

## **МЕРЕЖЕВІ СТРУКТУРИ ТА СИСТЕМИ: І. ПОТОКОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ**

**О.Д. ПОЛІЩУК, М.С. ЯДЖАК**

**Анотація.** Розглянуто структурний та функціональний напрями дослідження складних мережевих систем. Мережева система визначається як складна мережа, по якій рухаються потоки. Проведено класифікацію мережевих систем за ознаками неперервності та рівня впорядкованості руху потоків. Поряд зі структурними характеристиками складних мереж уведено потокові характеристики мережевих систем. Досліджено проблему критичної завантаженості складових мережі, а також проблеми розмірності та адекватності моделей мережевих систем. Показано, як за допомогою потокових характеристик системи ідентифікуються і вилучаються з її структури фіктивні вузли та зв'язки і визначаються приховані елементи системи. Досліджено, як на основі аналізу потокових процесів у системі змінюється структура безмасштабних мереж не лише на стадії росту, але і протягом усього життєвого циклу відповідної мережевої системи. Розглянуто проблему ізольованих зон мережевих систем та запропоновано алгоритм пошуку альтернативних шляхів руху потоків в обхід недосяжних складових мережі.

**Ключові слова:** складна мережа, мережева система, потік, модель, розмірність, адекватність, альтернативні шляхи, ріст, переважне приєднання.

### **ВСТУП**

Системи різного походження, типу та призначення є чи не найскладнішим об'єктом наукових досліджень [1, 2]. Це пояснюється необхідністю визначення їх складу та структури, пізнання законів функціонування й особливостей взаємодії між собою та з навколишнім середовищем великої кількості різномірних об'єктів, які діють для досягнення спільної і часто недостатньо зрозумілої досліднику цілі [3, 4]. Складні системи вивчають багато дисциплін, які надалі називатимемо системними (загальна теорія систем, системний аналіз, дослідження операцій, системотехніка, математичне моделювання та оптимізація та ін.). У кожній із природничих та гуманітарних наук можна виокремити певний «системний» підрозділ, який стосується її предметної області [5–7]. Одним із напрямів системних досліджень, який почав бурхливо розвиватися протягом останніх десятиліть [8, 9], стало вивчення складних мережевих систем (СМС). Мережеві структури є у мікро- та макросвіті [10–12], біологічних системах та людському соціумі [13–15]. Існують

різні визначення складних мереж (СМ) [16]. У цій роботі вважатимемо, що СМ — це сукупності вузлів, поєднаних певними зв'язками (ребрами), які мають нетривіальні топологічні властивості [8]. З-поміж основних понять теорії складних мереж (ТСМ) можна назвати орієнтованість мережі, локальні характеристики вузлів та зв'язків, загальні топологічні властивості мережевих підструктур (клік, спільнот тощо) та мережі загалом. Предметом дослідження ТСМ [9] є створення універсальних моделей мережевих структур, визначення статистичних властивостей, які характеризують їх поведінку та прогнозування поведінки мереж у разі зміни їх структурних властивостей. Загалом ТСМ реалізовує структурний напрям досліджень СМС. Це зовсім не применшує її значущості, оскільки причиною неефективного функціонування багатьох реальних систем є саме вади їх структури. До того ж існували та існують системи, які можна вивчати, досліджуючи виключно їх структуру. Серед таких СМС можна назвати мережеві структури Всесвіту, дослідження яких дозволяє знайти вирішення багатьох космологічних проблем. Археологи виявляють численні інфраструктурні мережі зниклих цивілізацій, а палеонтологи — ареали існування вимерлих тварин та рослин. У свій час це були достатньо великі та складні системи, досліджувати які тепер можемо винятково на основі їх викопних «мережевих» залишків.

Природні та штучні, фізичні та біологічні мережі, мережі мікро- та макросвіту мають багато спільного [9]. У кожному великому місті існують системи електро-, газо- та водопостачання, стаціонарного телефонного зв'язку, кабельного телебачення, інтернет та поштових послуг тощо. Усі ці системи мають тотожну мережеву структуру, більшість вузлів якої складають окремі будинки, офіси та квартири. Однак, незважаючи на практичну ідентичність структур, це істотно різні системи. Схожість мережевих структур дає змогу розробляти універсальні методи дослідження цих структур, але не завжди відповідних систем. Системні дисципліни, які загалом реалізують функціональний напрям системних досліджень, оперують такими поняттями, як ціль, функція, стан, процес, поведінка, стійкість, керованість [17] тощо. Предметом їх дослідження є вивчення різних класів і типів систем, основних принципів та закономірностей їх поведінки, процесів цілеутворення, функціонування, розвитку та взаємодії із зовнішнім середовищем [2, 18]. У системних дисциплінах структура системи розглядається спільно з функціями, які реалізуються складовими цієї структури та системою загалом, причому функція має пріоритет над структурою. Однією з визначальних особливостей реально функціонуючих СМС є рух потоків у них. В одних випадках забезпечення руху потоків є основною метою утворення та функціонування таких систем, у інших — основним процесом, який забезпечує їх життєдіяльність. Теорія мережевих потоків, розвиток якої розпочався у середині 50-х років минулого століття [19], вирішує низку практично важливих проблем, які стосуються насамперед можливостей мережі як структури, щоб забезпечити рух потоків [20], і меншою мірою — особливостей процесу функціонування системи. Вивчення довільної системи потребує цілісного погляду на неї, який можна сформулювати лише, поєднуючи структурний та функціональний напрями системних досліджень.

