} x(t_{m+1}, \beta) \mu(d\beta) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} x(t_{m+1}, \beta) d\beta =$$

$$= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{L L_0 d\beta}{L_0 + (L - L_0) e^{-\beta L_{m+1}}}.$$

Виконавши заміну

$$p = e^{-\beta L t_{m+1}}, dp = -L t_{m+1} e^{-\beta L t_{m+1}} d\beta,$$

знайдемо прогноз $\widetilde{x}$:

$$\widetilde{x} = \frac{-L_0}{(\beta_2 - \beta_1) t_{m+1}} \int_{e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}^{e^{-\beta_2 L t_{m+1}}} \frac{dp}{p(L_0 + (L - L_0)p)} =$$

$$= L - \frac{1}{(\beta_2 - \beta_1) t_{m+1}} \ln \left| \frac{L_0 + (L - L_0) e^{-\beta_1 L t_{m+1}}}{L_0 + (L - L_0) e^{-\beta_2 L t_{m+1}}} \right|.$$

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки кількості прихильників певних інформаційних повідомлень.

Нехай є певна спільнота чисельністю $L = 100$ осіб, що підлягає впливу повідомлень з двох джерел інформації. Тоді в момент часу $t \in (0, \overline{T}]$ ту частину спільноти, на яку впливає перше джерело, позначимо через $x_1(t)$; ту частину спільноти, на яку впливає друге джерело, — через $x_2(t)$; частину спільноти, яка ще не визначилась зі своїм ставленням до трансльованої інформації (не сприйняла повідомлення жодного виду), визначимо як $(L - x_1(t) - x_2(t))$. Припускається, що інформація поширюється по двох інформаційних каналах:

1. *Міжособове спілкування членів спільноти.* Кожен, хто засвоїв інформаційне повідомлення, починає впливати на неохоплених членів. Суттєвим тут є те, як часто він ділиться своєю інформацією і наскільки вона є правдоподібною. Виразимо цей вплив через параметри β_1 і β_2.

2. *Зовнішній інформаційний вплив на спільноту.* Його характеристиками є частота транслювання повідомлення, наскільки воно правдоподібне та резонансне. Подамо цей вплив через параметри α_1 та α_2.

Тоді процес поширення інформації в соціумі можна виразити системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}_i(t) = (\alpha_i - \beta_i x_i(t))(L - x_1(t) - x_2(t)),\ x_i(0) = L_{0i},\ i = 1,2\ .$$

Зведемо цю систему до безрозмірного вигляду, використовуючи заміну $\overline{x}_i(t) = x_i(t)/L$, $i = 1,2$. Отримаємо:

$$\overline{x}'(t) = (\alpha_i - L\beta_i \overline{x}_i(t))(1 - \overline{x}_1(t) - \overline{x}_2(t)),\ \overline{x}_i(0) = L_{0i}/L,\ i = 1,2\ .$$

Нехай $\alpha_1 = 0{,}4$, $\alpha_2 = 0{,}7$, $\beta_1 = 0{,}002$ та $\beta_2 = 0{,}004$ і на момент часу $t = 0$ в спільноті $L_{01} = 20$, $L_{02} = 10$ прихильників відповідних інформаційних дій. Процес поширення інформації за такими даними можна змоделювати за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\bar{x}_1' = (0.4 - 100 * 0{,}002\bar{x}_1(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \bar{x}_2(t),\ \bar{x}_1(0) = 0{,}2:$$
$$\bar{x}_2' = (0{,}7 - 100 \cdot 0{,}004\bar{x}_2(t))(1 - \bar{x}_1(t)) - \bar{x}_2(t),\ \bar{x}_2(0) = 0{,}1. \quad (7)$$

Припускаємо, що в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m$, $t_i \in (0,10]$, $i = \overline{1{,}50}$, проводяться спостереження за $\bar{x}_i(t)$, $i = 1,2$, з похибками

$$\sum_{k=1}^{50} (v_k, v_k) < 0{,}85.$$

Тоді отримаємо динаміку системи, показану на рис. 1.

