УДК 517.98+517.95
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.1.11

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ДИФФЕОМОРФИЗМОМ МЕЖДУ РИМАНОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

А.Ю. ПОТАПЕНКО

Аннотация. Рассмотрена конструкция оператора Лапласа в L_2-версии по мере в контексте диффеоморфизма между (бесконечномерными) римановыми многообразиями. Получена связь между операторами замыкания градиента, граничным оператором следа и дивергенции по мере на диффеоморфных римановых многообразиях. Показано, что в случае корректности определения замыкания градиента, граничного оператора следа и дивергенции на римановом многообразии соответствующие операторы на диффеоморфном с ним римановом многообразии тоже корректно определены. Как результат полученной связи между операторами расширен класс решаемых задач (задач, которые имеют, притом единственное, решение) на римановом многообразии (и на гильбертовом пространстве как частном случае риманова многообразия) сведением задачи специального типа к ассоциированной с ней задаче Дирихле.

Ключевые слова: гильбертово пространство, риманово многообразие, диффеоморфизм, борелевская мера, дифференцирование мер, оператор Лапласа, задача Дирихле.

ВВЕДЕНИЕ

Построению оператора Лапласа в бесконечномерном случае и связанным с ним уравнениям посвящено много публикаций (см., например, работы [1–8]). В данной работе продолжается исследование иной конструкции лапласиана: лапласиана в L_2-версии. Лапласиан в L_2-версии на гильбертовом пространстве был предложен и изучался в работах [9–12]; на римановых, в том числе бесконечномерных, многообразиях лапласиан в L_2-версии и задача Дирихле рассматриваются в работах [13,14].

В настоящей работе исследуется диффеоморфное отображение между бесконечномерными римановыми многообразиями специального класса как способ расширения класса решаемых краевых задач. Изометрическим отображениям между конечномерными римановыми многообразиями посвящены, например, работы [15, 16]. Насколько известно автору исследования диффеоморфных отображений между римановыми многообразиями в контексте краевых задач ранее не проводились.

Цель работы — расширение класса решаемых краевых задач на римановом многообразии путем сведения задачи специального типа к диффеоморфно ассоциированной с ней задаче Дирихле, которая исследовалась в работе [14].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть M — риманово сепарабельное многообразие класса C^2 с модельным пространством H; G — область в M с гладкой границей $S = \partial G$; T_pS — касательное пространство к S в точке $p \in S$, линейное подпространство T_pM коразмерности 1. Риманов тензор позволяет для каждого $p \in M$ задать на T_pM скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, а следовательно, и соответствующую норму $\|\cdot\|$.

Обозначим через $C_b(M)$ пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на M, через $C_b(M;TM)$ — пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей на M, через $C_b^1(M)$ (соответственно, $C_b^1(M;TM)$) — пространство всех функций $f \in C_b(M)$ (соответственно, полей $\mathbf{X} \in C_b(M;TM)$), дифференцируемых в каждой точке $x \in M$ с непрерывной и ограниченной на всем M производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Здесь $f'(p) \in T_p^*M$ определен формулой $f'(p): T_pM \ni \ni \mathbf{Y}_p \mapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathrm{R}$; $\mathbf{X}'(p)$ — линейный оператор в T_pM, определённый формулой $\mathbf{X}'(p): \mathbf{Y}_p \mapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p}\mathbf{X}$, где ∇ — связность Леви–Чивиты на M (бесконечномерный вариант см., например, [17, с. 83]).

Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_\varphi)\}$ ($\varphi: U_\varphi \to H$) риманова многообразия M будем называть *равномерным* [18], если существуют такие $r > 0,\ \delta^-,\ \delta^+ > 0$, что

1) для каждой точки $p \in M$ существует такая карта (φ_p, U_p), что $\varphi_p(U_p) \supset B_r(\varphi_p(p)) = \{q \in H : \| \varphi_p(p) - q \| < r\}$;

2) для каждых $p \in M,\ q \in U_p,\ \xi \in T_qM$ выполняется $\delta^- \| \xi^{\varphi_p} \|_H^2 \le \le \| \xi \|^2 \le \delta^+ \| \xi^{\varphi_p} \|_H^2$ для карты (φ_p, U_p) из пункта 1).

