

**МЕРЕЖЕВІ СТРУКТУРИ ТА СИСТЕМИ:
II. СЕРЦЕВИНИ МЕРЕЖ ТА МУЛЬТИПЛЕКСІВ**

О.Д. ПОЛИЩУК, М.С. ЯДЖАК

Анотація. Уведено поняття потокової серцевини мережевої системи та проаналізовано функціональні переваги її структури порівняно із серцевиною складної мережі. Показано, що потокові серцевини дозволяють будувати значно адекватніші з функціонального погляду моделі мережевих систем, ніж серцевини складних мереж. Це продемонстровано на прикладі практично важливих задач керованості, спостережуваності та синхронізації складних мереж. На підставі аналізу структур реальних систем запропоновано узагальнене визначення мультиплексу та введено поняття його ядра. Розглянуто низку задач моделювання мультиплексів і встановлено, що ефект «тісного світу» у них посилюється. Побудовано потокову матрицю суміжності системи мультиплексного типу. На її основі визначено деякі локальні та глобальні характеристики мультиплекс-системи і досліджено властивості її потокової серцевини. Проаналізовано способи зменшення розмірності моделей мультиплекс-систем з одночасним відстеженням кількісної міри збереження їх адекватності.

Ключові слова: складна мережа, мережева система, потік, мультиплекс, модель, серцевина, ядро.

ВСТУП

Під час дослідження складних мережевих систем (СМС) виникає проблема розмірності їх моделей. Складні мережі (СМ) можуть налічувати мільйони та мільярди елементів (вузлів і ребер, що їх поєднують) [1]. Кількість процесів, які перебігають у системах з такою структурою, є принаймні на порядок більшою [2]. Зазвичай основний спосіб вирішення проблеми розмірності полягає у спрощенні моделі завдяки відкиданню найменш важливих з погляду дослідника елементів [3]. Однак у разі такого спрощення виникає проблема збереження адекватності моделі. У праці [4] розглянуто один з варіантів зменшення розмірності моделі без утрати її адекватності, який полягає у видаленні зі структури системи фіктивних вузлів та зв'язків. Ще один спосіб спрощення моделей СМ — уведення поняття k -серцевини мережі [5], тобто найбільшої підмережі вихідної СМ, усі вузли якої мають структурний ступінь не менший за k , та вилученні зі структури мережі вузлів зі ступенем, що менший за k [6]. Використання поточкових характеристик СМС [4] дозволяє ввести поняття потокової серцевини мережевої сис-

теми. Потоків серцевини СМС дають змогу будувати функціонально значно адекватніші спрощені моделі мереж, ніж їх k -серцевини.

Будь-яка реальна система є відкритою, тобто вона взаємодіє з іншими системами [7]. Одними з різновидів міжсистемних взаємодій є мультиплекси [8], у яких вузли однієї мережі можуть одночасно бути вузлами багатьох інших мереж. Так, кожна країна є об'єктом (або вузлом) міжнародної політичної, економічної, військової, безпекової, культурної, спортивної співпраці і т.ін. Кожне місто країни є вузлом кількох транспортних мереж різних типів, мереж державного та місцевого управління, економічних та фінансових мереж тощо. Кожна людина також є вузлом багатьох мереж (родинної, професійної, соціальної, релігійної і т.ін.). Кожну мережу, яка є складовою мультиплексу, називають шаром. Наведені приклади показують, що між вузлами окремих мережевих шарів існують різні види взаємодій. Ці взаємодії можуть мати різну природу, призначення та матеріальний носій. Оскільки кожна мережа є структурою певної мережевої системи [4], то один і той же вузол мультиплексу є елементом багатьох систем і реалізує в них різні функції. Під час дослідження мультиплексів також використовується поняття k -серцевини [9, 10] як поєднання k -серцевин окремих шарів-мереж. Уводимо поняття ядра мультиплексу як структури та потокової серцевини мультиплексу як системи взаємодіючих у процесі свого функціонування шарів — мережевих систем. Ці поняття дозволяють спрощувати моделі системних взаємодій мультиплексного типу.

Мета роботи — визначити, наскільки поняття потокової серцевини мережі дає змогу спростити дослідження мережевих систем і мультиплекс-систем та зменшити розмірності їх моделей без утрати адекватності.

СЕРЦЕВИНИ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ ТА МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Нехай до складу мережі входить N вузлів. У праці [4] визначено потокову матрицю суміжності мережевої системи $\mathbf{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^N$ за співвідношенням $f_{ij} = V_{ij} / \max_{m,l=1,N} \{V_{ml}\}$, $f_{ij} \in [0,1]$, де V_{ij} — об'єм потоку, який проходить із вузла n_i у вузол n_j за проміжок часу $[0, T]$, $i, j = \overline{1, N}$. Позначимо $\mathbf{F}^* = \{f_{ij}^*\}_{i,j=1}^N$, де $f_{ij}^* = f_{ji}^* = (f_{ij} + f_{ji})/2$, $f_{ij}^* \in [0, 1]$, $i, j = \overline{1, N}$. Визначимо потокову λ -серцевину СМС як найбільшу підмережу вихідної мережі, для якої усі елементи матриці \mathbf{F}^* мають значення, не менші за λ , де $\lambda \in [0, 1]$. Невеликий фрагмент реальної автотранспортної мережі великого міста схематично зображено на рис. 1, а; цей же фрагмент з відображенням об'ємів руху потоків, величина яких є пропорційною до товщини ліній, — на рис. 1, б, 4-серцевину фрагмента СМ та потокову 0,9-серцевину відповідної складової СМС — на рис. 1, в, г. Очевидно, що структури цих серцевин істотно відрізняються, причому потокова λ -серцевина СМС містить значно важливішу інформацію для системних досліджень, ніж k -серцевина її структури. Так, вилучення вузла B зі структурним ступенем 3, який лежить на шляху інтенсивного руху великих об'ємів потоків, призведе до значно біль-

ших проблем у функціонуванні транспортної системи (перерозподілу потоків альтернативними шляхами), ніж вилучення вузла A зі структурним ступенем 4. Зазначимо, що розмірність λ -серцевини зі значеннями λ , близькими до 1, зазвичай значно менша за розмірність k -серцевини з великим значенням k .

