УДК 517.98+515.165
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.11

КОНСТРУКЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ МІР НА ПОВЕРХНЯХ, УКЛАДЕНИХ У РІМАНОВІ БАГАТОВИДИ З РІВНОМІРНОЮ СТРУКТУРОЮ

К.В. МОРАВЕЦЬКА

Анотація. Розглянуто скінченновимірний ріманів многовид з рівномірною структурою і відповідна ріманова міра об'єму. Для вкладеної поверхні можна побудувати індуковану риманову міру об'єму, що задається тензором, індукованим вкладенням. Запропоновано альтернативний підхід до побудови асоційованої поверхневої міри. Конструкція передбачає задання на багатовиді диференціальної форми, асоційованої з поверхнею, і строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. Під дією потоку векторних полів за близьких до нуля значеннь t множина на поверхні переходить в окіл багатовиду, і при граничному переході можна отримати значення поверхневої міри. Показано, що побудова поверхневої міри за допомогою вказаного альтернативного підходу дає якраз індуковану ріманову міру об'єму.

Ключові слова: ріманів багатовид, міра об'єму, векторне поле, поверхнева міра.

ВСТУП

Побудова поверхневих мір на поверхнях, укладених у нескінченновимірний простір, є однією з ключових проблем нескінченновимірного аналізу. Розв'язуючи подібні задачі, важливо забезпечити узгодженість з класичними результатами скінченновимірного аналізу.

Існують різні підходи до побудови поверхневих мір. Зокрема, у працях [1, 2] розвинуто апарат поверхневого інтегрування у просторах Фреше. У праці [3] для побудови поверхневих мір на множинах рівня соболевських функцій в локально опуклих просторах використано соболевські ємності.

У працях [4, 5] запроваджено інший підхід до побудови асоційованої міри на гладкій межі області в нескінченновимірному просторі. Адекватність цього підходу підтверджено дослідженням крайових задач в областях гільбертового простору [6, 7]. Узагальнення на випадок поверхонь довільної скінченної корозмірності на банаховому багатовиді з рівномірною структурою запропоновано у працях [8, 9].

У праці [10] указаний підхід використано для скінченновимірного евклідового простору і показано його узгодженість з класичними формулами площі поверхні.

Роботу присвячено дослідженню адекватності запропонованого підходу до побудови поверхневої міри, асоційованої з мірою об'єму на рімановому багатовиді з рівномірною структурою.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано ріманів багатовид M з рівномірною структурою і вкладену в його компактну підмножину $\overline{U}$ замкнену поверхню S. Тоді S також являє собою ріманів багатовид і відповідний ріманів тензор $\widetilde{T}$ може бути індукований тензором T на M:

$$\widetilde{T} = i^* T,$$

де $i : S \to M$ — вкладення S у M. При цьому на S коректно визначено ріманову міру об'єму $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{V}(G) = \int_{\varphi(G)} \sqrt{\det(\widetilde{T}_\varphi(\vec{x}))} dx^1 \dots dx^{m-k},$$

де φ — така карта на S, для якої множина G повністю належить області визначення (для множин, які повністю не лежать в області визначення однієї карти, значення міри задається адитивністю).

З іншого боку, за допомогою метричного тензора T можна задати міру об'єму V на багатовиді $\overline{U}$ і, використовуючи підхід, описаний у працях [8, 9], побудувати на S поверхневу міру $\hat{V}$, асоційовану з V.

Мета роботи — показати еквівалентність поверхневої міри, асоційованої з мірою об'єму на багатовиді, та міри об'єму, що задається індукованим тензором на поверхні.

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У працях [8, 9] описано конструкцію поверхневих мір на банахових багатовидах з рівномірною структурою. Зокрема, цей підхід може бути використаний і для ріманових багатовидів. Коротко наведемо основні означення та схему побудови поверхневих мір.

Нехай M є дійсним скінченновимірним багатовидом класу C^2 з модельним простором $\mathbb{R}^m$ і атласом $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Вважаємо, що M зв'язний і наділений обмеженою структурою, тобто для деякого атласу $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M існує така додатна стала K, що для кожного відображення склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ умови $\| F'_{\beta\alpha}(x) \| \le C$, $\| F''_{\beta\alpha}(x) \| \le C$ виконані для всіх $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Окрім того, вважаємо, що обмежена структура на M є рівномірною, тобто існує така стала $r > 0$, що для кожного $x \in M$ існує така карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \Omega$, що $x \in U_\alpha$ і $\varphi_\alpha(U_\alpha) \supset B_r(\varphi_\alpha(x))$ (тут і далі через $B_r(z)$ позначатимемо відкриту кулю в модельному просторі $\mathbb{R}^m$ радіуса r з центром у точці z).

