МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 621.391: 519.24
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.09

АДАПТИВНА АПРОКСИМАЦІЯ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ ПСЕВДООБЕРНЕННЯ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.Т. МАТВІЄНКО

Анотація. Для розв'язання ряду важливих прикладних задач необхідно проводити апроксимацію експериментальних даних у реальному часі. Розглянуто задачу адаптивної апроксимації експериментальних даних. Запропоновано загальну ітераційну схему. Ця процедура має два цикли: зовнішній (передбачає зміну структури базисних функцій, їх нарощування у разі потреби) і внутрішній (уточнює параметри апроксимації у міру надходження експериментальних даних). Запропонована схема базується на формі подання псевдооберненого оператора. Наведено умови збіжності ітераційної схеми апроксимації сигналів, які ґрунтуються на теорії стійкості за Ляпуновим.

Ключові слова: адаптивна апроксимація, динамічна система, оптимізація, псевдоінверсія, ітераційна схема, збіжність.

ВСТУП

Ефективним методом апроксимації вимірюваних сигналів є їх наближення лінійними комбінаціями систем базисних функцій [1–4]. Невідомі параметри можна визначати на основі методів псевдообернення, склавши відповідну систему лінійних алгебричних рівнянь, урахувавши таке:

- інформація про сигнал надходить у реальному часі;
- самі базисні функції та їх кількість, необхідні для апроксимації, невідомі.

Задача полягає в розробленні алгоритмів апроксимації експериментальних даних, за допомогою яких можна уточнювати параметри апроксимації, не переобчислюючи їх на кожному етапі в повному обсязі. Це дає змогу значно швидше розв'язувати складні задачі інформатики та прикладної математики.

У роботі для апроксимації експериментальних даних запропоновано загальну ітераційну схему. Така процедура являє собою динамічну систему різницевих рівнянь, записану для шуканих параметрів. Вона має два цикли: зовнішній (передбачає зміну структури базисних функцій і в разі потреби їх нарощування) та внутрішній (уточнює параметри апроксимації у міру надходження експериментальних даних). Скільки необхідно брати вимірів для внутрішнього циклу і як довго нарощувати систему базисних функцій — це проблема, яку можна розв'язати під час розгляду конкретних задач, зокрема використовуючи підходи з теорії стійкості та чутливості. Наприклад, при розпізнаванні мовних сигналів наперед невідома структура базисних функцій та їх кількість, які оптимально апроксимують той чи інший звук. Варто звернути увагу на те, що для аналізу збіжності апроксимації можна використовувати методи практичної стійкості динамічних систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Припустімо, що вимірюється в деякі моменти

$$t_0 \le t_{11} < t_{12} < ... < t_{1n_1} < t_{21} < t_{22} < ... < t_{2n_2} < t_{31} < ... < t_{N1} < t_{N2} < ... < t_{Nn_N} \le T$$

скалярна величина $x(t)$, а отже, відомо

$$x_{11} = x(t_{11}),\ x_{12} = x(t_{12}),...,x_{1n_1} = x(t_{1n_1});$$

$$x_{21} = x(t_{21}),\ x_{22} = x(t_{22}),...,x_{2n_2} = x(t_{2n_2});$$

$$x_{31} = x(t_{31}),\ ...,x_{N1} = x(t_{N1}), x_{N2} = x(t_{N2}),...,x_{Nn_N} = x(t_{Nn_N}). \tag{1}$$

Задача полягає в апроксимації із заданою наперед точністю ε в реальному часі сигналу за допомогою системи базисних функцій

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_N(t) \tag{2}$$

у вигляді лінійної комбінації

$$x(t) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t). \tag{3}$$

При цьому n може змінюватись від 1 до M. Важливим є асимптотичне дослідження моделі ($M \to \infty$).

Параметри апроксимації $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ будемо визначати з умови (3),ураховуючи те, що кількість базисних функцій та величина вибірки невідомі для досягненої точності. Для обчислення коефіцієнтів α_i у виразі (3) розглянемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k},\ \ k = \overline{1, N},\ \ j_k = \overline{1, m_k},\ \ m_k \le n_k, \tag{4}$$

де m_k може набувати значень від 1 до n_k з позначень (1) залежно від номера k. Тобто n_k — наперед задані обмеження кількості вимірів на k-й ітерації.