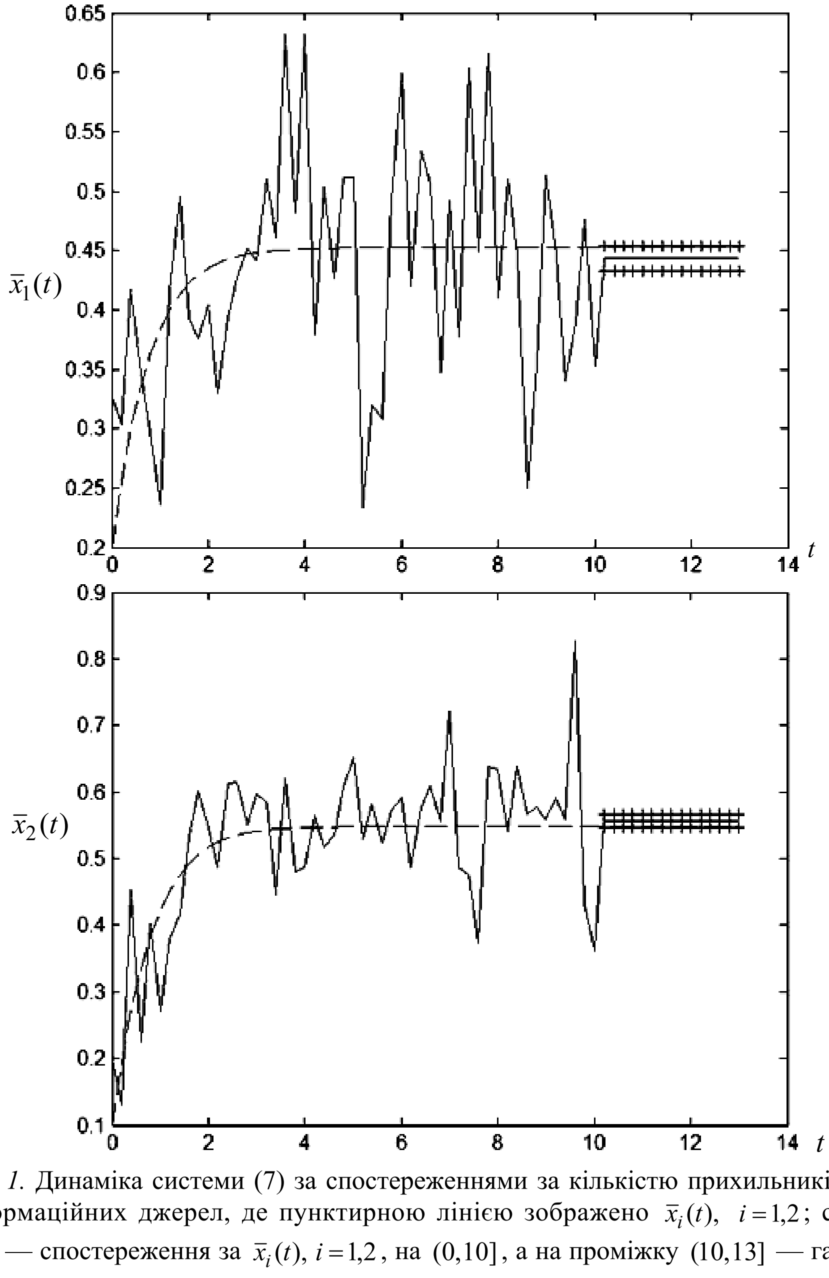

Рис. 1. Динаміка системи (7) за спостереженнями за кількістю прихильників обох інформаційних джерел, де пунктирною лінією зображено $\bar{x}_i(t)$, $i = 1{,}2$; суцільною — спостереження за $\bar{x}_i(t)$, $i = 1{,}2$, на $(0,10]$, а на проміжку $(10,13]$ — гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогнозної оцінки

Тепер припускаємо, що в точках $t_1 < t_2 < ... < t_m$, $t_i \in (0,10]$, $i = \overline{1,50}$, проводяться спостереження тільки за кількістю прихильників лише одного джерела інформації $\bar{x}_1(t)$ з похибками

$$\sum_{k=1}^{50} (v_k, v_k) < 0,57 \, .$$

Тоді отримаємо такі прогнозні оцінки, як показано на рис. 2.