В работе [18] доказана полнота внутренней метрики риманова многообразия с равномерным атласом. Напомним, что полнота метрики является необходимым условием корректного построения оператора Лапласа, проведенного в работе [13].

Пусть везде в дальнейшем M_1 и M_2 — счетномерные римановы многообразия класса C^2 с равномерными атласами Ω_1 и Ω_2 соответственно; $F: M_1 \to M_2$ — ограниченный диффеоморфизм между ними, т.е., существует такое $K > 0$, что $\| F'(p) \|,\ \| (F^{-1})'(q) \| \le K$ для всех $p \in M_1,\ q \in M_2$; G_1 — область в M_1 с гладкой границей $S_1 = \partial G_1$, $G_2 = F(G_1)$, $S_2 = = \partial G_2 = F(S_1)$.

СТРОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Векторное поле $\mathbf{Z} \in C_b^1(M;TM)$ будем называть *строго трансверсальным* к S, если существует $\delta > 0$ такое, что для каждой точки $p \in S$: $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) \geq \delta$ (здесь $d(\mathbf{Z}(p), T_pS) = \inf\{\| \mathbf{Z}(p) - \xi \|, \xi \in T_pS\}$).

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{n}_1 \in C_b^1(M_1)$ — строго трансверсальное к S_1 векторное поле. Тогда векторное поле $\mathbf{n}_2 = F'(F^{-1})\mathbf{n}_1(F^{-1})$ — строго трансверсальное к S_2.

Доказательство. Фиксируем точку $q \in S_2$ и обозначим $p = F^{-1}(q) \in S_1$. Также обозначим как K_2 множество всех C^1 кривых $v_2 : (-a_{v_2}, a_{v_2}) \to S_2$ ($a_{v_2} > 0$) таких, что $v_2(0) = q$. Аналогично обозначим как K_1 множество C^1 кривых $v_1 : (-a_{v_1}, a_{v_1}) \to S_1$ ($a_{v_1} > 0$) таких, что $v_1(0) = p$. Заметим, что $K_2 = \{F \circ v_1 \mid v_1 \in K_1\}$. Тогда

$$d(\mathbf{n}_2(q), T_qS_2) = \inf\{\| \mathbf{n}_2 - v_2'(t)|_{t=0} \| \mid v_2 \in K_2\} =$$

$$= \inf\{\| F'(p)\mathbf{n}_1(p) - F'(p)v_1'(t)|_{t=0} \| \mid v_1 \in K_1\} \geq$$

$$\geq \| (F'(p))^{-1} \|^{-1} \inf\{\| \mathbf{n}_1(p) - v_1'(t)|_{t=0} \| \mid v_1 \in K_1\} =$$

$$= \| (F^{-1})'(p) \|^{-1} d(\mathbf{n}_1(p), T_pS_1),$$

откуда, учитывая ограниченность диффеоморфизма F и условие леммы, получаем существование таких $K, \delta > 0$, не зависящих от q , что

$$d(\mathbf{n}_2(q), T_qS_2) \geq \frac{\delta}{K},$$

что и доказывает строгую трансверсальность $\mathbf{n}_2$ к S_2.

ЗАМЫКАЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА

Лемма 2. Пусть оператор $\operatorname{grad}_{G_1}$ корректно задан (мера μ_1 имеет полный носитель) и замыкаем в $L_2(G_1;\mu_1)$, для $A \in B(M_2)$ $\mu_2(A) \overset{\Delta}{=} \mu_1(F^{-1}(A))$. Также

$$\overline{\operatorname{grad}_{G_1}} f = 0 \ (\operatorname{mod} \mu_1) \Leftrightarrow f = \text{const} \ (\operatorname{mod} \mu_1) .$$

Тогда оператор $\operatorname{grad}_{G_2}$ также корректно задан и замыкаем в $L_2(G_2;\mu_2)$ и

$$\overline{\operatorname{grad}_{G_2}} f = 0 \ (\operatorname{mod} \mu_2) \Leftrightarrow f = \text{const} \ (\operatorname{mod} \mu_2) .$$

Следующее утверждение следует непосредственно из построения меры μ_2 .