В описаній моделі, використовуючи базисні функції та виміри, отримаємо систему великої розмірності, що значно ускладнює обчислювальні процедури і є небажаним для розв'язання практичних задач, описаних вище. Тому для визначення параметрів моделі $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ запишемо різницеву систему.

Перепишемо систему (4) у векторно-матричній формі. Для цього введемо позначення:

$A^{(n,m_k)} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t_{k1}) & \varphi_2(t_{k1}) & \dots & \varphi_n(t_{k1}) \\ \varphi_1(t_{k2}) & \varphi_2(t_{k2}) & \dots & \varphi_n(t_{k2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_{km_k}) & \varphi_2(t_{km_k}) & \dots & \varphi_n(t_{km_k}) \end{pmatrix}$ — відома матриця розмірності $m_k \times n$;

$b^{(m_k)\mathrm{T}} = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{km_k})$ — m_k-вимірний вектор вимірюваних даних;

$\alpha_{m_k}^{(n)\mathrm{T}} = (\alpha_{m_k 1}, \alpha_{m_k 2}, \dots, \alpha_{m_k n})$ — вектор невідомих параметрів розмірності n; тут і далі символом Т будемо позначати операцію транспонування.

Тоді система (4) набуває вигляду

$$A^{(n,m_k)} \alpha_{m_k}^{(n)} = b^{(m_k)} . \tag{5}$$

Розв'язок системи (5) можна подати через псевдообернену матрицю $A^{(n,m_k)+}$ розмірності $n \times m_k$:

$$\alpha_{m_k}^{(n)} = A^{(n,m_k)+} b^{(m_k)} .$$

Далі алгоритм адаптивної апроксимації передбачає розбиття на два етапи: зовнішній і внутрішній з відповідними індексами та змінними циклів k і j_k. На відповідних етапах циклів до системи базисних функцій або вимірів додаються функції з метою уточнення параметрів апроксимації. Робота алгоритму припиняється з виконанням однієї з декількох умов: досягнуто задану точність ε, неможливо додавати базисні функції або нарощувати експериментальні дані.

Припустімо, що за умовами задачі потрібно додавати функції на зовнішньому етапі циклу та виміри — на внутрішньому.

Тоді, розширивши систему завдяки ще одній точці експериментальних даних x_{k,m_k+1} на внутрішньому циклі, в системі (4) зросте кількість невідомих параметрів і система набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k}, \ k = \overline{1,N}, \ j_k = \overline{1, m_k+1}, \ m_k + 1 \le n_k . \tag{6}$$

Переписавши систему (6) у векторно-матричній формі, отримаємо

$$A^{(n,m_k+1)} \alpha_{m_k+1}^{(n)} = b^{(m_k+1)} , \tag{7}$$

де $A^{(n,m_k+1)} = \begin{pmatrix} A^{(n,m_k)} \\ a_{m_k+1}^{(n)T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(n,m_k)} \\ \varphi_1(t_{k,m_k+1}) \ \ \varphi_2(t_{k,m_k+1}) \ \ \varphi_n(t_{k,m_k+1}) \end{pmatrix}$ — матриця розмірності $n \times (m_k+1)$; $b^{(m_k+1)} = \begin{pmatrix} b^{(m_k)} \\ x_{k,m_k+1} \end{pmatrix}$ — m_k+1-вимірний вектор вільних членів; $\alpha_{m_k+1}^{(n)}$ — вектор шуканих параметрів розмірності n на (m_k+1)-й ітерації.

Розв’язок системи (7) можна записати через псевдообернену матрицю $A^{(m_k+1)+}$:

$$\alpha_{m_k+1}^{(n)} = A^{(n,m_k+1)+} b^{(m_k+1)} . \tag{8}$$

Оскільки матрицю $A^{(m+1)+}$ можна виразити через псевдообернені та проекційні матриці на m_k-й ітерації, то для пошуку вектора шуканих параметрів запишемо ітераційну схему. Справедлива така теорема.