**Мета роботи** — визначити, як аналіз мережевих потоків дозволяє зблизити функціональний та структурний напрями досліджень СМС; вирішити низку практично важливих проблем, які виникають під час моделювання поведінки цих систем.

## ПОТОКОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ

Для розрізнення та класифікації СМС використовуємо тип та рівень упорядкованості руху потоків у мережі [21]. Ці потоки можуть бути дискретними (потяги), неперервно-дискретними (автотранспортні потоки) та неперервними (газ, нафта). Рух потоків у мережі може бути повністю впорядкованим, частково впорядкованим та неупорядкованим. Під впорядкованим розумітимемо рух потоків, які пересуваються згідно з певним наперед установленим графіком. Таким є рух потягів у залізничній транспортній системі. Під частково впорядкованим розумітимемо рух потоків, частина з яких пересувається згідно з графіком. Прикладом є рух комунального транспорту у містах та регулярне приміське або міжміське автосполучення. Невпорядкованим називаємо рух потоків, пересування яких складно описати за допомогою детермінованих закономірностей. Прикладом є рух інформаційних потоків у Інтернеті. Зрозуміло, що мережі однакової структури з різними типами потоків та рівнем упорядкованості їх руху породжують різні мережеві системи. Класифікацію потоків у мережі можна поглибити за ознаками періодичності, рівномірності, керованості, типу матеріального носія тощо. Це дозволяє здійснити більш точну класифікацію СМС.

Структура СМ повністю визначається її матрицею суміжності  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ , де  $N$  — кількість вузлів, які входять до складу мережі [22]. Для найбільш досліджених бінарних мереж значення  $a_{ij}$  дорівнюють 1, якщо між вузлами  $n_i$  і  $n_j$  є зв'язок, і дорівнює 0, якщо такого зв'язку немає. Очевидно, що для неорієнтованих мереж матриця  $\mathbf{A}$  є симетричною. Одне з найважливіших понять ТСМ, а саме ступінь  $d_i$  вузла  $n_i$  для неорієнтованих бінарних мереж, визначається через елементи матриці суміжності за співвідношенням  $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ . Для орієнтованих мереж використовуються такі поняття, як вихідний ступінь  $d_i^{\text{out}}$  та вхідний ступінь  $d_i^{\text{in}}$  вузла  $n_i$ . Вихідний ступінь вузла визначає кількість зв'язків, які «виходять» з нього, вхідний ступінь – кількість зв'язків, які «входять» у цей вузол. Легко бачити, що  $d_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ , а  $d_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ , та для неорієнтованих мереж  $d_i^{\text{out}} = d_i^{\text{in}} = d_i$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ .

Розглянемо випадок, коли потоки неперервно розподілені ребрами СМ. Нехай вузли  $n_i$  і  $n_j$  сполучені ребром (кривою)  $y_{ij}(x)$ ,  $x \in [x_i, x_j]$ . Позначимо через  $\rho_{ij}(t, x, y_{ij}(x))$  щільність потоку, який рухається з вузла  $n_i$  у вузол  $n_j$  у точці  $(x, y_{ij}(x))$ ,  $x \in [x_i, x_j]$  у момент часу  $t \in [0, T]$ . Тоді загальний об'єм потоку, спрямовленого з вузла  $n_i$  у вузол  $n_j$  у момент часу  $t$  на ребрі  $(n_i, n_j)$ , становитиме

$$v_{ij}(t) = \int_{(n_i, n_j)} \rho_{ij}(t, x, y_{ij}(x)) dl = \int_{x_i}^{x_j} \rho_{ij}(t, x, y_{ij}(x)) \sqrt{1 + (y_{ij}'(x))^2} dx,$$

а об'єм потоку, який проходить із вузла  $n_i$  у вузол  $n_j$  за період  $[0, T]$

$$V_{ij} = \int_0^T v_{ij}(t) dt .$$

Уведемо потокову матрицю суміжності мережевої системи  $\mathbf{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^N$  за період  $[0, T]$  співвідношенням  $f_{ij} = V_{ij} / \max_{m,l=1,N} \{V_{ml}\}$ ,  $f_{ij} \in [0, 1]$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ .

Елементи матриці  $\mathbf{F}$  визначають потокову силу взаємозв'язку між вузлами мережі протягом періоду  $[0, T]$ . Беручи послідовно кілька таких періодів, можна відстежувати динаміку зміни об'ємів потоків у мережі в часі. Очевидно, що потокові матриці суміжності як для орієнтованих, так і для неорієнтованих мереж загалом є несиметричними. Якщо матриця суміжності  $\mathbf{A}$  відображає структурну модель СМ, то матриця  $\mathbf{V}(t) = \{v_{ij}(t)\}_{i,j=1}^N$ ,  $t \in [0, T]$ , — континуальну потокову модель мережевої системи, а матриця  $\mathbf{F}$  — її інтегральну потокову модель. Зрозуміло, що це не є математичними моделями у звичному розумінні, однак вони дають достатньо чітке кількісне уявлення про процес функціонування СМС, дозволяють аналізувати особливості та прогнозувати поведінку цього процесу, а також оцінювати його ефективність [21].