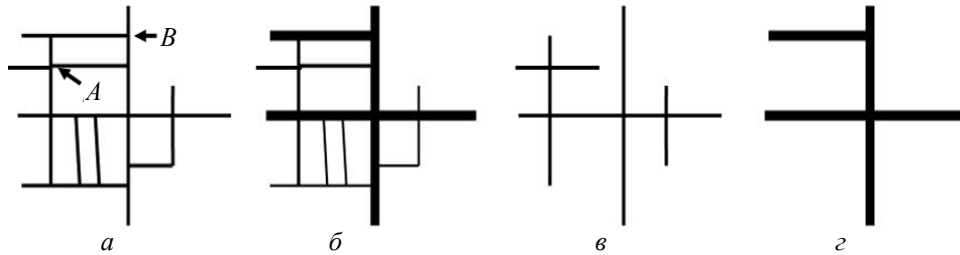


Рис. 1. Фрагмент складної мережі (а), мережевої системи (б), їх 4-серцевини (в) та потокової 0,9-серцевини (г)

Вирішення проблеми розмірності моделей великих СМ можна спростити, досліджуючи не всю мережу, а лише її λ -серцевину. При цьому, чим більшою є питома вага λ -серцевини в системі, тим адекватніший результат дослідження. Можна використовувати різні способи визначення питомої ваги λ -серцевини у вихідній мережі, наприклад, рівні покриття λ -серцевиною її вузлів та/або зв'язків.

Уведемо потокову матрицю суміжності λ -серцевини $\mathbf{F}_\lambda^* = \{f_{ij}^{*,\lambda}\}_{i,j=1}^N$ за співвідношенням

$$f_{ij}^{*,\lambda} = \begin{cases} f_{ij}^*, & \text{якщо } f_{ij}^* \geq \lambda; \\ 0, & \text{якщо } f_{ij}^* < \lambda; \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Для визначення питомої ваги λ -серцевини використовуватимемо параметр σ_λ , що визначає відношення об'ємів потоків, які проходять λ -серцевиною, до об'ємів потоків, які проходять мережею загалом за період $[0, T]$, тобто

$$\sigma_\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}^{*,\lambda}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}^*}.$$

Оскільки основною метою більшості мережевих систем є забезпечення руху певного типу потоків [4], то параметр σ_λ кількісно визначає наскільки λ -серцевина забезпечує реалізацію цієї мети. Якщо замість моделі всієї системи досліджувати модель її λ -серцевини, то значення параметра σ_λ можна інтерпретувати як міру адекватності цієї моделі. Позначимо через λ_{\min} мінімальне, відмінне від 0, значення f_{ij}^* , $i, j = \overline{1, N}$. Якщо значення $\sigma_{\lambda_{\min}}$ близьке до 1, то це означає, що потоки рівномірно розподілені мережею, тобто її λ_{\min} -серцевина загалом збігається з вихідною СМ. Чим більше значення σ_λ наближене до 1 за значень λ , близьких до 1, тим меншою є частина СМС, у якій зосереджені основні об'єми потоків. У цьому випадку дослідження можна зосередити насамперед на цій частині системи (рис. 2).

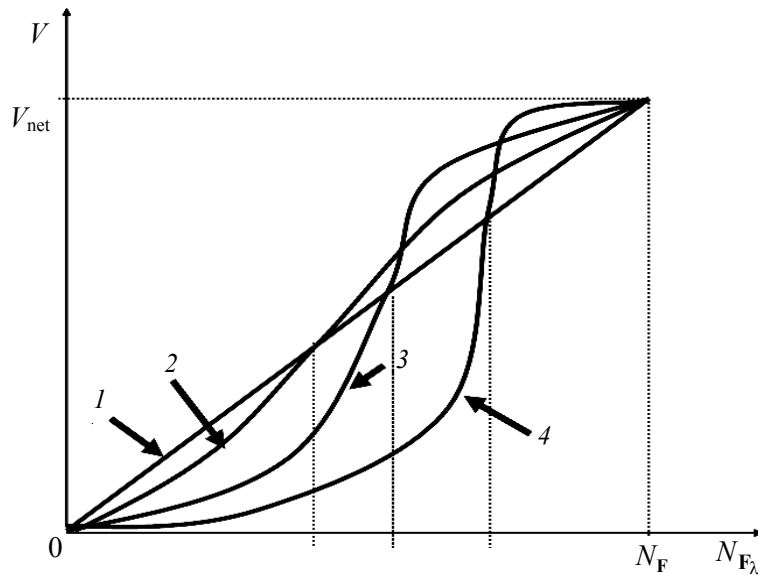


Рис. 2. Графіки розподілу об'ємів потоків у λ -серцевинах мережевих систем: V — об'єм потоків; V_{net} — сумарний об'єм потоків у мережі; $N_{F\lambda}$ — кількість зв'язків λ -серцевини мережі (кількість ненульових елементів потокової матриці суміжності λ -серцевини); N_F — сумарна кількість зв'язків мережі (кількість ненульових елементів потокової матриці суміжності мережі)

Зв'язки мережі впорядковані за ознакою збільшення об'ємів потоків. Лінія 1 відповідає випадку, коли потоки рівномірно розподілені ребрами мережі, лінії 2–4 — випадкам, коли потоки нерівномірно розподілені ребрами мережі, зокрема лінія 4 визначає, що основна маса потоків рухається у невеликій підмережі вихідної мережі.