Теорема 1. Для коригування вектора невідомих параметрів послідовним нарощуванням вимірюваних даних виконується ітераційна схема

$$\alpha_{m_k+1}^{(n)} = L^{(n,m_k)} \alpha_{m_k}^{(n)} + \psi_{m_k}^{(n)}, \; m_k = 1,2,... \tag{9}$$

з початковими умовами

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{b^{(1)} A^{(n,1)\mathrm{T}}}{A^{(n,1)} A^{(n,1)\mathrm{T}}} = \frac{b^{(1)} a_1^{(n)\mathrm{T}}}{a_1^{(n)} a_1^{(n)\mathrm{T}}} .$$

Таким чином, для коригування параметрів записано лінійну різницеву схему (9). Доведення теореми полягає в тому, щоб подати матрицю $A^{(n,m_k+1)+}$ через матрицю $A^{(n,m_k)+}$, проекційні матриці $Z(A^{(n,m_k)})$ і $R(A^{(n,m_k)})$ на m-й ітерації і підставити в систему (8).

У роботі наведемо формули лише для обчислення матриці $L^{(n,m_k)}$ та вибору $\psi_{m_k}^{(n)}$ для двох випадків [5–6].

Випадок 1. Припустімо, що для матриці $A^{(n,m_k)}$ виконується співвідношення

$$a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)} > 0 .$$

Тоді матриця $L^{(n,m_k)}$ і вектор $\psi_{m_k}^{(n)}$ розмірностей $n \times n$ і n відповідно мають вигляд

$$L^{(n,m_k)} = \left(E_n - \frac{Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}}{a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_k+1}^{(n)}} a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}} \right);$$

$$\psi_{m_k}^{(n)} = \frac{Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_{k+1}}^{(n)}}{a_{m_{k+1}}^{(n)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_{k+1}}^{(n)}} x_{k,m_k+1} ,$$

де E_n — одинична матриця розмірності n.

Для цього випадку проекційні матриці $Z(A^{(n,m_k+1)})$ і $R(A^{(n,m_k+1)})$ обчислюються ітераційно за такими формулами:

$$Z(A^{(n,m_k+1)})=Z\begin{pmatrix}A^{(n,m_k)}\\ a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}\end{pmatrix}=$$

$$=Z(A^{(n,m_k)})-\frac{Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}; \qquad (10)$$

$$R(A^{(n,m_k+1)})=R\begin{pmatrix}A^{(n,m_k)}\\ a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}\end{pmatrix}=R(A^{(n,m_k)})-\frac{Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}R(A^{(n,m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}-$$

$$-\frac{R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T},}Z(A^{(n,m_k)})}{a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}+\frac{Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})}{(a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)})^2}\times$$

$$\times(1+a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}). \qquad (11)$$

Випадок 2. Якщо для матриці $A^{(n,m_k)}$ виконується рівність

$$a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}Z(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}=0,$$

то матриця $L^{(n,m_k)}$ і вектор $\psi_{m_k}^{(n)}$ обчислюються за формулами:

$$L^{(n,m_k)}=\left(E_n-\frac{R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)T}}{1+a_{m_k+1}^{(n)T}R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}\right);$$

$$\psi_{m_k}^{(n)}=\frac{R(A^{(n,m_k)})\,a_{m_k+1}^{(n)}}{1+a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}x_{k,m_k+1}.$$

Проекційні оператори в цьому випадку обчислюються таким чином:

$$Z(A^{(n,m_k+1)})=Z\begin{pmatrix}A^{(n,m_k)}\\ a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}\end{pmatrix}=Z(A^{(n,m_k)}); \qquad (12)$$

$$R(A^{(n,m_k+1)})=R\begin{pmatrix}A^{(n,m_k)}\\ a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}\end{pmatrix}=$$

$$=R(A^{(n,m_k)})-\frac{R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}R(A^{(n,m_k)})}{1+a_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}R(A^{(n,m_k)})a_{m_k+1}^{(n)}}. \qquad (13)$$