Визначимо вихідний потоковий ступінь вузла  $n_i$  через  $\delta_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N f_{ij} / N$ , вхідний потоковий ступінь вузла  $n_i$  через  $\delta_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N f_{ji} / N$ , а загальний потоковий ступінь вузла  $n_i$  — співвідношенням  $\delta_i = (\delta_i^{\text{out}} + \delta_i^{\text{in}}) / 2$ , де  $\delta_i^{\text{out}}, \delta_i^{\text{in}}, \delta_i \in [0, 1]$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Очевидно, що зміст прийнятого у ТСМ ступеня вузла та зміст визначеного вище потокового ступеня вузла суттєво різняться. Ми використовуємо однаковий термін «ступінь», зважаючи на аналогічність способу їх визначення через елементи відповідних матриць суміжності. Надалі для уникнення двозначностей називатимемо визначений у ТСМ ступінь вузла структурним. Згідно з ТСМ усі вузли бінарної мережі з однаковим ступенем є рівноважливими для структури. Потоківі ступені вносять функціональну впорядкованість пріоритетності вузлів з однаковими структурними ступенями, тобто значення  $\delta_i$  визначає потокову завантаженість (функціональну важливість) вузла  $n_i$  у системі, а значення  $\varphi_{ij} = (f_{ij} + f_{ji}) / 2$  — функціональну важливість ребра, яке сполучає вузли  $n_i$  і  $n_j$  відповідно. Таким чином, вузли з меншим структурним, але більшим потоковим ступенем можуть відігравати важливішу роль у процесі функціонування системи. Локальною характеристикою СМС можна вважати параметр  $\gamma_{ij} = \varphi_{ij} / \delta_i$ , значення якого можна інтерпретувати як важливість для вузла  $n_i$  зв'язку з вузлом  $n_j$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ . Збільшення або зменшення потокової завантаженості вузлів та зв'язків, які належать певній зв'язній підмережі вихідної СМ, може свідчити про активізацію (пришвидшення розвитку) відповідної частини системи або навпаки – про розгортання депресивних процесів у ній.

Для бінарних мереж сила зв'язку між вузлами дорівнює 1, якщо між ними є ребро, та 0, якщо такого ребра немає. Отже, опосередкована сила зв'язку між довільними вузлами зв'язної мережі формально також дорівнює 1. У випадку незв'язних мереж сила зв'язку між двома довільними вузлами дорівнює 1, якщо існує шлях між ними, та дорівнює 0, якщо такий шлях відсутній (вузли належать незв'язним складовим СМ). Поточкові характеристики дають можливість скласти значно адекватнішу картину як прямої, так і опосередкованої сили зв'язку між безпосередньо зв'язаними або віддаленими вузлами мережі. А саме, дозволяють визначати поточкову силу зв'язку між двома довільними вузлами зв'язної мережі як максимальне з усіх мінімальних значень елементів поточної матриці суміжності, які лежать на шляхах, що сполучають ці вузли. Таким чином, поточкова сила зв'язку між віддаленими вузлами мережі визначає можливість опосередкованого впливу з боку одного вузла на інший. При цьому віддалений вузол може впливати сильніше, ніж вузол, з яким існує прямий зв'язок (ребро), і вплив вузла  $n_i$  на вузол  $n_j$  може відрізнятися від впливу вузла  $n_j$  на  $n_i$ . Сили зв'язку між вузлами мережі, визначені через її поточкові характеристики, дають кількісне вираження функціональної взаємодії елементів мережевих систем. Особливо важливою є точність визначення сили зв'язку для вирішення проблем синхронізації СМ [23].

Важливими характеристиками процесу функціонування СМС є критична завантаженість її вузлів та зв'язків, окремих підмереж та мережі загалом. Критично завантажені складові системи є потенційною загрозою виникнення збоїв в екстремальних умовах функціонування СМС. Параметри  $\omega_i = \sum_{j=1}^N (V_{ji} + V_{ij}) / (2NW_i^{\max})$ , де  $W_i^{\max}$  — пропускна здатність вузла, та  $\theta_{ij} = V_{ij} / V_{ij}^{\max}$ , де  $V_{ij}^{\max}$  — пропускна здатність ребра, визначають критичну завантаженість вузлів та ребер системи відповідно,  $i, j = \overline{1, N}$ . Позначимо через  $J_k = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  послідовність вузлів, що лежать на шляху руху потоків, що сполучають вузли  $n_{j_1}$  і  $n_{j_k}$  мережі. Тоді параметр

$$\xi_{J_k} = \sum_{j \in J_k} \omega_j / k + \sum_{j \in J_{k-1}} \theta_{j, j+1} / (k-1)$$

визначає усереднену критичну завантаженість цього шляху, а параметр

$$\xi_{J_k}^{\max} = \max \{ \max_{j \in J_k} \{ \omega_j \}, \max_{j \in J_{k-1}} \{ \theta_{j, j+1} \} \}$$

ідентифікує найбільш загрозливий його елемент. Аналогічним чином визначаються критична завантаженість окремих підсистем та СМС загалом. Визначення умов критичної завантаженості дозволяє завчасно оцінювати ризики процесу функціонування системи та уникати їх, зокрема планувати необхідність збільшення пропускної здатності вузлів та ребер мережі, або у випадку неможливості це зробити, обирати альтернативні або формувати нові шляхи руху потоків.