Утверждение 1. Пусть $f \in L_1(M_2)$. Тогда $f \circ F \in L_1(M_1)$ и

$$\int_{M_2} f\, d\mu_2 = \int_{M_1} f \circ F\, d\mu_1 .$$

Доказательство леммы 2. Корректность задания grad_{G_2} очевидна: полнота носителя меры μ_2 следует из полноты носителя меры μ_1 и определения μ_2. Сначала докажем замыкаемость grad_{G_2}. Пусть $C^1(G_2) \ni f_n \to 0$ в $L_2(G_2;\mu_2)$, $\mathrm{grad}_{G_2} f_n \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G_2, TM_2;\mu_2)$. Необходимо показать, что $\mathbf{Z} = 0\,(\mathrm{mod}\,\mu_2)$. Благодаря утверждению 1 имеем

$$\int_{G_2} f_n^2\, d\mu_2 = \int_{G_1} f_n^2 \circ F\, d\mu_1 = \int_{G_1} (f_n \circ F)^2\, d\mu_1 ,$$

а значит $C^1(G_1) \ni f_n \circ F \to 0$ в $L_2(G_1;\mu_1)$.

Найдем $\mathrm{grad}_{G_1}(f_n \circ F)$:

$$\mathrm{grad}_{G_1}(f_n \circ F) = ((f_n \circ F)')^* = (f_n{}'(F(\cdot))F'(\cdot))^* = (F')^*((\mathrm{grad}_{G_2} f_n) \circ F). \quad (1)$$

Теперь покажем, что $\mathrm{grad}_{G_1}(f_n \circ F) \to (F')^*(\mathbf{Z} \circ F)$ в $L_2(G_1; TM_1;\mu_1)$.

Действительно, учитывая ограниченность диффеоморфизма F и сходимость $\mathrm{grad}_{G_2} f_n \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G_2, TM_2;\mu_2)$, имеем

$$\int_{G_1} \| (F')^*(\mathbf{Z} \circ F) - (F')^*((\overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f_n) \circ F) \|^2\, d\mu_1 \le$$

$$\le K^2 \int_{G_1} \| \mathbf{Z} \circ F - ((\overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f_n) \circ F) \|^2\, d\mu_1 =$$

$$= K^2 \int_{G_1} \| \mathbf{Z} - \overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f_n \|^2 \circ F\, d\mu_1 = K^2 \int_{G_2} \| \mathbf{Z} - \overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f_n \|^2\, d\mu_2 \to 0 ,$$

откуда, благодаря замыкаемости grad_{G_1}, получаем

$$(F')^*(\mathbf{Z} \circ F) = 0\,(\mathrm{mod}\,\mu_1) \Leftrightarrow \mathbf{Z} \circ F = 0\,(\mathrm{mod}\,\mu_1) \Leftrightarrow \mathbf{Z} = 0\,(\mathrm{mod}\,\mu_2),$$

что доказывает замыкаемость grad_{G_2}.

Теперь докажем, что

$$\overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f = 0\,(\mathrm{mod}\,\mu_2) \Leftrightarrow f = \mathrm{const}\,(\mathrm{mod}\,\mu_2).$$

Для этого сначала покажем, что $f \circ F \in D(\overline{\mathrm{grad}}_{G_1})$ и

$$\overline{\mathrm{grad}}_{G_1}(f \circ F) = (F')^*((\overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f) \circ F). \quad (2)$$

Поскольку $f \in D(\overline{\mathrm{grad}}_{G_2})$, существует последовательность $f_n \in C^1(G_2)$ такая, что $f_n \to f$ в $L_2(G_2;\mu_2)$ и $\mathrm{grad}_{G_2} f_n \to \overline{\mathrm{grad}}_{G_2} f$ в $L_2(G_2; TM_2;\mu_2)$. Из $f_2 \to f_n$ получаем $f_n \circ F \to f \circ F$ в $L_2(G_1;\mu_1)$ и

$$\int\limits_{G_1} \| (F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - \text{grad}_{G_1} (f_n \circ F) \|^2 d\mu_1 =$$
$$= \int\limits_{G_1} \| (F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - (F')^* ((\text{grad}_{G_2} f_n) \circ F) \|^2 d\mu_1 \le$$
$$\le K^2 \int\limits_{G_1} \| ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) - ((\text{grad}_{G_2} f_n) \circ F) \|^2 d\mu_1 =$$
$$= K^2 \int\limits_{G_1} \| (\overline{\text{grad}}_{G_2} f - \text{grad}_{G_2} f_n \|^2 d\mu_2 \to 0,$$

что доказывает тождество (2).