Таким чином, виділення та дослідження потокової серцевини СМС порівняно з дослідженням усієї мережі дозволяє зменшити розмірність задачі завдяки відкиданню функціонально найменш важливих вузлів та зв'язків, що не призводить до значних збоїв у роботі системи. Унаслідок цього дослідження мережі зводиться до аналізу або математичного моделювання найбільш пріоритетних її підструктур. У людському організмі серцево-судинна система включає в себе як основні, так і периферійні вени та артерії. Розрив однієї з основних судин може призвести до швидкого летального кінця. У великому місті перекриття основних автомагістралей може спричинити колапс усієї його транспортної системи. Аварії на магістральних лініях електропередач під час стихійних лих часто призводили до відключення від електроенергії цілих регіонів країни. Однак це не означає, що зв'язки з малим значенням λ можна повністю ігнорувати. Невеликі населені пункти також потрібно забезпечувати продуктами, транспортом, фінансовими, медичними, освітніми та іншими послугами, незважаючи на незначні об'єми потоків. Наприклад, перекриття периферійних судин зумовлює розвиток некротичних явищ в органах людського тіла. У людському соціумі та у фізичному світі важливими є слабкі взаємодії, завдяки яким можливе існування мереж «тісного світу» [11]. Для кожної реальної СМС можна знайти таке значення λ_i , яке поділяє множину всіх зв'язків мережі на підмножини сильних та слабких взаємодій (λ_i -серцевину та її доповнення) і досліджувати

реальний вплив слабких взаємодій на процес функціонування системи. Ітераційне дослідження поточкових серцевин СМС із послідовним зменшенням значення λ дозволяє спростити цей процес, зосереджуючись насамперед на найбільш важливих ділянках системи. Інший шлях визначення поточної серцевини СМС полягає у включенні до її структури лише тих вузлів мережі, які мають поточковий ступінь не менший за наперед визначене значення [4]. Недоліком такого підходу в окремих випадках є неоднозначність визначення зв'язків між вузлами такої серцевини.

РОЗМІРНІСТЬ ТА АДЕКВАТНІСТЬ МОДЕЛЕЙ ПОТОКОВИХ СЕРЦЕВИН СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Модель СМС для дослідження найбільш пріоритетних її підсистем можна спростувати шляхом вилучення не тільки фіктивних та найменш пріоритетних з функціонального погляду вузлів і зв'язків, які входять до складу мережі, але й вузлів-посередників. Найпростішим прикладом вузла-посередника є вузол зі структурним ступенем 2, у якому не відбувається відбору або додавання нових об'ємів потоків. Нехай маємо деяку вихідну мережу (рис. 3, *а*). Тоді, взявши її поточкову 0,5-серцевину (рис. 3, *б*) та 3-серцевину цієї 0,5-серцевини (рис. 3, *в*), отримуємо підмережу вихідної СМ, яка містить лише ті елементи, які важливі для дослідження системи без вузлів-посередників. Такі структури називатимемо $\lambda(k)$ -серцевинами (на рис. 3, *в* зображено 0,5(3)-серцевину вихідної СМС). Спрощуючи моделі систем, слід враховувати, що оброблення потоку у вузлі-посереднику може бути досить складним процесом [12]. Дестабілізація роботи такого вузла може зупинити рух усіх потоків на шляхах, які проходять через цей вузол. Однак загалом вилучення таких вузлів суттєво зменшує розмірність моделей СМС майже без втрати їх адекватності (17 вузлів та 33 ребра у моделі, зображеній на рис. 3, *а*, та 5 вузлів і 15 ребер у моделі — на рис. 3, *в*).

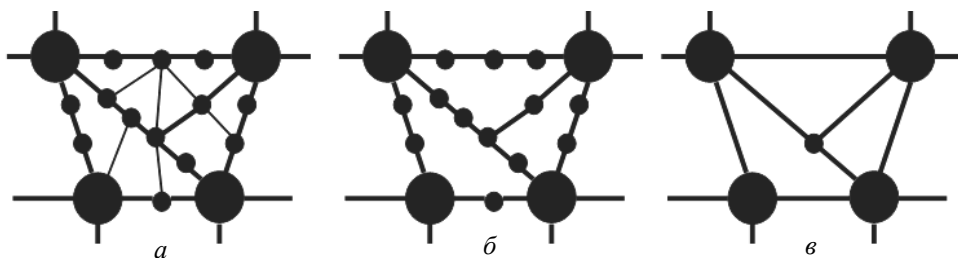


Рис. 3. Моделі фрагмента СМС та її λ - і $\lambda(k)$ -серцевин: *а* — вихідна мережа; *б* — 0,5-серцевина; *в* — 0,5(3)-серцевина

Залізничну мережу західного регіону України без вузлів-посередників схематично зображено на рис. 4, *а*. Ця мережа містить 29 вузлів та 62 ребра (загалом у ній 354 вузли). На рис. 4, *б* зображено 0,7(3)-серцевину цієї системи, яка забезпечує понад 80% усіх перевезень, на рис. 4, *в* — доповнення до цієї серцевини, яке забезпечує менше ніж 20% перевезень. Зазначимо, що 0,7(3)-серцевина цієї системи є зв'язною мережею, тоді як її доповнення — незв'язною мережею. При цьому розмірність 0,7(3)-серцевини СМС, яка нараховує 4 вузли та 12 зв'язків, є меншою, ніж розмірність її доповнення

(8 вузлів та 27 зв'язків). Подібне явище спостерігається у багатьох природних та штучних СМС. Утрата зв'язності λ -серцевини зі зростанням значення λ дозволяє виділяти із СМС спільноти, рух потоків у яких, тобто сила зв'язку між елементами яких, є значно сильнішою, ніж між іншими складовими мережі. Очевидно, що видалення частини λ -серцевини СМС з великим значенням λ значно більше дестабілізує роботу системи, ніж видалення частини її доповнення. При цьому недосяжність навіть невеликої частини λ -серцевини може призвести до невирішуваних проблем (наприклад, втрати зв'язності мережі) з пошуку альтернативних шляхів руху потоків (рис. 4, з) [4].