## РОЗМІРНІСТЬ ТА АДЕКВАТНІСТЬ МОДЕЛЕЙ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Вивчаючи реальні складні системи, ми насправді досліджуємо побудовані на основі спостережень та експериментальних і теоретичних досліджень

моделі цих систем (інформаційні, структурні, функціональні, математичні тощо). Для великих систем, які налічують  $10^6$ – $10^9$  елементів, постає проблема розмірності таких моделей. Якщо процес функціонування кожного елемента такої СМС описується одним рівнянням, у результаті отримуємо систему рівнянь такої ж розмірності. Складність математичних моделей породжується багатофакторністю процесів, які перебігають у системі, адже в реальності одне й те саме явище може бути наслідком багатьох причин та однакові причини у різних умовах можуть призводити до різних наслідків. Зазвичай такі особливості призводять до нелінійності математичних моделей. Знаходити розв'язок багатовимірних нелінійних систем — надскладна проблема навіть для сучасних суперкомп'ютерів [24]. Різноманітні способи зменшення розмірності моделей часто спричиняють втрату їх адекватності. Одним з таких способів є ідеалізація, яка нерідко супроводжується надмірним спрощенням структури системи та процесів, які в них перебігають. Другим способом є декомпозиція, яка часто призводить до нехтування зв'язків досліджуваної складової з іншими системними та позасистемними об'єктами. Окрім того, існують системи, які можна досліджувати лише в цілому (конденсовані середовища [6]), до яких належать і складні мережеві системи. Для багатьох СМС проблемою, яка виникає під час їх досліджень, є неперервна і швидка зміна структури та процесу функціонування. Для таких систем модель, створення або удосконалення якої потребує певного часу, також може втратити свою адекватність.

Поняття складності як для мережевих структур та систем, так і для їх моделей загалом має різний зміст. Складність мережі визначається, зокрема, наявністю великої кількості вузлів та зв'язків між ними. Мережі з порівняно невеликою кількістю елементів (сотні, тисячі і навіть десятки тисяч) зазвичай складними не вважаються. Наукова лабораторія може налічувати десятки співробітників, опорно-руховий апарат людини складається з 206 кісток та 640 м'язів, до складу залізничної транспортної мережі України входить приблизно 1600 вузлів – станцій, кількість вузлів (населених пунктів) її автотранспортної мережі не перевищує 40 тисяч і т.ін. Але ці порівняно невеликі за розміром структури породжують безумовно складні системи [25, 26]. Багато задач моделювання СМ, наприклад керованості або спостережуваності, навіть для випадку найпростіших лінійних моделей поки що вдається розв'язати лише для мереж невеликої розмірності (до сотні елементів) [27, 28].

Натепер лише в англійському сегменті Інтернету налічується понад 1 млрд веб-сайтів та понад 5 млрд веб-сторінок. Більшість із них після початкової стадії активності перестають відвідуватися (архіви великих новинних сайтів містять сотні тисяч сторінок, однак з часом інтерес до них згасає і кількість звертань зменшується до нуля). Серед багатомільйонної аудиторії користувачів соціальних мереж кількість активних не перевищує 10–30% [29]. Активний словниковий запас пересічної англійської людини не перевищує 10 тис. слів, хоча загальна їх кількість сягає півмільйона [30]. Google за запитом може видавати сотні тисяч або мільйони результатів пошуку, але пересічний користувач зазвичай обмежується переглядом кількох десятків або сотень результатів. Можна навести ще чимало прикладів вузлів та зв'язків реальних мереж, які насправді не беруть участі у функціонуванні

системи, тобто не забезпечують рух відповідного типу потоків. Такі елементи СМС називатимемо фіктивними. Поточкова матриця суміжності дає можливість визначати у структурі вихідної СМ (рис. 1, а) фіктивні вузли та зв'язки (рис. 1, б) та видаляти їх (рис. 1, в). Як впливає з наведених прикладів, у багатьох випадках це дозволяє суттєво зменшити розмірність моделі системи без утрати адекватності.

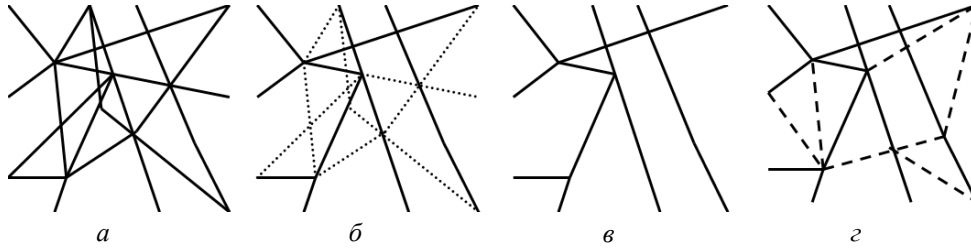


Рис. 1. Фрагмент мережі з фіктивними та прихованими елементами: а — вихідна мережа; б — фіктивні зв'язки; в — мережа без фіктивних зв'язків; г — приховані зв'язки

Поряд з величезними обсягами всесвітньої павутини, веб-сторінки якої індексуються пошуковими системами, існують невидимий і темний Web [31], розміри яких натепер установити не вдається. Якщо в країні існує великий тіньовий сектор, підприємства якого не сплачують податки, це істотно обмежує її бюджетні можливості, спотворює уявлення про реальний стан економіки та перспективи її розвитку. Вузли та зв'язки, які забезпечують рух певного типу потоків у системі, але формально не включені в її структуру, називатимемо прихованими. Саме наявність руху потоків дозволяє виявляти такі елементи СМС. Надалі вважатимемо, що до складу СМ включені лише реальні вузли та зв'язки (рис. 1, г).