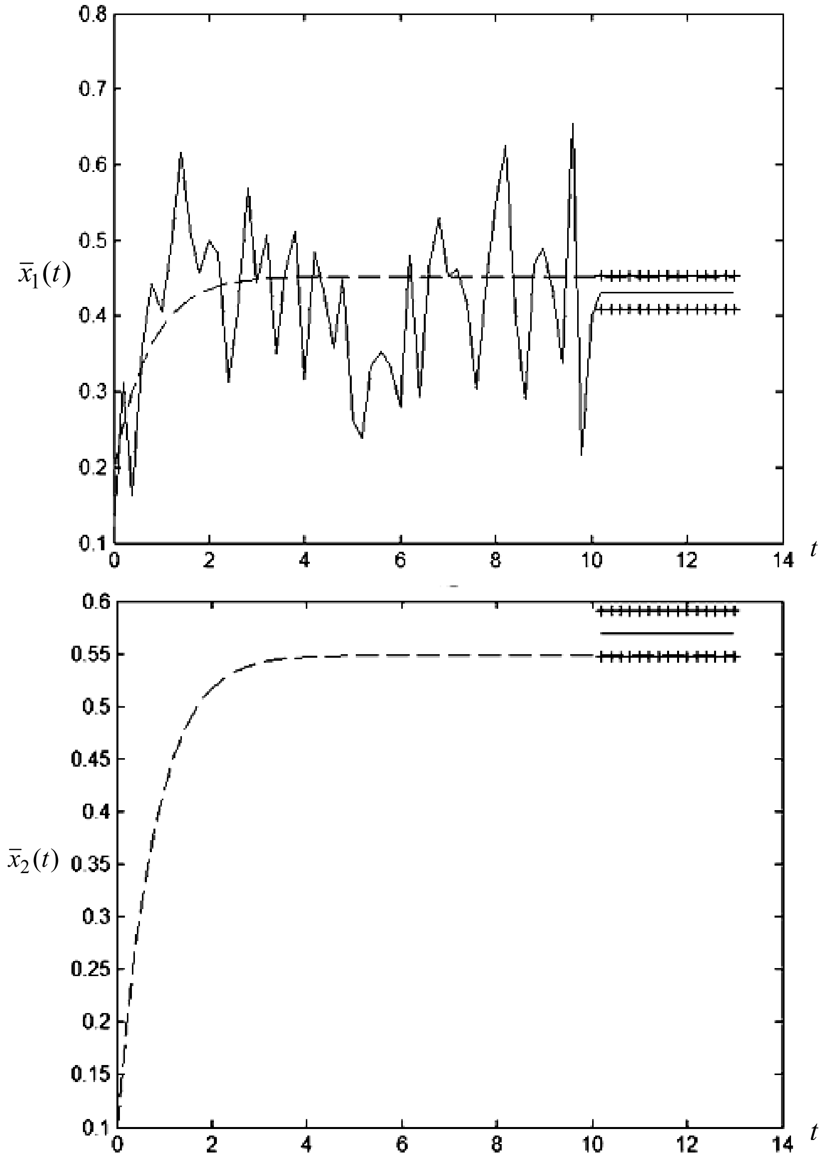

Рис. 2. Динаміка системи (7) за спостереженнями за кількістю прихильників першого інформаційного джерела, де пунктирною лінією зображено $\bar{x}_i(t)$, $i = 1,2$, суцільною — спостереження за $\bar{x}_1(t)$ на $(0,10]$, а на проміжку $(10,13]$ — гарантована прогнозна оцінка разом з діапазоном похибки гарантованої прогнозної оцінки

ВИСНОВКИ

Для моделей поширення інформації зі спеціальним вибором функції зовнішньої дії та стаціонарними параметрами наведено алгоритми знаходження прогнозних оцінок: усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки та гарантованої прогнозної оцінки. Подано приклад знаходження усередненої оптимальної середньоквадратичної прогнозної оцінки для випадку поширення одного виду інформації. Результати числового експерименту дозволяють зробити висновок про практичну значущість запропонованого підходу. Отже, можна стверджувати про корисність використання підходу до окремих випадків загальної моделі інформаційного протистояння, які враховують забування та двоетапне засвоєння інформації.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Mikhailov A.P.* Models of Information Warfare / A.P. Mikhailov, N.A. Marevtseva // Mathematical Models and Computer Simulations. — Vol. 4, N 3. — 2012. — P. 251–259.
2. *Mikhailov A.P.* Mathematical Modeling of Information Warfare in a Society / A.P. Mikhailov, A.P. Petrov, O.G. Proncheva, N.A. Marevtseva // Mediterranean Journal of Social Sciences. — Vol. 6, N 5. — 2015. — P. 27–35.
3. *Михайлов А.П.* Развитие модели распространения информации в социуме / А.П. Михайло, А.П. Петров, Н.А. Маревцева, И.В. Третьякова // Математическое моделирование. — 2014. — № 3 (26). — С. 65–74.
4. *Задачі* протиборства в системах з динамікою Гомперца / О.Г. Наконечний, П.М. Зінько // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2015. — № 3 (120). — С. 50–60.
5. *Наконечний О.Г.* Математична модель розповсюдження інформації з нестаціонарними параметрами / О.Г. Наконечний, Ю.М. Шевчук // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». — 2016. — № 3. — С. 98–105.
6. *Nakonechnyi O.G.* Best-mean estimates in models of information confrontation / O.G. Nakonechnyi // Abstracts XXIV International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. — Cesky Rudolec, Czech Republic, 2014. — P. 114–115.
7. *Nakonechnyi O.G.* Estimates of unsteady parameters in model of information confrontation / O.G. Nakonechnyi, P.M. Zinko // Abstracts XXVIII International Conference “Problem of decision making under uncertainties”. — Brno, Czech Republic, 2016. — P. 82–83.

Надійшла 05.10.2017