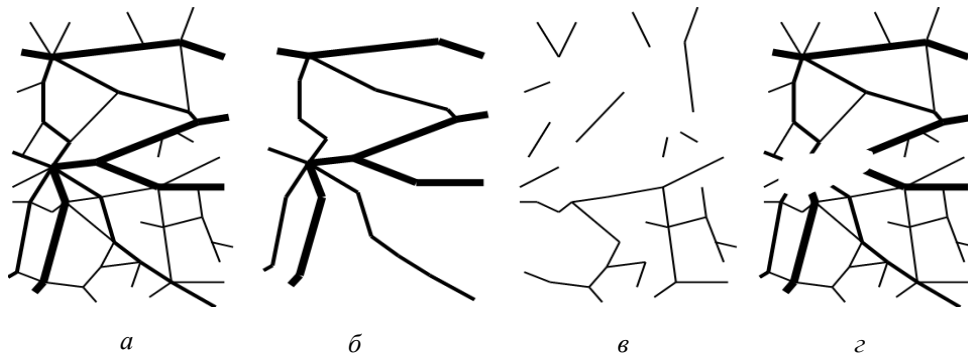


Рис. 4. Фрагмент залізничної мережі та її 3(0,7)-серцевини

Розмірність моделей СМС відіграє вагомую роль у розв'язанні багатьох важливих задач моделювання складних мереж та мережевих систем: керуваності, спостережуваності, синхронізації [13–15] тощо. Серед найважливіших проблем керуваності СМС можна назвати боротьбу з розгортанням так званих каскадних явищ або, навпаки, сприяння цьому процесу [16], спрямування потоків по альтернативних шляхах, динамічну синхронізацію руху потоків, швидку адаптацію до зміни графіка руху в системах із повністю або частково впорядкованим рухом, розширення та звуження мережі залежно від стадії її життєвого циклу тощо. Натепер задачі керуваності та спостережуваності складних мереж обмежуються найпростішими лінійними моделями для орієнтованих щільних однорідних мереж [13, 14]. Навіть за допомогою числових методів установити виконання критерію Калмана вдається лише для лінійних моделей СМ, кількість вузлів яких обмежується кількома десятками [17, 18]. Тому зменшення розмірності задач керуваності та спостережуваності стає вирішальним для можливого їх розв'язання, яке доцільно починати з $\lambda(k)$ -серцевини СМС з великими значеннями k і λ . Так, для наведеного вище прикладу залізничної мережі, до складу якої входить 354 вузли, задачі керуваності та спостережуваності розв'язати не вдається. Однак для її 0,7(3)-серцевини, яка складається лише з 4 вузлів та 12 зв'язків, розв'язок цих задач знайти досить просто. Ще однією важливою проблемою, пов'язаною із задачами керуваності та спостережуваності, є визначення таких значень λ_C і λ_O , для яких λ_C -серцевина та/або λ_O -серцевина СМС втрачають свою повну керуваність або спостережуваність відповідно. Очевидно, що якщо некеруваною (неспостережуваною) є певна $\lambda(k)$ -серцевина СМС, то некеруваною (неспостережуваною) є і система загалом.

Аналітичні або геометричні методи розв'язання задач керованості та спостережуваності СМ обмежуються пошуком мінімальної кількості вузлів, управління якими є достатнім для забезпечення повної або часткової керованості мережі, або мінімальної кількості вузлів-сенсорів, які забезпечують її спостережуваність. У праці [13] припускається, що такими СМ можуть керувати вузли з високим структурним ступенем, тобто їх k -серцевини з великим значенням k . Ці вузли також пропонується розглядати як вузли спостереження [14]. Однак з функціонального погляду та самої постановки задачі впливає, що як вузли керування доцільно обирати вузли-генератори потоків, а як вузли спостереження — вузли-приймачі потоків. Найпростішою ознакою вузла-генератора є переважання об'ємів вихідних потоків над об'ємами вхідних, а вузла-приймача — навпаки. Однак таке визначення є далеко неоднозначним. Наприклад, у великих металургійних центрах об'єми вхідних потоків (сировини) значно перевищують об'єми вихідних (готової продукції). Подібну ситуацію можна спостерігати у містах-виробниках високотехнологічної продукції. З огляду на наведене визначення ці вузли є приймачами потоків. Але якщо за ознаку «об'єму потоку» вважати його вартість, то згадані вище вузли стають генераторами потоків. Таким чином, залежно від заданої ознаки об'єму потоку один і той же вузол може бути як генератором, так і приймачем потоків, тобто як вузлом керування, так і вузлом спостереження.

Рух потоків у мережі є динамічним процесом і потребує динамічної синхронізації. При цьому синхронізація СМ є необхідною, але не достатньою умовою для синхронізації мережевої системи. У відомих моделях синхронізації [19–21] зазвичай використовують сам факт взаємозв'язку між вузлами, який визначається елементами матриці суміжності мережі. Утім не менш важливою для адекватності моделі синхронізації є точність визначення сили цього взаємозв'язку. Потоківі характеристики СМС та врахування впорядкованості руху потоків дозволяють удосконалити відомі моделі синхронізації складних мереж [22]. У таких моделях синхронізація системи забезпечується синхронізацією об'ємів потоків, які рухаються мережею, а сила зв'язку між вузлами набуває предметного змісту.