Теперь, имея (2), получаем

$$\overline{\text{grad}}_{G_2} f = 0 \ (\text{mod}\, \mu_2) \Leftrightarrow (F')^* ((\overline{\text{grad}}_{G_2} f) \circ F) = 0 \ (\text{mod}\, \mu_1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{\text{grad}}_{G_1} (f \circ F) = 0 \ (\text{mod}\, \mu_1) \Leftrightarrow f \circ F = \text{const} \ (\text{mod}\, \mu_1) \Leftrightarrow f = \text{const} \ (\text{mod}\, \mu_2)\,.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ГРАНИЧНЫЙ ОПЕРАТОР СЛЕДА

Пусть на M_1 фиксировано строго трансверсальное к S_1 поле $\mathbf{n}_1 \in C_b^1(M_1)$ такое, что логарифмическая производная μ_1 вдоль поля $\mathbf{n}_1$ $\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$ обладает свойством

$$\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1|_{G_1} \in L_\infty(G_1)\,. \tag{3}$$

Данное условие, вместе с замыкаемостью $\mathbf{grad}_{G_1}$, позволяют корректно определить граничный оператор следа

$$\gamma_1 : D(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}) \to L_2(S_1) = L_2(S_1, \tau_1)\,,$$

который для функций $u \in C^1(G_1)$ совпадает с оператором ограничения: $u \mapsto u|_{S_1}$. На гильбертовом пространстве граничный оператор следа введен в работе [9] и исследован в работе [11]; случай риманова многообразия аналогичен. Построение поверхностной меры τ_1 также приведен в работе [9].

Напомним, что функция $\rho \in L_1(M_1; \mu_1)$ совпадает с $\text{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$, так как для всех функций $u_1 \in C_b^1(M_1)$ выполняется

$$-\int\limits_{M_1} (\text{grad}_{M_1} u_1, \mathbf{n}_1) d\mu_1 = \int\limits_{M_1} u_1 \rho d\mu_1. \tag{4}$$

Пусть $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$ и $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$. Леммы 1 и 2 позволяют утверждать, что $\mathbf{n}_2$ будет строго трансверсально к S_2, а оператор grad_{G_2} — замыкаем. Для построения оператора следа на $D(\overline{\text{grad}}_{G_2})$ не достаточно условия $\text{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2|_{G_2} \in L_\infty(G_2)$. Как будет видно из следующей леммы, это условие действительно выполняется.

Лемма 3.

$$\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2 = (\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех функций $u \in C_b^1(M_2)$ выполняется

$$-\int_{M_2} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) d\mu_2 = \int_{M_2} u((\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2.$$

Действительно, учитывая утверждение 1, определение $\mathbf{n}_2$ и тождества (1) (точнее, его аналог для градиентов на M_1, M_2) и (4), имеем

$$-\int_{M_2} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) d\mu_2 = -\int_{M_1} (\operatorname{grad}_{M_2} u, \mathbf{n}_2) \circ F \, d\mu_1 =$$

$$= -\int_{M_1} ((F')^* ((\operatorname{grad}_{M_2} u) \circ F), \mathbf{n}_1) d\mu_1 = -\int_{M_1} (\operatorname{grad}_{M_1} (u \circ F), \mathbf{n}_1) d\mu_1 =$$

$$= \int_{M_1} (u \circ F) \operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1 \, d\mu_1 = \int_{M_2} u((\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1) \circ F^{-1}) d\mu_2.$$

Следствие 1. Если $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1|_{G_1} \in L_\infty(G_1)$, то $\operatorname{div}_{\mu_2} \mathbf{n}_2|_{G_2} \in L_\infty(G_2)$.

Таким образом, на $D(\overline{\operatorname{grad}_{G_2}})$ корректно определен граничный оператор следа γ_2. Следующее утверждение отображает связь операторов γ_1 и γ_2.

Утверждение 2. Пусть $u \in D(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}})$. Тогда $u \circ F^{-1} \in D(\overline{\mathbf{grad}_{G_2}})$ и

$$\gamma_2(u \circ F^{-1}) = \gamma_2(u) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Доказательство вхождения $u \circ F^{-1} \in D(\overline{\mathbf{grad}_{G_2}})$ аналогично проведенному в тождестве (2).