За означенням проекційні матриці $Z(A)$ і $R(A)$ для матриці A визначаються за формулами

$$Z(A)=E_n-A^+A,\ \ R(A)=A^+A^{+\mathrm{T}}. \qquad (14)$$

Згідно з (14) для ітераційного обчислення матриць (10), (11) і (12), (13) необхідно спочатку визначити $Z(A^{(n,1)})$ і $R(A^{(n,1)})$ за формулами:

$$Z(A^{(n,1)}) = Z(a_1^{(n)\mathrm{T}}) = E_n - \frac{A^{(n,1)\mathrm{T}} A^{(n,1)}}{(A^{(n,1)} A^{(n,1)\mathrm{T}})^2} = E_n - \frac{a_1^{(n)} a_1^{(n)\mathrm{T}}}{(a_1^{(n)\mathrm{T}} a_1^{(n)})^2};$$

$$R(A^{(n,1)}) = R(a_1^{(n)\mathrm{T}}) = A^{(n,1)+} (A^{(n,1)+})^{\mathrm{T}} = (a_1^{(n)\mathrm{T}})^{+} (a_1^{(n)\mathrm{T}})^{+\mathrm{T}} =$$

$$= \frac{A^{(n,1)E}}{A^{(n,1)} A^{(n,1)E}} \cdot \frac{A^{(n,1)}}{A^{(n,1)} A^{(n,1)\mathrm{T}}} = \frac{a_1^{(n)}}{a_1^{(n)\mathrm{T}} a_1^{(n)}} \cdot \frac{a_1^{(n)T}}{a_1^{(n)\mathrm{T}} a_1^{(n)}} = \frac{a_1^{(n)} a_1^{(n)\mathrm{T}}}{(a_1^{(n)\mathrm{T}} a_1^{(n)})^2}.$$

Ітераційну схему (9) можна досліджувати на збіжність за допомогою аналога другого методу Ляпунова для різницевих рівнянь. Вважатимемо, що $\overline{\alpha}$ — розв'язок задачі, тобто $\alpha_{m_k}^{(n)} \to \overline{\alpha}$, якщо $m_k \to \infty$. Тоді заміною

$$\alpha_{m_k}^{(n)} = y_{m_k}^{(n)} + \overline{\alpha}$$

систему (9) запишемо у нових змінних:

$$y_{m_k+1}^{(n)} = f_{m_k}^{(n)}(y_{m_k}^{(n)}), \; m_k = 1, 2, ... \tag{15}$$

Задача аналізу збіжності ітераційної процедури (9) буде еквівалентною дослідженню стійкості різницевої схеми (15). При цьому $y_{m_k}^{(n)} = 0$, $m_k = 1, 2, ...$ називають незбуреним розв'язком.

Означення 1. Незбурений розв'язок системи (15) називають стійким за Ляпуновим, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що на розв'язках системи (15) виконується нерівність $\left\| y_{m_k}^{(n)} \right\| < \varepsilon, \; m_k = 1, 2, ...$ за умови $\left\| y_1^{(n)} \right\| < \delta$ (тут і далі під $\left\| y_{m_k}^{(n)} \right\|$ будемо розуміти евклідову норму вектора $y_{m_k}^{(n)}$).

Якщо, крім означення 1, на розв'язках системи (15) виконується умова $\lim\limits_{m_k \to \infty} y_{m_k}^{(n)} = 0$ при $\left\| y_1^{(n)} \right\| < \delta$, то незбурений рух системи (15) називають асимптотично стійким за Ляпуновим.

Справедливі такі теореми.

Теорема 2. Нехай в області

$$Y_\rho = \left\{ y_{m_k}^{(n)} \; : \; \left\| y_{m_k}^{(n)} \right\| < \rho \right\}$$

для системи різницевих рівнянь (15) можна вказати додатно визначену послідовність функцій Ляпунова $V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)}), \; m_k = 1, 2, ...$, а її перша різниця на розв'язках розглянутої системи буде недодатною, тобто

$$\Delta V_{m_k} = V_{m_k+1}(y_{m_k+1}^{(n)}) - V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)}) = V_{m_k+1}(f_{m_k}^{(n)}(y_{m_k}^{(n)})) - V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)}) \le 0,$$

то незбурений розв'язок є стійким за Ляпуновим.

Теорема 3. Якщо за умов попередньої теореми щодо послідовності функцій Ляпунова $V_{m_k}(y_{m_k}^{(n)})$, $m_k = 1, 2, ...$ перша різниця ΔV_{m_k}, $m_k = 1, 2, ...$ на розв'язках системи (15) є від'ємно визначеною, то незбурений розв'язок системи (15) є асимптотично стійким.