Розповсюдження епідемій зазвичай відбувається на шляхах найбільш інтенсивного пересування великих мас людей, а розповсюдження комп'ютерних вірусів найбільш імовірно на шляхах найбільш інтенсивного інформаційного трафіку. Потоківі серцевини СМС з великими значеннями λ визначають найбільш імовірні шляхи поширення таких процесів. Тому, ізолюючи певні зони мережі [4], особливу увагу потрібно приділяти саме цим складовим СМС.

МУЛЬТИПЛЕКС-СТРУКТУРИ ТА МУЛЬТИПЛЕКС-СИСТЕМИ

Мультиплекси є найбільш поширеним видом міжсистемних взаємодій. Транспортна система країни — це відомий та зрозумілий приклад мультиплексу. Окремі мережеві шари цієї структури утворюють транспортні системи різного типу — залізничні, автомобільні, авіаційні, морські та річкові, вузлами яких є окремі населені пункти. Лінгвістичні (мовні) мультиплекси, вузлами яких є окремі особи, утворюють різномовні групи населення Землі.

Мультиплекси соціальних мереж, вузлами яких є окремі їх користувачі, є поєднанням глобальних (Facebook, Twitter, LinkedIn, pinterest, Google Plus і т.ін.) та локальних (UkrOpen, ukrface, українці тощо) соціальних мереж. Мультиплекси є динамічними структурами. Поява нового виду взаємодій між вузлами мереж, які входять до складу мультиплексу, породжує новий його шар. Навпаки, якщо якийсь вид взаємодій зникає, то зникає і відповідний шар. Часто новий шар та відповідний вид взаємодій розширюють можливості існуючих зв'язків у мультиплексі (стаціонарний та мобільний телефонний зв'язок, пошта та E-mail). Отже, у більшості випадків різні мережеві шари мультиплексу мають різний склад вузлів та структуру зв'язків. Тому, узагальнюючи відоме визначення [8], мультиплексом або M -структурою називатимемо поєднання кількох взаємодійних мереж, перетин множин вузлів яких є непорожнім. Ядром мультиплексу називатимемо мережу, яка складається з вузлів та зв'язків, що входять до кожного мережевого шару M -структури (рис. 5 — чорним позначено вузли, які належать ядру мультиплексу, сірим — вузли, які належать лише частині мережевих шарів). Кожний вузол ядра мультиплексу є «точкою переходу» з довільного шару мережі на будь-який інший шар.

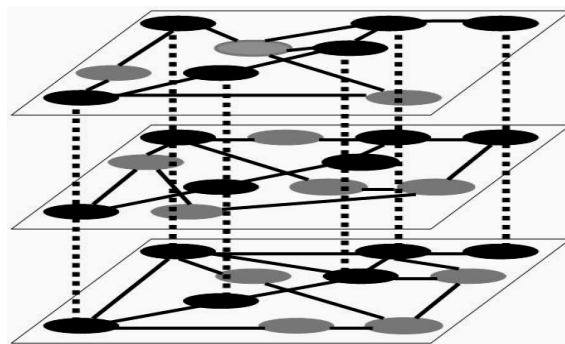


Рис. 5. Фрагмент мультиплексу та його ядра

Під час дослідження M -структур виникає багато важливих проблем: існування шляху з довільного вузла одного шару у довільний вузол іншого шару, побудова найкоротших шляхів руху через мультиплекс (зміна видів транспорту може суттєво пришвидшити час руху пасажирів та вантажів); пошук альтернативних шляхів через інші мережеві шари під час ізоляції певної зони в окремому мережевому шарі (використання метрополітену у великих містах у разі виникнення заторів на автошляхах) [4]; протидія розповсюдженню епідемій, комп'ютерних вірусів тощо, які через мультиплексні взаємодії можуть поширюватися значно швидше, ніж в одному шарі. Здатність переходу через вузли ядра з одного мережевого шару на інший і навпаки розширює можливості доступу до вузлів, недосяжних в окремих шарах-мережах, та дозволяє здійснювати зв'язок між незв'язними складовими таких шарів. Окремим питанням є явище «тісного світу» у мультиплексі, оскільки більшість реальних складних мереж мають цю властивість. Мережі «тісного світу» характеризуються малою середньою довжиною шляху l між вузлами та високим ступенем кластеризації C . Загалом залежно від типу мережі параметр l є обернено пропорційний, а параметр C прямо пропорційний деякій додатній монотонно зростаючій функції від середньої

кількості зв'язків вузла мережі [11]. Навіть не вважаючи міжшарові взаємодії додатковими зв'язками вузла та відкидаючи дублювальні його зв'язки у тих шарах мультиплексу, до яких він належить, отримуємо більшу середню кількість зв'язків вузла у M -структурі, ніж в окремо взятому шарі. Це означає, що ефект «тісного світу» у мультиплексі лише посилюється.