Поскольку $\gamma_1(u) = u|_{S_1}$ и $\gamma_2(u \circ F^{-1}) = (u \circ F^{-1})|_{S_2}$ для $u \in C^1(G_1)$, доказательство утверждения в этом случае очевидно. Поскольку $C^1(G_1)$ плотно в $D(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}})$, утверждение истинно в общем случае.

ДИВЕРГЕНЦИЯ ПО МЕРЕ

Замыкаемость $\operatorname{grad}_{G_1}$, а также условие (3) позволяют корректно определить граничные операторы следа $\gamma_1 : D(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}}) \to L_2(S_1)$ и $\gamma_2 : D(\overline{\mathbf{grad}_{G_2}}) \to$ $\to L_2(S_2)$. Теперь оператор дивергенции по мере корректно определяем следующим образом [10]:

$$\operatorname{div}_1 \overset{\Delta}{=} -(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}}|_{\operatorname{Ker}\gamma_1})^*; \operatorname{div}_2 \overset{\Delta}{=} -(\overline{\mathbf{grad}_{G_2}}|_{\operatorname{Ker}\gamma_2})^*.$$

Следующая лемма устанавливает связь между операторами div_1 и div_2.

Лемма 4. Пусть $\mathbf{Z}_1 \in D(\mathrm{div}_1); \mathbf{Z}_2(p) = F'(F^{-1}(p))\mathbf{Z}_1(F^{-1}(p))$. Тогда $\mathbf{Z}_2 \in D(\mathrm{div}_2)$ и

$$\mathrm{div}_2\,\mathbf{Z}_2 = (\mathrm{div}_1\,\mathbf{Z}_1) \circ F^{-1}.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех функций $u \in \mathrm{Ker}\,\gamma_2$ выполняется

$$\int_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2)\, d\mu_2 = -\int_{G_2} u((\mathrm{div}_1\,\mathbf{Z}_1) \circ F^{-1})\, d\mu_2.$$

Убедимся, что это действительно так. Учитывая утверждение 1, определение $\mathbf{Z}_2$, тождество (2), вхождение $u \circ F \in \mathrm{Ker}\,\gamma_1$ (как следствие утверждения 2) и определение div_1, имеем

$$\int_{G_2} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u, \mathbf{Z}_2)\, d\mu_2 = \int_{G_1} ((F')^* ((\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) \circ F), \mathbf{Z}_1)\, d\mu_1 =$$

$$= \int_{G_1} (\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} (u \circ F), \mathbf{Z}_1)\, d\mu_1 =$$

$$= -\int_{G_1} (u \circ F)(\mathrm{div}_1\,\mathbf{Z}_1)\, d\mu_1 = -\int_{G_2} u((\mathrm{div}_1\,\mathbf{Z}_1) \circ F^{-1})\, d\mu_2.$$

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, *F*-АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ ДИРИХЛЕ

Пусть grad_{G_1} замыкаем и выполнено условие (3), а значит, корректно определены операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}$, γ_1 и div_1. Благодаря леммам 1 и 2 и следствию 1 можем утверждать, что операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 и div_2 также корректно определены.

Рассмотрим задачу Дирихле на M_1. Пусть $f \in L_2(G_1)$, $k \in C^1(G_1)$, $a \in C(G_1)$, $k(x) \ge \delta > 0$, $a(x) \ge \alpha > 0$. Рассмотрим уравнение относительно функции u

$$\mathrm{div}_1(k \cdot \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - a \cdot u = f \tag{5}$$

с краевым условием

$$\gamma_1(u) = \varphi, \tag{6}$$

где $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma_1$.

Определение. Будем называть следующую краевую задачу относительно функции u F*-ассоциированной* с задачей Дирихле (5)–(6) уравнение

$$\mathrm{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) - (a \circ F^{-1})u = f \circ F^{-1} \tag{7}$$

с краевым условием

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}. \tag{8}$$

Теорема. Функция u_2 будет решением F-ассоциированной краевой задачи (7)–(8), тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2 \circ F$ будет решением соответствующей задачи Дирихле (5)–(6).