Необхідно зазначити, що для випадку 2 послідовність функцій Ляпунова можна вибирати у вигляді

$$V_{m_k}^{(1)} = y_{m_k}^{(n)\mathrm{T}} B^{(n,m_k)} y_{m_k}^{(n)},\ m_k = 1, 2, ...,$$

де $B_{m_k}^{(n)}$ — деякі додатно визначені матриці.

Теорема 4. Якщо $\overline{\alpha}$ — розв'язок системи (4) для будь-якого m_k, то система різницевих рівнянь для збуреного руху, тобто відносно векторів $y_{m_k}^{(n)}$, буде мати вигляд

$$y_{m_k+1}^{(n)} = L^{(n,m_k)} y_{m_k}^{(n)},\ m_k = 1, 2, \dots. \tag{16}$$

Таким чином, для цього випадку дослідження збіжності ітераційної процедури (9) за збурених початкових даних еквівалентне аналізу стійкості лінійної різницевої системи (16). Згідно з принципом стиснених відображень Банаха різницева система (16) буде асимптотично стійкою, якщо

$$\left\| L^{(m)} y^{(m)} \right\| < \left\| y^{(m)} \right\|,\ m = 1, 2, ...$$

Розглянемо процедуру зовнішнього циклу запропонованого алгоритму, коли до системи базисних функцій (2) додаємо ще одну функцію $\varphi_{n+1}(t)$. Тоді в системі типу (4) змінюється кількість невідомих параметрів:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(t_{kj_k}) = x_{kj_k},\ k = \overline{1, N},\ j_k = \overline{1, m_k},\ m_k \le n_k. \tag{17}$$

Запишемо систему (17) у векторно-матричній формі

$$A^{(n+1,m_k)} \alpha_{m_k}^{(n+1)} = b^{(m_k)}, \tag{18}$$

де $A^{(n+1,m_k)} = (A^{(n,m_k)}, a_{m_k}^{(n+1)})$ — матриця розмірності $m_k \times (n+1)$; $a_{m_k}^{(n+1)T} = (\varphi_{n+1}(t_{k1}), \varphi_{n+1}(t_{k2}), ..., \varphi_{n+1}(t_{km_k}))$ — відомий вектор розмірності m_k; $\alpha_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} = (\alpha_{m_k}^{(n)\mathrm{T}}, \alpha_{m_k, n+1})$ — $(n+1)$-вимірний вектор шуканих змінних на $(n+1)$-й ітерації.

Розв'язок системи (18) можна записати через псевдообернену матрицю $A^{(n+1,m_k)+}$

$$\alpha_{m_k}^{(n+1)} = A^{(n+1,m_k)+} b^{(m_k)}.$$

Оскільки в цьому випадку псевдообернена матриця $A^{(n+1,m_k)+}$ виражається через псевдообернену та проекційні матриці на n-й ітерації, для пошуку вектора невідомих параметрів можна записати різницеву схему. Справедлива така теорема.

Теорема 5. Для коригування вектора невідомих параметрів за послідовного розширення системи базисних функцій і незмінних вимірів сигналу справедливою є ітераційна схема

$$\alpha_{m_k}^{(n+1)} = Q^{(n,m_k)}\alpha_{m_k}^{(n)} + u_{m_k}^{(n)}, \ n = 1, 2, ...$$

з початковими умовами для скалярної величини $\alpha_{m_k}^{(1)}$:

$$\alpha_{m_k}^{(1)} = \frac{A^{(1,m_k)\mathrm{T}}}{A^{(1,m_k)\mathrm{T}} A^{(1,m_k)}} b^{(m_k)} .$$

У випадку коли

$$a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)}) a_{m_k}^{(n+1)} > 0 ,$$

матриця $Q^{(n,m_k)}$ і вектор $u_{m_k}^{(n)}$ набувають вигляду

$$Q^{(n,m_k)} = \begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{19}$$

$$u_{m_k}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{A^{(n,m_k)+} a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z^{\mathrm{T}}(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) b^{(m_k)}}{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} \\ \dfrac{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z^{\mathrm{T}}(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) b^{(m_k)}}{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} \end{pmatrix} .$$