Нехай мультиплекс складається з M шарів-мереж, S_m — множина вузлів його m -го шару, N_m — їх кількість, $m = \overline{1, M}$; $S = \bigcup_{m=1}^M S_m$ — загальна множина вузлів M -структури і N_S — кількість цих вузлів. Різні вузли мультиплексу зазвичай мають різне значення у M -структурі. В окремому мережевому шарі структурний ступінь вузла визначається кількістю його зв'язків з іншими вузлами цього шару. Структурний мультиплексний ступінь вузла визначатимемо за кількістю мережевих шарів, до складу яких він входить. Позначимо через $K_M = \bigcap_{m=1}^M S_m$ множину вузлів ядра мультиплексу, а через N_K — кількість цих вузлів. Питому вагу ядра у m -му шарі визначаємо параметром $\eta_m = N_K / N_m$, а питому вагу ядра у мультиплексі — параметром $\eta_M = N_K / N_S$. Очевидно, що параметр η_m визначає кількісну міру можливості взаємодій m -го шару з іншими шарами M -структури, $m = \overline{1, M}$, а параметр η_M — загальну кількісну міру можливості міжшарових взаємодій у мультиплексі. Можна ввести ще ряд інших параметрів мультиплексу, які визначають структурні особливості його вузлів, мережевих шарів і M -структури загалом (переважне приєднання, кластеризація тощо).

Кожний мережевий шар мультиплексу відображає структуру певної мережевої системи. Мультиплекс-системою (M -системою) називатимемо сукупність мережевих шарів-систем, структури яких поєднані у M -структуру, які спільно функціонують для забезпечення руху певного типу потоків. Таким чином, M -структура породжує M -систему лише у разі можливості переходу потоку з довільного шару мультиплексу на інший і навпаки. Такою мультиплекс-системою є вже згадана вище транспортна система країни, потоками в якій є пасажери та/або вантажі, M -систему породжує мультиплекс соціальних мереж і т. ін. Носії потоків у різних шарах M -системи можуть бути однотипними, як у соціальних мережах, або різнотипними, як у транспортному мультиплексі.

Як і у випадку мережевих систем [4], процес функціонування M -системи для загальної сукупності вузлів S_M можна описати її потоковою матрицею суміжності $\mathbf{F}_M = \{\mathbf{F}_{ij}\}_{i,j=1}^{N_S}$. Блоки $\mathbf{F}_{ij} = \{f_{ij}^{km}\}_{k,m=1}^M$, $i, j = \overline{1, N_S}$, цієї матриці визначаються таким чином. Для випадку $i = j$ блоки $\mathbf{F}_{ii} = \{f_{ii}^{km}\}_{k,m=1}^M$ є поточковими матрицями суміжності міжшарових взаємодій для i -го вузла загальної сукупності вузлів M -системи, $i = \overline{1, N_S}$. Ці блоки є нульовими матрицями, якщо вузол належить лише одному системному шару. Оскільки зв'язки-петлі у M -структурі виключаються, то елементи f_{ii}^{mm} , $m = \overline{1, M}$, матриці \mathbf{F}_{ii} також є нульовими. Інші значення f_{ii}^{km} дорівнюють об'ємам потоків, які з i -го вузла k -го шару надходять в i -й вузол m -го шару

M -системи за період $[0, T]$, $k, m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N_S}$. Для випадку $i \neq j$ блоки $\mathbf{F}_{ij} = \{f_{ij}^{km}\}_{k,m=1}^M$ і $\mathbf{F}_{ji} \in$ потоковими матрицями суміжності вихідних та вхідних внутрішньосферних взаємодій для i -го вузла загальної сукупності вузлів у різних шарах M -системи відповідно, $i, j = \overline{1, N_S}$. При цьому, оскільки у M -системі різні вузли різних шарів не взаємодіють, то $f_{ij}^{km} = 0$ для $k \neq m$, $k, m = \overline{1, M}$, тобто матриці \mathbf{F}_{ij} і \mathbf{F}_{ji} , $i, j = \overline{1, N_S}$, є діагональними. Елементи f_{ij}^{mm} потокової матриці суміжності m -го системного шару $\mathbf{F}^{(m)} = \{f_{ij}^{mm}\}_{i,j=1}^{N_m}$, $m = \overline{1, M}$, визначають об'єми потоків, які проходять між вузлами цього шару за період $[0, T]$. Як і в разі формування потокової матриці суміжності мережевої системи [4], елементи матриці \mathbf{F}_M нормуються шляхом ділення на максимальне значення об'ємів потоків, які проходять між довільними двома вузлами M -системи за період $[0, T]$, тобто $f_{ij}^{km} \in [0, 1]$, $k, m = \overline{1, M}$, $i, j = \overline{1, N_S}$.

Уведемо деякі потокові характеристики, які визначають особливості функціонування складових M -системи. Потоковий ступінь i -го вузла ϕ_i^m у m -му системному шарі визначається об'ємами потоків, які проходять через нього у цьому шарі за період $[0, T]$ [4], тобто

$$\phi_i^m = \left(\sum_{j=1}^{N_m} (f_{ij}^{mm} + f_{ji}^{mm}) \right) / (2N_m), \quad i = \overline{1, N_m}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Потоковий мультиплексний ступінь i -го вузла ψ_i визначається об'ємами потоків, які проходять через нього в інші шари M -системи і у зворотному напрямку за період $[0, T]$, тобто

$$\psi_i = \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ii}^{km} / M^2, \quad \psi_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N_S}.$$

Аналогічно [4] можемо визначити внутрішньосферову та міжшарову функціональну важливість вузлів і зв'язків M -системи, а також рівень їх критичної завантаженості.