Об'єм потоку, який виходить з вузла  $n_i$  у напрямку вузла  $n_j$  за період  $[0, T]$ , визначаємо за співвідношенням

$$w_{ij, \text{out}} = \int_0^T \rho_{ij}(t, x(n_i), y_{ij}(x(n_i))) dt.$$

Нехай потік рухається ребром  $(n_i, n_j)$  із середньою швидкістю  $u_{ij}$  та  $l_{ij}$  — довжина ребра  $(n_i, n_j)$ . Тоді об'єм потоку, який повинен надійти у вузол  $n_j$  з вузла  $n_i$  за період  $[l_{ij}/u_{ij}, T + l_{ij}/u_{ij}]$ , визначаємо за формулою

$$w_{ij, \text{in}} = \int_0^T \rho_{ij}(t + \frac{l_{ij}}{u_{ij}}, x(n_j), y_{ij}(x(n_j))) dt.$$

Порівнюючи значення  $w_{ij, \text{out}}$  і  $w_{ij, \text{in}}$ , можна аналізувати втрати або зростання об'ємів потоків, які виходять з вузла  $n_i$  і повинні надійти у вузол  $n_j$ . Незбіжність цих значень свідчить про наявність прихованих вузлів на ребрі  $(n_i, n_j)$ , які відбирають або додають певні об'єми потоків. Загалом за відсутності прихованих вузлів та зв'язків виконується нерівність  $|w_{ij, \text{out}} - w_{ij, \text{in}}| \leq \varepsilon_{ij}$ , де

$\varepsilon_{ij} \geq 0$ ,  $i, j = \overline{1, N}$ , — природні втрати або набуття (наприклад, зменшення або збільшення вологості транспортованого продукту) об'ємів потоків.

Нехай  $W_{i,\text{in}}$  — сумарний об'єм потоків, який надходить за період  $[0, T]$  у вузол  $n_i$ . Позначимо через  $J_i = \{j_1, j_2, \dots, j_i\}$  сукупність номерів вузлів, пов'язаних з  $n_i$ . Тоді виконання нерівності

$$\left| W_{i,\text{in}} - \sum_{j \in J_i} w_{ji,\text{out}} \right| > \varepsilon_{J_i}, \varepsilon_{J_i} \geq 0,$$

свідчить про наявність прихованих зв'язків вузла  $n_i$ , через які відбувається надходження додаткових об'ємів потоків,  $i = \overline{1, N}$ . Аналогічно можна визначити наявність прихованих елементів, через які відбираються певні об'єми потоків.

Таким чином, урахування руху потоків дає змогу шляхом вилучення зі складу мережі формальних вузлів та зв'язків і введенням «прихованих» елементів скласти більш точне уявлення про структуру системи, водночас зменшуючи розмірність та поліпшуючи адекватність відповідних моделей.

## РІСТ ТА ПЕРЕВАЖНЕ ПРИЄДНАННЯ У БЕЗМАСШТАБНИХ МЕРЕЖАХ

Серед СМ різних типів найбільший інтерес з прикладного погляду становлять безмасштабні мережі [9]. Визначальною особливістю цих мереж поряд зі ступеневим розподілом структурних ступенів вузлів є невелика кількість вузлів, які мають високий ступінь, та величезна кількість вузлів з невисоким ступенем (кількість мегаполісів у кожній країні є невеликою порівняно із загальною кількістю населених пунктів, однак їх значущість у житті країни важко переоцінити). Із безмасштабними мережами пов'язані два важливі поняття, які описують процес їх розвитку [32]. Першим поняттям є ріст, тобто додавання нових вузлів, які пов'язуються з уже існуючими вузлами мережі. Друге важливе поняття — переважне приєднання, яке визначає, що новий вузол з більшою ймовірністю пов'язується з існуючими вузлами мережі з високим структурним ступенем. Загалом запропонована А.Л. Барабаші та Р. Альберт модель розвитку безмасштабних мереж достатньо адекватно відображає процес освоєння нових територій, упровадження новітніх технологій, розширення інфраструктурних, транспортних, торговельних, інформаційних мереж тощо. У той же час у життєвому циклі довільної реальної системи можна виділити принаймні три основні етапи: 1) росту або «дорослішання», який супроводжується розгортанням структури та налагодженням руху потоків; 2) усталеного функціонування або «дорослості», який характеризується злагодженим рухом потоків за майже незмінної структури СМ; на цьому етапі основна увага приділяється нарощуванню об'ємів потоків та підвищенню ефективності функціонування СМС загалом; 3) згортання або «старіння», який характеризується процесами, зворотними до тих, які відбувалися на стадії росту СМС: спочатку зникає необхідність у забезпеченні руху потоків у певні вузли системи, а потім ці вузли та ребра, через



які ці потоки проходили, поступово «відключаються» до повного припинення процесу функціонування СМС. При цьому в багатьох системах насамперед «відключаються» не периферійні вузли, які були приєднані до мережі останніми, а вузли, з яких починався ріст мережі (у пік розвитку такі вузли зазвичай мають найвищий структурний ступінь). Прикладом є розвиток залізничної транспортної системи, яка замінила гужовий транспорт (першими будувалися залізничні колії, які сполучали основні міста країни, та зникла потреба у кінній тязі між ними).