Нехай M і N — два багатовиди з обмеженими атласами Ω_1 і Ω_2 відповідно. Будемо вважати, що відображення $f : M \to N$ належить до класу $C_b^2(M)$ (або є обмеженим морфізмом класу C^2), якщо для нього існує таке число $C > 0$, що для кожної пари карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ і $(V, \psi) \in \Omega_2$ функція

$f_{\phi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ є двічі неперервно диференційовною і $\| f'_{\varphi\psi}(p) \| \le C$ і $\| f''_{\varphi\psi}(p) \| \le C$ для кожного $p \in \varphi(U)$. Якщо при цьому відображення f є ізоморфізмом і f^{-1} також належить до класу C_b^2, тоді f називають обмеженим ізоморфізмом класу C_b^2. Неперервно диференційовне тензорне поле T називатимемо обмеженим (або полем класу C_b^1), якщо для нього існує така стала $L > 0$, що для кожної карти $(\phi, U) \in \Omega$ і кожного $x \in U$: $\| T_\varphi(x) \| \le L$, $\| T'_\varphi(x) \| \le L$, де T_φ — локальне зображення тензора в карті.

Означення 1. Замкнену підмножину $S \subset M$ будемо називати вкладеною в M поверхнею корозмірності k ($k < m$), якщо існує багатовид N з обмеженою структурою, моделлю якого є R^{m-k}, відкритий окіл нуля $D \subset \mathrm{R}^k$, відкрита підмножина U в M і обмежений C_b^2-ізоморфізм $g : N \times D \to U$, для якого $g(N \times \{\vec{0}\}) = S$.

Позначатимемо через π проекцію $\pi : N \times D \to N$ на першу координату, $P : N \times D \to D$ — на другу. Тоді для кожної точки вкладеної поверхні $x \in S$ можна розглянути карту

$$(\widetilde{\psi}, \widetilde{W}) = (\psi \circ \pi \circ g^{-1},\ g(W \times \{\vec{0}\})),$$

де (ψ, W) — карта на N в точці $(\pi \circ g^{-1})(x)$ і таким чином S також наділена обмеженою структурою. Відповідна карта

$$(\hat{\psi}, \hat{W}) = ((\psi \times id) \circ g^{-1}, g(W \times D)), \tag{1}$$

на M узгоджується із заданою обмеженою структурою.

Зауваження. Для атласу $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}$ на N можна побудувати підатлас $\{(\psi_\alpha, G_\alpha)\}$ таким чином, щоб кожна множина G_α лежала в W_α разом з деяким околом і $\psi_\alpha(G_\alpha) = B_{\varepsilon_\alpha}$. Тому можемо вважати, що кожна функція ψ визначена в деякому околі множини W, а образами W є кулі в R^k.

Означення 2. Нехай S — вкладена в M поверхня корозмірності k, $g : N \times D \to U$ — відповідний ізоморфізм. Тоді диференціальну k-форму ω класу $C_b^1(U)$ називатимемо асоційованою формою поверхні S, якщо виконано дві умови:

1) для кожного $x \in S$: $\{Y \in T_x M \mid\ i_Y \omega(x) = 0\} = T_x S$;

2) існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in S$ виконано нерівність $\| \omega(x) \| > \delta$.

Означення 3. Набір векторних полів $\vec{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$, що попарно комутують на U, називається строго трансверсальним до вкладеної поверхні S (корозмірності k) з асоційованою формою ω, якщо існує таке $\delta > 0$, що для кожного $x \in S$ виконано нерівність $| \omega(\vec{X})(x) | > \delta$. Як показано у праці [8], таке означення є коректним, тобто не залежить від вибору асоційованої форми поверхні.

Через Φ_t^X позначатимемо потік векторного поля X для набору векторних полів $\vec{X}$, що попарно комутують: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}} = \Phi_{t_1}^{X_1} \ldots \Phi_{t_k}^{X_k}$, $\Phi_W^{\vec{X}}(x) = \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}(x) | \; \vec{t} \in W\}$.

Через λ_k будемо позначати міру Лебега на $\mathbb{R}^k$.