Для M -системи розглянемо підсистему, структура якої є ядром відповідної M -структури. Цю підсистему називатимемо K -системою. Потокова матриця суміжності K -системи $\mathbf{F}_K = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{N_K}$ легко визначається з описаної вище матриці \mathbf{F}_M . Визначаємо сумарні об'єми потоків V_M , які проходять M -системою за період $[0, T]$, за співвідношенням

$$V_M = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ij}^{km},$$

а сумарні об'єми потоків V_K , які проходять її ядром, — співвідношенням

$$V_K = \sum_{i=1}^{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ij}^{km}.$$

Параметр $\vartheta_{KM} = V_K / V_M$ визначає питому вагу K -системи у процесі функціонування M -системи або, інакше кажучи, дозволяє відстежувати

кількісну міру адекватності моделі K -системи порівняно з моделлю всієї системи. Якщо значення Θ_{KM} близьке до 1, то замість моделі M -системи доцільно досліджувати модель K -системи, зменшуючи при цьому розмірність вихідної моделі без істотної втрати її адекватності. Якщо ж значення Θ_{KM} близьке до 0, то можна зробити висновок, що системні шари M -системи слабо взаємодіють, а отже, їх можна досліджувати незалежно, розділяючи вихідну модель на M моделей меншої розмірності.

Визначаємо сумарні об'єми потоків V_m , які проходять у m -му шарі M -системи за період $[0, T]$, за співвідношенням

$$V_m = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} f_{ij}^{mm},$$

а сумарні об'єми потоків $V_{K,m}$, які проходять у m -му шарі K -системи за період $[0, T]$:

$$V_{K,m} = \sum_{i=1}^{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} f_{ij}^{mm}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Параметр $\theta_m = V_{K,m} / V_m$ визначає питому вагу m -го шару K -системи у процесі функціонування цього шару в межах усієї системи. Зокрема, якщо значення θ_m близьке до 1, то без істотної втрати адекватності можна замість моделі всього системного шару досліджувати модель його проекції на ядро. Якщо ж значення θ_m , $m = \overline{1, M}$, близьке до 0, то можна зробити висновок, що цей шар бере незначну участь у функціонуванні M -системи і його можна вилучити з її моделі.

Сумарні об'єми потоків, які рухаються окремим шаром, є локальною характеристикою цього шару в M -системі. Глобальною характеристикою системного шару можна вважати сумарні об'єми потоків, які проходять через його вузли в інші шари M -системи та у зворотному напрямку. Визначаємо сумарні об'єми міжшарових потоків m -го шару $V_{I,m}$ за період $[0, T]$ за співвідношенням

$$V_{I,m} = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{k=1}^M f_{ik}^{mk},$$

а сумарні об'єми міжшарових потоків V_I у M -системі за період $[0, T]$:

$$V_I = \sum_{m=1}^M V_{I,m}.$$

Параметр $\xi_m = V_{I,m} / V_I$ визначає питому вагу m -го шару у процесі міжшарових взаємодій M -системи. Якщо значення ξ_m близьке до 1, то цей шар є основою в процесі організації міжшарових взаємодій, якщо ж близьке до 0, то його без істотної втрати адекватності можна вилучити з моделі M -системи і досліджувати незалежно.

Аналогічно на основі потокової матриці суміжності M -системи можемо виділяти шари-генератори та шари-приймачі потоків, визначати рівень пріоритетності для кожного шару внутрішньошарових та/або міжшарових взаємодій, обчислювати силу взаємозв'язку між окремими шарами тощо. Загалом уведені вище параметри дозволяють кількісно оцінювати окремі

складові у процесі функціонування M -системи і суттєво спрощувати її модель.

Для визначення особливостей M -структур та систем використано найпростіший метод лінійної агрегації. Для отримання більш точних висновків про питому вагу окремих складових у структурі і процесі функціонування системи та використання їх моделей для спрощення процесу дослідження доцільно враховувати пріоритетність цих складових і застосовувати методи зваженої лінійної, нелінійної або гібридної агрегації [23].

У праці [5] k -серцевина мультиплексу $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ визначається як поєднання k_m -серцевин його шарів, $m = \overline{1, M}$. У кожному системному шарі M -системи можемо визначити його потокову λ -серцевину, $\lambda \in [0, 1]$. λ -серцевиною M -системи називатимемо сукупність λ -серцевин її шарів, пов'язаних міжшаровими потоками, об'єми яких за період $[0, T]$ є не меншими за значення λ . Потокова матриця суміжності λ -серцевини M -системи визначається з матриці \mathbf{F}_M . Очевидно, що структури ядра та λ -серцевини M -системи можуть значно відрізнятись. Потоківі характеристики λ -серцевини у процесі функціонування M -системи та окремих її шарів (питома вага λ -серцевини у M -системі, питома вага λ -серцевини m -го шару у процесі функціонування цього шару в межах всієї системи, питома вага λ -серцевини у процесі міжшарових взаємодій тощо) визначаються аналогічно до поточкових характеристик K -системи і відіграють таку саму роль у спрощенні моделі вихідної системи. Очевидно, що нові вузли M -системи з більшою ймовірністю переважно приєднуються до вузлів ядра, оскільки це дозволяє швидше переходити до інших шарів мультиплексу. Серед вузлів ядра переважно приєднання більш імовірно до вузлів потокової λ -серцевини M -системи.

Подальшим способом спрощення моделі M -системи є введення поняття її $\lambda(k, l)$ -серцевини, тобто такої підсистеми вихідної системи, структурний ступінь вузлів якої є не меншим за значення k , мультиплексний ступінь вузлів є не меншим за значення l і елементи потокової матриці суміжності \mathbf{F}_M є не меншими за значення λ , $\lambda \in [0, 1]$. Очевидно, що $\lambda(k, M) \subset K_M$. Відзначимо також, що $\lambda(k, l)$ -серцевина дозволяє без істотної втрати адекватності вилучити з моделі M -системи вузли-посередники та елементи, які беруть незначну участь у процесі її функціонування.