Ріст мережі спонукається необхідністю спрямування потоків у нові вузли. Обставиною, яка доповнює модель Барабаші–Альберт, є той факт, що переважно приєднання нових вузлів у реальних мережах з більшою ймовірністю здійснюється з тими вузлами, через які проходять більші потоки (рис. 2, а). Дійсно, вузол А з більшою ймовірністю встановить зв'язок з вузлом В, якщо через нього проходять значно більші потоки, ніж через вузол С. При цьому структурний ступінь вузла В дорівнює 2, а структурний ступінь вузла С дорівнює 4. У багатьох країнах існують регіони, які після періодів інтенсивного розвитку перейшли в стан депресії (вичерпання покладів корисних копалин, які видобувалися у регіоні; зменшення попиту на продукцію, яка вироблялася у регіоні тощо). У таких регіонах зазвичай залишається розвинена інфраструктура, зокрема щільна транспортна мережа та мережа енергопостачання, але об'єми потоків суттєво скорочуються. Це робить малоімовірним переважно приєднання до вузлів таких складових мережі незалежно від їх структурного ступеня. Тобто зростання або зменшення структурного ступеня вузла безпосередньо залежить від об'ємів потоків, які проходять через цей вузол. Таким чином, функціональний підхід дає змогу прогнозувати напрями розвитку або згортання мережевих структур.

Ріст безмасштабних мереж означає приєднання нових вузлів до вже введених у структуру мережі. Однак виникає потреба у визначенні того, який із двох нових вузлів буде першим уведений у цю структуру, адже налагодження зв'язку інколи потребує значних витрат (побудова доріг, ліній електропередач, трубопроводів тощо). Урахування руху потоків дає однозначну відповідь на це питання: насамперед буде введений вузол, у який (або з якого) передбачається спрямувати більші об'єми потоків (вузол В, рис. 2, б).

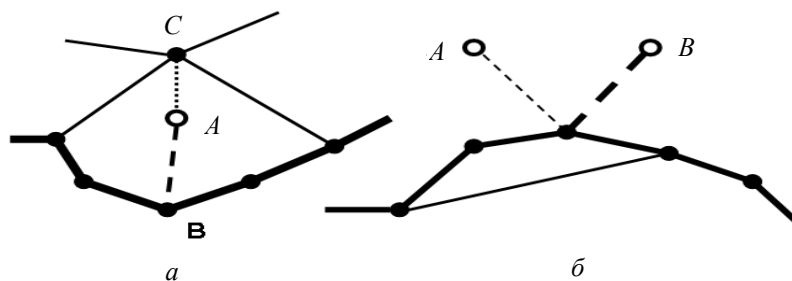


Рис. 2. Ріст та переважно приєднання у безмасштабних мережах (товщина ліній пропорційна об'ємам руху потоків)

Із функціонального погляду важливим є рівень покриття елементів мережі необхідними потоками та можливості мережі таке покриття здійснити.

Уведемо кілька понять, які визначають тенденції розширення та звуження СМС. Нехай  $N$  — кількість вузлів у складі мережі, між якими організовано рух заданого типу потоків, а  $\tilde{N}$  — кількість вузлів, між якими необхідно забезпечити рух цих потоків. Тоді величина  $P_N = \tilde{N}/N$  визначає рівень покриття вузлів рухом потоків заданого типу. Нехай  $M$  — кількість зв'язків, які забезпечують рух заданого типу потоків, а  $\tilde{M}$  — кількість зв'язків, необхідних для залучення тих вузлів мережі, які потребують забезпечення руху цих потоків. Тоді величина  $C_M = \tilde{M}/M$  визначає рівень покриття зв'язками вузлів мережі, необхідних для організації руху заданого типу потоків. Легко бачити, що якщо значення  $P_N > 1$  і  $C_M > 1$ , то СМС перебуває на стадії росту. Ріст мережі завершується, коли значення  $P_N$  і  $C_M$  стануть близькими до 1 і система переходить до стадії «дорослості». Якщо  $P_N < 1$  і  $C_M < 1$ , то СМС перейшла у стадію старіння. Зазвичай процеси, які перебігають у системі, можуть бути значно складнішими, наприклад, звуження мережі в одному напрямку може супроводжуватись її розширенням в іншому.

### **ІЗОЛЬОВАНІ ЗОНИ МЕРЕЖІ ТА ПОШУК АЛЬТЕРНАТИВНИХ ШЛЯХІВ РУХУ**

У реальних мережах часто розгортаються процеси, які необхідно швидко зупинити: розповсюдження епідемій, лісових пожеж, сільськогосподарських шкідників, комп'ютерних вірусів, процесів інвазії тощо. Для запобігання поширенню таких явищ зазвичай використовуються методи теорії перколяції [22], які полягають у послідовному вилученні певної частини вузлів та зв'язків СМ доти, доки перколяційний кластер не розпадеться на незв'язні складові, в одній з яких і міститься загроза. Однак існує ще один спосіб вирішення подібних проблем, який полягає в ізоляції певних частин (зон) мережі. Ізольовані зони часто виникають унаслідок стихійних лих, регіональних військових конфліктів, радіоактивного або хімічного забруднення тощо. Із функціонального погляду ізоляція певної підмережі вихідної СМ означає повне припинення або суттєве обмеження руху потоків з (у, через) неї. Це породжує проблеми, які зумовлюються процесом функціонування СМС загалом. По-перше, в ізольованій зоні можуть міститися вузли-генератори потоків, які потребують свого заміщення. Так, унаслідок землетрусу в Японії 11 березня 2011 р. у районі Фукусіми були зруйнованими майже 40 підприємств – виробників комплектуючих для автомобільної промисловості. У результаті свої конвеєри тимчасово зупинили майже всі японські автовиробники. По-друге, в ізольованій зоні можуть міститися вузли-приймачі потоків, які також потребують свого заміщення. Економічні санкції, які час від часу застосовуються до окремих країн, потребують пошуку нових ринків збуту продукції, яка раніше до них поставлялася. У такому разі країн-виробників цієї продукції очікують багатомільярдні втрати. Нарешті виникає проблема пошуку альтернативних шляхів руху транзитних потоків, які проходили через ізольовану зону. Тобто вилучення окремої підмережі вихідної мережі часто призводить до дестабілізації роботи всієї системи.