Нехай на багатовиді M з рівномірною структурою задано вкладену поверхню S корозмірності k, асоційовану з нею диференціальну форму ω та строго трансверсальний до S набір векторних полів $\vec{X}$, що попарно комутують. Нехай на M також задано міру μ. У випадку, якщо для кожної множини $A \in \mathrm{B}(S)$ існує границя

$$\sigma_{\vec{X}}(A) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A))}{\lambda_k(B_r)}, \tag{2}$$

функція множин $\sigma_{\vec{X}}$ є мірою на S і називається поверхневою мірою першого типу, породженою сім'єю векторних полів $\vec{X}$.

У випадку, коли на U задано два строго трансверсальних до S набори векторних полів $\vec{X}$ та $\vec{Y}$, що попарно комутують, для яких $|\omega(\vec{X})|\,|_S = |\omega(\vec{Y})|\,|_S$, і при цьому обидві міри $\sigma_{\vec{X}}$ і $\sigma_{\vec{Y}}$ є коректно визначеними та скінченними на S, вказані поверхневі міри збігаються (теорема 3 та зауваження 3 [8]). Таким чином, забезпечується коректність такого означення.

Означення 4. Поверхневою мірою другого типу на S, індукованою мірою μ і асоційованою формою ω, називається міра $\mu_\omega = \frac{1}{|\omega(\vec{X})|\,|_S} \sigma_{\vec{X}}$, де $\vec{X}$ — строго трансверсальний до S набір векторних полів, що попарно комутують, для якого границя (2) існує для кожного $A \in \mathrm{B}(S)$.

Будемо вважати, що багатовид M є рімановим, тобто на M задано тензорне поле T типу (2,0) класу C^2 таке, що для кожної точки $p \in M$ білінійний функціонал $T(p)$ і T_pM є симетричним і додатно визначеним. Таким чином, на T_pM визначено скалярний добуток: $\langle u, v \rangle_T = T(p)(u,v)$ і відповідна норма:

$$\| u \|_T = T(p)(u,u).$$

Побудова міри об'єму на поверхні, вкладеній у ріманів багатовид

Нехай M — ріманів C^2-багатовид з рівномірною структурою, $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — рівномірний атлас на M, T — відповідний ріманів тензор, $K = \overline{U}$ — компактна підмножина в M. Тоді на K визначено міру об'єму V:

$$V(G) = \sum_i \int_{\varphi_{\alpha_i}(G_i)} \sqrt{\det(T_{\varphi_{\alpha_i}}(\vec{x}))} dx^1 \ldots dx^m, \tag{3}$$

де $G = \bigcup_i G_i$ — таке розбиття множини $G \in \mathcal{B}(K)$ на скінченну кількість підмножин G_i, що попарно не перетинаються, за якого кожна $G_i \subset U_{\alpha_i}$ для деякого α_i. Легко бачити, що значення $V(G)$ скінченне ($V(G)$ рівномірно обмежена) і не залежить від способу розбиття, а тому формула (3) коректно задає скінченну міру.

Нехай замкнена поверхня S задана відповідно до означення 1, тобто $S = g(N \times \{\vec{0}\})$, де $g : N \times D \to U \subset M$ — C_b^2-ізоморфізм; N — багатовид з обмеженою структурою, моделлю якого є R^{m-k}; D — відкритий окіл нуля в R^k.

Поверхнева міра, асоційована з мірою об'єму на багатовиді

Побудуємо на S поверхневу міру, використовуючи описаний вище підхід з праць [8, 9]. Оскільки $P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ — диференціальна k-форма на $N \times D$, асоційована з поверхнею $N \times \{\vec{0}\}$, за асоційовану форму поверхні S можна взяти форму $\nu = (g^{-1})^* P^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ на U. При цьому для $x \in U_\alpha \cap U$ і $u_1, \ldots, u_k \in T_x M$ маємо:

$$\nu(x)(u_1, \ldots, u_k) = (dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)(T_x(P \circ g^{-1})u_1, \ldots, T_x(P \circ g^{-1})u_k) =$$

$$= \det((P \circ g^{-1} \circ \varphi_\alpha{}^{-1})'(u_1)_\alpha, \ldots, (P \circ g^{-1} \circ \varphi_\alpha{}^{-1})'(u_k)_\alpha),$$

де $(u_i)_\alpha \in \mathbb{R}^m$ — зображення дотичного вектора u_i в карті φ_α.