ВИСНОВКИ

Дослідження складних мережевих систем — складна проблема. Це насамперед зумовлено проблемою розмірності та адекватності моделей таких систем. Поняття k -серцевини SM та потокової серцевини SMC дозволяє принаймні частково вирішити цю проблему, виділяючи найбільш важливі зі структурного та функціонального погляду складові системи. Ці поняття дають змогу на порядки зменшувати розмірність моделей реальних SMC , розширюючи можливості розв'язання низки важливих прикладних задач: керуваності, спостережуваності, синхронізації тощо. Для мультиплекс-систем,

які є значно складнішими утвореннями, ніж СМС, проблема розмірності стає ще більш актуальною. Уведені в роботі поняття ядра та потокової серцевини M -системи дозволяють зменшувати розмірність моделі такої системи, розщеплювати її на моделі окремих системних шарів, одночасно відстежуючи кількісну міру збереження їх адекватності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Barabási A.-L.* Linked: the new science of networks / A.-L. Barabási, J. Frangos. — New York: Basic Books, 2002. — 280 p.
2. *Polishchuk O.* Issues of regional development and evaluation problems / O. Polishchuk, D. Polishchuk, M. Tyutyunnyk, M. Yadzhak // AASCIT Communications. — 2015. — Vol. 2 (4). — P. 115–120.
3. *Polishchuk D.* Solution of some problems of evaluation of the complex systems / D. Polishchuk, O. Polishchuk, M. Yadzhak // Proc. of the 15th Int. conf. on automatic control, 23–26 September 2008. — Odesa: ONMA. — P. 968–976.
4. *Поліщук О.Д.* Мережеві структури та системи: I. Потоківі характеристики складних мереж / О.Д. Поліщук, М.С. Яджак // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 2. — С. 42–54.
5. *Dorogovtsev S.N.* k-core organization of complex networks / S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes // Physical review letters. — 2006. — Vol. 96(4). — 040601. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.040601>.
6. *Alvarez-Hamelin J.I.* k-core decomposition: A tool for the visualization of large scale networks / J.I. Alvarez-Hamelin, L. Dall'Asta, A. Barrat, A. Vespignani // arXiv preprint. — arXiv: 0504107 [cs]. — 28 Apr 2005. — 13 p.
7. *Scott W.R.* Organizations and organizing: Rational, natural and open systems perspectives / W.R. Scott, G.F. Davis. — London: Routledge, 2015. — 464 p.
8. *Boccaletti S.* Structure and Dynamics of Multilayer Networks / S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado et al. // Physics Reports. — 2014. — Vol. 544(1). — P. 1–122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.07.001>.
9. *Corominas-Murtra B.* Detection of the elite structure in a virtual multiplex social system by means of a generalised K-core / B. Corominas-Murtra, B. Fuchs, S. Thurner // PloS one. — 2014. — Vol. 9 (12). — e112606. DOI: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0112606>.
10. *Azimi-Tafreshi N.* k-core percolation on multiplex networks / N. Azimi-Tafreshi, J. Gómez-Gardeñes, S.N. Dorogovtsev // Physical Review E. — 2014. — Vol. 90. — 032816. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.032816>.
11. *Головач Ю.* Складні мережі / Ю. Головач, О. Олемской, К. фон Фербер та ін. // Журнал фізичних досліджень. — 2006. — **10**, №4. — С. 247–289.
12. *Поліщук Д.О.* Моніторинг потоку транспортних мереж із частково впорядкованим рухом / Д.О. Поліщук, О.Д. Поліщук // XXIII наук.-техн. конф. молодих науковців Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАНУ: зб. наук. праць. — 23–25 жовт., 2013. — Львів. — С. 326–329.
13. *Liu Y.-Y.* Controllability of complex networks / Y.-Y. Liu, J.-J. Slotine, A.-L. Barabási // Nature. — 2011. — Vol. 473. — P. 167–173. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature10011>.
14. *Liu Y.-Y.* Observability of complex systems / Y.-Y. Liu, J.J. Slotine, A.L. Barabási // Proc. of the National Academy of Sciences. — 2013. — Vol. 110(7). — P. 2460–2465. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1215508110>.
15. *Novikov A.V.* Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis / A.V. Novikov, E.N. Benderskaya // Pattern Recognition and Image

- Analysis. — 2014. — Vol. 24(3). — P. 365–371. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054661814030146>.
16. *Buldyrev S.V.* Catastrophic cascade of failures in interdependent networks / S.V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 464(15). — P. 1025–1028. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature08932>.
 17. *Lombardi A.* Controllability analysis of networks / A. Lombardi, M. Hörnquist // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75(5). — 056110. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.056110>.
 18. *Sedoglavic A.* A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time / A. Sedoglavic // *Proc. of the 2001 Intern. Symp. on Symbolic and algebraic computation*. — 23–29 July 2001. — P. 309–317. DOI: <https://doi.org/10.1145/384101.384143>.
 19. *Gomez-Gardennes J.* Paths synchronization on complex networks / J. Gomez-Gardennes, Y. Moreno, A. Arenas // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98. — 034101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.034101>.
 20. *Kuramoto Y.* *Chemical oscillations waves, and turbulence* / Y. Kuramoto. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 157 p.
 21. *Daido H.* Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions / H. Daido // *Physical Review Letters*. — 1992. — Vol. 73. — P. 1073–1076. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1073>.
 22. *Polishchuk O.* Flows characteristics and cores of complex network and multiplex type systems / O. Polishchuk // *arXiv preprint*. — arXiv:1702.02730 [physics.soc-ph]. — 9 Feb 2017. — 22 p.
 23. *Polishchuk D.* Global network structures and problems of aggregative evaluations / D. Polishchuk, O. Polishchuk // *International frontier science letters*. — 2016. — Vol. 8. — P. 31–45. DOI: <http://doi.org/10.18052/www.scipress.com/IFSL.8.31>.

Надійшла 08.02.2018