На рис. 3, *a* схематично зображено залізничну мережу західного регіону України (відображаються вузли зі структурним ступенем 3 і більшим), частина якої стала недосяжною (сірі ділянки на рис. 3, *б–д*). Із наведених прикладів (рис. 3, *б, в*) випливає, що ізоляція окремих зон СМ призводить до втрати зв'язності мережі (перетину перколяційного порога). Інколи такі заходи є вимушеними і є метою ізоляції. Однак у цьому випадку пошук альтернативних шляхів руху потоків істотно ускладнюється. Якщо ізольована зона не призводить до втрати зв'язності СМ (рис. 3, *г, д*), альтернативні шляхи руху визначають, виходячи з таких міркувань.

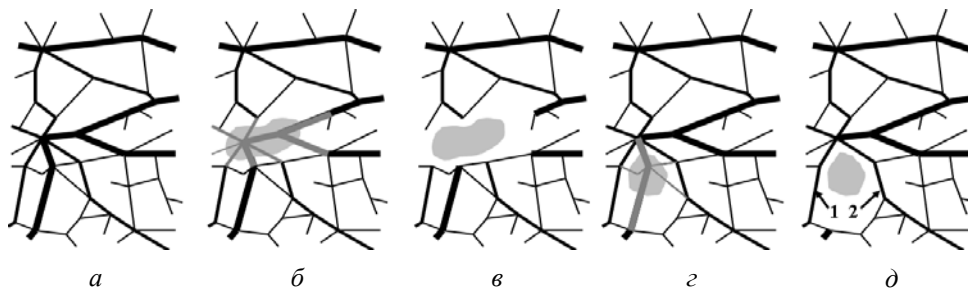


Рис. 3. Ізольовані зони та пошук альтернативних шляхів руху потоків

Зі структурного погляду достатньо знайти принаймні один найкоротший шлях в обхід ізольованої зони, а з функціонального нашою метою є проблема перерозподілу руху потоків. Зазвичай спрямувати всі транзитні потоки по одному найкоротшому шляху фізично неможливо. Це зумовлено обмеженістю пропускної здатності шляхів. У кожній мережевій системі окремі потоки мають різний пріоритет. Цей пріоритет може визначатися типом потоку (міжнародні потяги мають вищий пріоритет ніж приміські), його призначенням, важливістю генератора або приймача потоку тощо. Тоді потоки перерозподіляються за таким алгоритмом: 1) найбільш пріоритетні потоки спрямовуються по найкоротшому шляху поки не вичерпана його пропускна здатність (досягнуто поріг його критичної завантаженості); 2) у міру зменшення пріоритетності потоки спрямовуються по інших (довших) шляхах або із затримкою. Тобто, чим вища пріоритетність потоку, тим коротшим є шлях або меншою затримка його руху. В окремих випадках виникає потреба виводити певні об'єми потоків за найкоротший час з ізольованої зони (евакуація) або вводити в цю зону (гуманітарна допомога, силові підрозділи тощо).

## ВИСНОВКИ

Натепер теорія складних мереж та мережесистем перебуває на стадії становлення. Вона все ще потребує розвитку й узгодження понятійного апарату, осмислення та строгого математичного формулювання задач, які потребують розв'язання та розроблення відповідних методів, розширення і конкретизації прикладних аспектів застосування. У роботі розглянуто лише деякі основні поняття ТСМ та введено їх потокові аналоги. Отримані результати свідчать, що врахування руху потоків у мережі дозволяє наблизити проблематику ТСМ до проблематики відомих системних дисциплін: прово-