Для цього випадку проекційні матриці $Z(A^{(n+1,m_k)})$ і $R(A^{(n+1,m_k)})$ обчислюються ітераційно за такими формулами:

$$Z(A^{(n+1,m_k)}) = Z(A^{(n,m_k)} \quad a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}}) = Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) -$$

$$- \frac{Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})}{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} ;$$

$$R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) = R(A^{(n,m_k)} \quad a_{m_k}^{(n+1)}) =$$

$$= R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) - \frac{Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1,m_k)} a_{m_k}^{(n+1,m_k)\mathrm{T}} R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})}{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} -$$

$$- \frac{R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})}{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} +$$

$$+ \frac{Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})}{(a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)})^2} (1 + a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}).$$

У випадку, коли матриця $A^{(n,m_k)}$ задовольняє умову

$$a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})\, a_{m_k}^{(n+1)} = 0\,,$$

матриця $Q^{(n,m_k)}$ має вигляд (19):

$$u_{m_k}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{A^{(n,m_k)+} a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z^{\mathrm{T}}(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) b^{(m_k)}}{1 + a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} \\ \dfrac{a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} R^{\mathrm{T}}(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) b^{(m_k)}}{1 + a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}} \end{pmatrix},$$

Проекційні матриці $Z(A^{(n+1,m_k)})$ і $R(A^{(n+1,m_k)})$ обчислюються таким чином:

$$Z(A^{(n+1,m_k)}) = Z(A^{(n,m_k)} \quad a_{m_k}^{(n+1)}) = Z(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})\,;$$

$$R(A^{(n+1,m_k)}) = R(A^{(n,m_k)} \quad a_{m_k}^{(n+1)}) = R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) -$$

$$-\frac{R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)} a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}})}{1 + a_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}} R(A^{(n,m_k)\mathrm{T}}) a_{m_k}^{(n+1)}}\,;$$

$$Z(A^{(1,m_k)\mathrm{T}}) = Z(a_{m_k}^{(1)\mathrm{T}}) = E_N - \frac{A^{(1,m_k)} A^{(1,m_k)\mathrm{T}}}{(A^{(1,m_k)\mathrm{T}} A^{(1,m_k)})^2} = E_{m_k} - \frac{a_{m_k}^{(1)} a_{m_k}^{(1)\mathrm{T}}}{(a_{m_k}^{(1)T} a_{m_k}^{(1)})^2}\,;$$

$$R(A^{(1,m_k)\mathrm{T}}) = R(a_{m_k}^{(1)\mathrm{T}}) = \frac{A^{(1,m_k)}}{A^{(1,m_k)\mathrm{T}} A^{(1,m_k)}} \cdot \frac{A^{(1,m_k)\mathrm{T}}}{A^{(1,m_k)\mathrm{T}} A^{(1,m_k)}} =$$

$$= \frac{A^{(1,m_k)} A^{(1,m_k)\mathrm{T}}}{(A^{(1,m_k)\mathrm{T}} A^{(1,m_k)})^2} = \frac{a_{m_k}^{(1)} a_{m_k}^{(1)\mathrm{T}}}{(a_{m_k}^{(1)\mathrm{T}} a_{m_k}^{(1)})^2}\,.$$

ВИСНОВОК

Запропонований алгоритм адаптивної апроксимації даних ефективно застосовується для розв'язання прикладних задач. Наведені умови збіжності алгоритму апроксимації підтверджують ефективність процедури в реальному часі. Такий підхід до апроксимації даних дає змогу їх використовувати для розв'язання задач розпізнавання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. — М. Наука, 1965. — 407 с.
2. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю.Г. Евтушенко. — М.: Наука, 1982. — 432 с.

3. *Бублик Б.Н.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б.Н. Бублик, Ф.Г. Гаращенко, Н.Ф. Кириченко. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
4. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1972. — 246 с.
5. *Гаращенко О.Ф.* Об одном методе последовательного построения матриц ортогональных преобразований / О.Ф. Гаращенко , Н.Ф. Кириченко // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 1. — С. 75–87.
6. *Гаращенко Ф.Г.* Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф.Г. Гаращенко, О.С. Дегтяр, О.Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 69–77.

Надійшла 05.09.2017