Для карти $(\hat{\psi}, \hat{W})$ (див. вираз (1)) отримуємо

$$\nu(x)(u_1, \ldots, u_k) = \det(P_2(u_1)_{\hat{\psi}}, \ldots, P_2(u_k)_{\hat{\psi}}), \tag{4}$$

де $P_2 : \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}^k$ — проекція на останні k координат.

Зафіксуємо деяку точку $x = g(y, \vec{0}) \in S$. Зображення тензора $T(x)$ у карті $\hat{\psi}$ має вигляд симетричної додатно визначеної блокової матриці:

$$T_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x)) = T_{\hat{\psi}}(\psi(y), \vec{0}) = T_x = \begin{pmatrix} A_x & F_x \\ F_x^T & C_x \end{pmatrix},$$

де A_x і C_x — симетричні матриці $n-k \times n-k$ і $k \times k$ відповідно; F_x — матриця $n-k \times k$.

Лема. Нехай $x \in M$, позначимо $\|\nu(x)\|_T = \sup\limits_{u_1, \ldots, u_k \in T_x M} \dfrac{|\nu(x)(u_1, \ldots, u_k)|}{\prod_{i=1}^{k} \| u_i \|_T}$.

Тоді

$$\|\nu(x)\|_T = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}.$$

Доведення. Оскільки матриця T_x є симетричною додатно визначеною, для неї можна застосувати розклад Холецького: $T_x = L_x L_x^{\mathrm{T}}$, де $L_x = \begin{pmatrix} K_x & 0 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ — нижня трикутна матриця з $K_x K_x^{\mathrm{T}} = A_x$. І нехай L_x^{-1} має блоковий вигляд: $L_x^{-1} = \begin{pmatrix} \ldots & B_x \\ \ldots & H_x \end{pmatrix}$, де $K_x B_x = 0$. При цьому за лемою 1 із праці [10] маємо рівність:

$$|\det L| \sqrt{\det\left((B_x^{\mathrm{T}} \quad H_x^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\det\left(\begin{pmatrix} K_x \\ 0 \end{pmatrix} (K_x^{\mathrm{T}} \quad 0) \right)} =$$

$$= \sqrt{\det (K_x K_x^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\det A_x}.$$

Тоді:

$$\|\nu(x)\|_T = \sup_{u_1,\ldots,u_k \in T_x M} \frac{|\nu(x)(u_1,\ldots,u_k)|}{\prod_{i=1}^{k} \| u_i \|_T} = \begin{bmatrix} \text{карта } \hat{\psi} \\ \text{рівність (4)} \end{bmatrix} =$$

$$= \sup_{u_1,\ldots,u_k \in T_x M} \frac{\left|\det (P_2(u_1)_{\hat{\psi}},\ldots,P_2(u_k)_{\hat{\psi}})\right|}{\prod_{i=1}^{k} \sqrt{\left\langle L_x^T(u_i)_{\hat{\psi}}, L_x^T(u_i)_{\hat{\psi}} \right\rangle}} =$$

$$= \begin{bmatrix} v_i = L_x^{\mathrm{T}}(u_i)_{\hat{\psi}} \\ V = [v_1 \ldots v_k] \end{bmatrix} = \sup_{v_1,\ldots,v_k \in \mathrm{R}^m} \frac{\left|\det ((B_x^{\mathrm{T}} \quad H_x^{\mathrm{T}})V)\right|}{\prod_{i=1}^{k} \| v_i \|}.$$

За лемою 2 [10] маємо:

$$\|\nu(x)\|_T = \sup_{v_1,\ldots,v_k \in \mathrm{R}^m} \frac{\left|\det ((B_x^{\mathrm{T}} \quad H_x^{\mathrm{T}})V)\right|}{\prod_{i=1}^{k} \| v_i \|} = \sqrt{\det\left((B_x^{\mathrm{T}} \quad H_x^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} B_x \\ H_x \end{pmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\det A_x}}{|\det L|} = \frac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det T_x}}.$$

Лему доведено.