дити класифікацію мережевих систем, ідентифікувати цілі їх утворення та розвитку, визначати функції, які сприяють реалізації цих цілей тощо. Визначення потокових характеристик мережі дає змогу в кожному конкретному випадку побудувати потокову модель реальної мережевої системи, своєчасно її коригувати та визначати перспективи розвитку СМС. Потоківі характеристики мережевих систем дозволяють більш реалістично визначати напрями пріоритетного росту і переважного приєднання у безмасштабних мережах та досліджувати процеси функціонування СМС на всіх етапах їх життєвого циклу. Вони також дають можливість зменшувати розмірність моделей СМС та підвищувати їх адекватність, пов'язувати з елементами структури параметри їх функціонування та визначати критично завантажені складові системи. Поєднання структурного та функціонального напрямів дослідження мережевих систем дозволяє розв'язувати важливі задачі, які проблематично розв'язати з використанням лише можливостей ТСМ: ідентифікувати фіктивні та приховані вузли і зв'язки та визначати реальну силу взаємодії між вузлами мережі, здійснювати пошук альтернативних шляхів руху потоків поза ізольованими зонами СМС тощо.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. *Morin E.* On Complexity: Advances in systems theory, complexity, and the human sciences / E. Morin. — New York: Hampton Press, 2008. — 127 p.
2. *Northrop R.B.* Introduction to complexity and complex systems / R.B. Northrop. — Boca Raton: CRC Press, 2011. — 520 p.
3. *Laszlo E.* The Interconnected Universe: Conceptual foundations of transdisciplinary unified theory / E. Laszlo. — New Jersey: World Scientific, 1995. — 166 p.
4. *Johnson S.* Emergence: The Connected lives of ants, brains, cities / S. Johnson. — New York: Scribner, 2001. — 288 p.
5. *Small M.* Dynamics of biological systems / M. Small. — Boca Raton: CRC Press, 2012. — 264 p.
6. *Spickermann C.* Entropies of condensed phases and complex systems / C. Spickermann. — Berlin: Springer, 2011. — 223 p.
7. *Валлерстайн И.* Исторические системы как сложные системы / И. Валлерстайн // Философские перипетии: Вестн. Харьков. гос. ун-та. — 1998. — № 409. — С. 198–203.
8. *Boccaletti S.* Complex networks: Structure and dynamics / S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno et al. // Physics reports. — 2006. — Vol. 424(4). — P. 175–308. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>.
9. *Barabási A.-L.* Linked: the new science of networks / A.-L. Barabási, J. Frangos. — New York: Basic Books, 2002. — 280 p.
10. *Bianconi G.* Bose-Einstein condensation in complex networks / G. Bianconi, A.-L. Barabási // Physical review letters. — 2001. — Vol. 86(24). — 5632. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5632>.
11. *Coutinho B.C.* The Network Behind the Cosmic Web / B. C. Coutinho, S. Hong, K. Albrecht et al. // arXiv:1604.03236 [astro-ph.CO], 12 Apr 2016, 7 p.
12. *de Regt R.* Network analysis of the COSMOS galaxy field / R. de Regt, S. Apuneych, C. von Ferber et al. // arXiv:1707.00978v1 [astro-ph.CO], 4 Jul 2017, 12 p.
13. *Dorogovtsev S.N.* Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW / S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes. — Oxford: Oxford University Press, 2013. — 280 p.
14. *Bornholdt S.* Handbook of Graphs and Networks: From the Genome to the Internet / S. Bornholdt, H.G. Schuster. — New York: Jon Wiley & Sons, 2006. — 396 p.

15. *Caldarelli G.* Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks: From Information Technology to Finance and Natural Science / G. Caldarelli, A. Vespignani. — New York: World Scientific, 2007. — 251p.
16. *Евин И.А.* Введение в теорию сложных сетей / И.А. Евин // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — 2, № 2. — С. 121–141.
17. *Антонов В.А.* Системный анализ / В.А. Антонов. — М.: Высш. шк., 2004. — 456 с.
18. *Scott W.R.* Organizations and organizing: Rational, natural and open systems perspectives / W.R. Scott, G.F. Davis. — London: Routledge, 2015. — 464 p.
19. *Ford L.R.* Flows in networks / L.R. Ford, D.R. Fulkerson. — Princeton: Princeton University Press, 1962. — 152 p.
20. *Li B.* A survey of network flow applications / B. Li, J. Springer, G. Bebis, M. H. Gunes // Journal of Network and Computer Applications. — 2013. — Vol. 36(2). — P. 567–581. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnca.2012.12.020>.
21. *Поліщук Д.О.* Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: I. Опис методики / Д. О. Поліщук, О. Д. Поліщук, М. С. Яджак // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2015. — № 1. — С. 21–31.
22. *Головач Ю.* Складні мережі / Ю. Головач, О. Олємской, К. фон Фербер та ін. // Журнал фізичних досліджень. — 2006. — 10, № 4. — С. 247–289.
23. *Novikov A.V.* Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis / A.V. Novikov, E.N. Benderskaya // Pattern Recognition and Image Analysis. — 2014. — Vol. 24(3). — P. 365–371. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054661814030146>.
24. *Суперкомпьютер* несколько месяцев создавал модели спиральных галактик [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://hyser.com.ua/tehnology/superkompyuter-neskolko-mesyatsev-sozdaval-modeli-spiralnyh-galaktik-200853>.
25. *Демидюк М.* Задачі математичного моделювання ходи людини з урахуванням біомеханічних експериментальних даних / М. Демидюк, Б. Литвин // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2012. — Вип. 10. — С. 123–134.
26. *Polishchuk D.* About evaluation of complex dynamical systems / D. Polishchuk, O. Polishchuk // Journal of Complex Systems. — 2013, Article ID 204304, 6 p. — Available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/204304>.
27. *Lombardi A.* Controllability analysis of networks / A. Lombardi, M. Hörnquist // Physical Review E. — 2007. — Vol. 75(5). — 056110. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.056110>.
28. *Sedoglavic A.* A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time / A. Sedoglavic // Proc. of the 2001 Intern. Symp. on Symbolic and algebraic computation. — 23–29 July 2001. — P. 309–317. DOI: <https://doi.org/10.1145/384101.384143>.
29. *Prell C.* Social Network Analysis: History, Theory and Methodology / C. Prell. — New York: SAGE, 2012. — 263 p.
30. *Francis W.N.* Frequency Analysis of English Usage / W.N. Francis, H. Kucera. — Boston: Houghton Mifflin, 1982. — 213 p.
31. *Price G.* The Invisible Web: Uncovering Information Sources Search Engines Can't See / G. Price, C. Sherman. — New York: CyberAge Books, 2001. — 147 p.
32. *Albert R.* Statistical mechanics of complex networks / R. Albert, A.-L. Barabasi // Review of Modern Physics. — 2002. — Vol. 74 (1). — 47. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47>.

Надійшла 08.02.2018