Доказательство. Сначала рассмотрим краевые условия. Учитывая утверждение 2, имеем

$$\gamma_2(u_2) = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_2(u_1 \circ F^{-1}) =$$

$$= \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_1(u_1) \circ F^{-1} = \varphi \circ F^{-1} \Leftrightarrow \gamma_1(u_1) = \varphi.$$

Теперь покажем, что уравнение (7) при $u = u_2$ эквивалентно уравнению (5) при $u = u_1$. Действительно, учитывая тождество (2) и лемму 4, имеем

$$\mathrm{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_2) - (a \circ F^{-1})u_2 = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{div}_2((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F')^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} (u_1 \circ F^{-1})) - (a \circ F^{-1})(u_1 \circ F^{-1}) =$$

$$= f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{div}_2(F'(F^{-1}(\cdot))(k\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1)(F^{-1}(\cdot))) - (a \cdot u_1) \circ F^{-1} = f \circ F^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{div}_1(k\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1)) \circ F^{-1} - (au_1) \circ F^{-1} =$$

$$= f \circ F^{-1} \Leftrightarrow \mathrm{div}_1(k\,\overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u_1) - a \cdot u_1 = f.$$

ВЫВОДЫ

В работе показано, что выполнение технических условий, позволяющих построить на римановом многообразии с равномерным атласом лапласиан по мере, сохраняется при переходе к диффеоморфному риманову многообразию с равномерной структурой (леммы 1 и 2 и следствие 1). Проведенное сравнение соответствующих операторов на диффеоморфных многообразиях ($\overline{\mathbf{grad}}, \gamma, \mathrm{div}$) позволяет свести рассмотрение краевой задачи вида (7)–(8) к задаче Дирихле (5)–(6) на диффеоморфном многообразии, расширив таким образом, благодаря в частности результатам работ [13, 14], класс решаемых краевых задач. В контексте дальнейших исследований представляется разумным рассмотрение конкретных примеров диффеоморфных пар многообразий и соответствующих им краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gross L.* Potential theory on Hilbert space / L. Gross // J. Funct. Anal. — 1967. — **1**. — P. 123–181.
2. *Далецкий Ю.Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения / Ю.Л. Далецкий // Успехи мат. наук. — 1967. — **22**, № 4. — С. 3–54.
3. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа / П. Леви. — М.: Наука, 1967. — 512 с.

4. *Немировский А.С.* Об аксиоматическом описании оператора Лапласа для функций на гильбертовом пространстве / А.С. Немировский, Г.Е. Шилов // Функциональный анализ и его приложение. — 1969. — **3**, № 3. — С. 79–85.
5. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 1977. — **29**, № 6. — С. 781–784.
6. *Accardi L.* On Laplacians and traces / L. Accardi, O.G. Smolianov // Conf. Semin. Univ. Bari. — 1993. — **250**. — P. 1–25.
7. *Accardi L.* A quantum approach to Laplace operators / L. Accardi, A. Barhoumi, H. Ouerdiane // Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top. — 2006. — **9**. — P. 215–248.
8. *Accardi L.* Exotic Laplacians and associated stohastic processes / L. Accardi, U.C. Ji, K. Saito // Infinite Dimens. Anal. Quant. Probab. Relat. Top. — 2009. — **12**. — P. 1–19.
9. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 9. — С. 1169–1178.
10. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 6. — С. 733–739.
11. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 11. — С. 1450–1460.
12. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере и эргодическая теорема / Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 9. — С. 1172–1180.
13. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле I / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 7. — С. 897–907.
14. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле II / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 11. — С. 1443–1449.
15. *Obata M.* Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere / M. Obata // J. of the Math. Soc. of Jap. — 1962. — **14**, N. 3. — P. 333–340.
16. *Omori H.* Isometric immersions of Riemannian manifolds / H. Omori // J. of the Math. Soc. of Jap. — 1967. — **19**, N 2. — P. 205–214.
17. *Далецкий Ю.Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю. Л. Далекций, Я. И. Белопольская. — К.: Вища шк., 1989. — 296 с.
18. *Потапенко О.Ю.* Нескінченновимірні ріманові многоводи з рівномірною структурою / О.Ю. Потапенко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73—79.

Поступила 27.10.2017