Оскільки нормування диференціальної форми зберігає її асоційованість з поверхнею, за асоційовану форму поверхні S можемо також взяти форму:

$$\omega(\vec{x}) = \frac{\nu(\vec{x})}{\| \nu(\vec{x}) \|_T} = \frac{\sqrt{\det T_x}}{\sqrt{\det A_x}} \cdot \nu(\vec{x}).$$

Розглянемо набір векторних полів $\vec{X} = \{\vec{X}_1,\ldots,\vec{X}_k\}$ на $N \times D$, де $X_i(z) = \begin{pmatrix} \vec{0}_{T_z N} \\ \vec{0}_{i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix} \in T_z N \times \mathbb{R}^k$ — одиниця на i-й позиції в $\mathbb{R}^k$. Очевидно, що поля з набору $\vec{X}$ попарно комутують та утворюють строго трансверсальний до $N\times\{\vec{0}\}$ набір векторних полів (оскільки $(P^{*}(dt_1\wedge\ldots\wedge dt_k))(\vec{X}(z))=$ $=\det E_k=1$). Тому набір $\vec{X}=(X_1,\ldots,X_k)$ векторних полів на U, g-пов'язаних з $\vec{Y}$, є строго трансверсальним до S набором векторних полів, що попарно комутують. Тоді зображення X_i у карті $(\hat{\psi},\hat{W})$ (див. рівність (1)) має вигляд

$$(X_i)_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x))=(\hat{\psi}\circ g\circ(\psi\times id)^{-1})'(Y_i)_{\psi\times id}(g^{-1}(x))=\begin{pmatrix}\vec{0}_{m-k+i-1}\\ 1\\ \vec{0}_{k-i}\end{pmatrix},$$

а тому

$$\nu(\vec{x})(\vec{X})=\nu_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}(x))(\vec{X}_{\hat{\psi}})=\det(E_k)=1.$$

Оскільки $\Phi_t^{X_i}=g\circ\Phi_t^{Y_i}\circ g^{-1}$, для всіх $x\in S$ і $t\in D$ маємо рівність

$$\Phi_{\vec{t}}^{\vec{X}}(\vec{x})=(g\circ\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Y}}\circ g^{-1})(\vec{x})=g((\pi\circ g^{-1})(\vec{x})\times\{\vec{t}\}).$$

Тоді при $A\in\mathcal{B}(S)$ і $r\in\mathrm{R}$, для якого $B_r\subset D$, отримуємо рівність

$$\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(A)=g((\pi\circ g^{-1})(A)\times B_r).$$

Візьмемо тепер борелівську підмножину $G\subset S$, що разом з деяким околом лежить у межах однієї карти $(\hat{\psi},\hat{W})$ на M. Тоді за малих r

$$V(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}G)=\int\limits_{\hat{\psi}(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}G)}\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{x}))}dx^1\ldots dx^m=\int\limits_{\tilde{\psi}(G)\times B_r}\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{x}))}dx^1\ldots dx^m=$$

$$=\int\limits_{B_r}\int\limits_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{t}))}\,d\vec{z}\,d\vec{t}.$$

Урахувавши гладкість і обмеженість тензорного поля $T_{\hat{\psi}}$ (на компактній множині $\psi(\overline{W})\times\overline{B}_R$, див. зауваження), знайдемо границю (2) для міри V:

$$\lim_{r\to 0}\frac{V(\Phi_{B_r}^{\vec{X}}(G))}{\lambda_k(B_r)}=\lim_{r\to 0}\int\limits_{B_r}\int\limits_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{t}))}\,d\vec{z}\,d\vec{t}=$$

$$=\int\limits_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{0}))}\,d\vec{z}=\left(\left(\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\cdot,\vec{0}))}\cdot\lambda_{m-k}\right)\circ\tilde{\psi}\right)(G).$$

Беручи до уваги компактність $\overline{U}$ і зауваження, кожну множину $G\in\mathcal{B}(S)$ можемо подати у вигляді скінченного об'єднання підмножин, що разом з далеким околом лежать у межах однієї карти. Отже, поверхнева міра $\sigma_{\vec{X}}=\sigma_{\vec{X}}[V]$ визначена на $\mathrm{B}(S)$ коректно і є образом міри $\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{0}))}\cdot\lambda_{m-k}$ при відображенні $\tilde{\psi}^{-1}:\psi(W)\to S$.

Переходимо тепер до поверхневої міри другого типу, індукованої асоційованою формою ω:

$$\sigma_\omega(G)=\left(\frac{1}{|\,\omega(\vec{X})\,\|_S}\cdot\sigma_{\vec{X}}\right)(G)=\int_G\frac{1}{|\,\omega(X)\,\|_S}\,d\sigma_{\vec{X}}=$$

$$=\int_{\tilde{\psi}(G)}\left\|\nu(\tilde{\psi}^{-1}(\vec{z}))\right\|_T\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{0}))}\,d\vec{z}.$$

За лемою для $x=g(\psi^{-1}(\vec{z}),\vec{0})=\tilde{\psi}^{-1}(\vec{z})$ маємо рівність $\left\|\nu(\tilde{\psi}^{-1}(\vec{z}))\right\|_T=$ $=\dfrac{\sqrt{\det A_x}}{\sqrt{\det(T_{\hat{\psi}}(\vec{z},\vec{0}))}}$. Тому для кожного $G\in\mathrm{B}(S)$:

$$\hat{V}(G):=\sigma_\omega(G)=\int_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det A_{\tilde{\psi}^{-1}(\vec{z})}}\,d\vec{z}=\int_G\sqrt{\det A_x}\,dx\,.$$

Поверхнева міра об'єму, задана індукованим на поверхні тензором

Укладення $i:S\to M$ поверхні S у багатовид M індукує на S ріманів тензор $\tilde{T}=i^*T$, і, таким чином, поверхня S також являє собою ріманів багатовид. Тому на S визначено ріманову міру об'єму $\tilde{V}$ аналогічно формулі (3):

$$\tilde{V}(G)=\sum_i\int_{\phi_{\alpha_i}(G_i)}\sqrt{\det(\tilde{T}_{\phi_{\alpha_i}}(\vec{x}))dx^1\ldots dx^m}\ ,$$

де $G=\bigcup\limits_i G_i$ — таке розбиття множини $G\in\mathrm{B}(M)$ на скінченну кількість підмножин G_i, що попарно не перетинаються, за якого кожна G_i лежить в області визначення деякої карти $(U_{\alpha_i},\varphi_{\alpha_i})$ багатовиду S.

Зафіксуємо карту (ψ,W) на N і відповідні карти $(\tilde{\psi},\tilde{W})$ і $(\hat{\psi},\hat{W})$ на S і M. Для $x\in\tilde{W}\subset S$ зображення тензора $\tilde{T}$ у карті $(\tilde{\psi},\tilde{W})$ має вигляд $\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\vec{x})=A_x$ (у позначеннях леми), оскільки

$$\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\vec{x})(\vec{u},\vec{v})=T_{\hat{\psi}}(\vec{x})((\hat{\psi}\circ\tilde{\psi}^{-1})'(\tilde{\psi}(x))(\vec{u}),(\hat{\psi}\circ\tilde{\psi}^{-1})'(\tilde{\psi}(x))(\vec{v}))=$$

$$=T_{\hat{\psi}}(\vec{x})\left(\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \vec{0}\end{pmatrix}\right).$$

Таким чином, для підмножини $G\in\mathrm{B}(S)$, $G\subset\tilde{W}$ маємо:

$$\tilde{V}(G)=\int_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det(\tilde{T}_{\tilde{\psi}}(\vec{x}))d\vec{x}}=\int_{\tilde{\psi}(G)}\sqrt{\det A_{\tilde{\psi}^{-1}(\vec{x})}}\,d\vec{x}=\hat{V}(G).$$

Урахувавши компактність S, отримаємо, що індукована міра $\tilde{V}$ збігається з побудованою асоційованою мірою $\hat{V}$.

ВИСНОВКИ

У роботі отримано поверхневі міри першого та другого типів, асоційовані з рімановою мірою об'єму на поверхні, вкладеній у ріманів багатовид з рівномірною структурою. Показано, що отримана міра збігається з мірою об'єму поверхні, що задається індукованим тензором. Таким чином, обґрунтовано адекватність використання вказаного підходу до побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах. Перспективним вбачається подальше дослідження поверхневих мір другого типу на поверхнях, укладених у нескінченновимірні банахові багатовиди.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Угланов А.В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше / А.В.Угланов // Математический сборник. — 1998. — Т. 189, № 11. — С. 139–157.
2. *Uglanov A.V.* Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications / A.V. Uglanov. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. — 262 p.
3. *Пугачев О.В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах / О.В. Пугачев // Теория вероятностей и ее применения. — 2008. — 53, № 1. — С. 178–188.
4. *Богданский Ю.В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2012. — 64, № 10. — С. 1299–1313.
5. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2011. — 63, № 9. — С. 1169–1178.
6. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, № 6. — С. 733–739.
7. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2015. — 67, № 11. — С. 1450–1460.
8. *Богданский Ю.В.* Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, № 8. — С. 1030–1048.
9. *Богданский Ю.В.* Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — 69, №10. — С. 1299–1309.
10. *Моравецька К.В.* Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом / К.В. Моравецька // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2017. — № 4. — С. 66–72.

Надійшла 12.10.2017