УДК 519.21

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ МАРКОВСКИХ ИТЕРАЦИЙ

В.Н. ЦАРЬКОВА, Й.Я. ГОЛДШТЕЙНЕ

Исследуется поведение первых и вторых моментов линейных разностных уравнений с марковскими коэффициентами. Предлагается удобный для приложений метод анализа асимптотической устойчивости для близких к постоянным коэффицентов. Разработан алгоритм, основанный на разложении по степеням малого параметра специально сконструированного оператора с использованием теории возмущений линейных операторов Като. При независимых возмущениях предлагаемый метод позволяет выписать необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном в форме неравенств с коэффициентами.

ВВЕДЕНИЕ

Стохастические разностные уравнения — один из основных инструментов анализа временных рядов (см., например, [4, 9]). В большинстве случаев предполагается, что временной ряд имеет условное гауссовское распределение с постоянной дисперсией, и поэтому его математическая модель может быть представлена в форме линейной неоднородной итерационной процедуры в $\mathbb{R}^n$ вида

$$X_t = FX_{t-1} + \eta_t, \qquad (1)$$

где $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин в $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ (так называемые остатки). Однако во многих задачах современной эконометрии предположение о постоянстве матрицы ковариации остатков оказалось неадекватным и от него пришлось отказаться, моделируя остатки в форме произведения $\eta_t = \Sigma_t \xi_t$, где $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин в $\mathbb{R}^n$ с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, а матрицы $\{\Sigma_t^2, t \in \mathbb{Z}\}$ задаются с помощью разностного уравнения с коэффициентами, линейно зависящими от ξ_t (модели VecGARCH [4]). Так, например, в скалярных моделях типа $\mathrm{GARCH}(p,q)$ условная дисперсия остатков удовлетворяет уравнению

$$\sigma_t^2 = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{p} \varphi_k \sigma_{t-k}^2 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \sigma_{t-j}^2 \xi_{t-j} . \qquad (2)$$

Все параметры в приведенных выше уравнениях опредляются, как правило, по заданной выборке методом наименьших квадратов. Естественно, что при этом основным предположением является существование асимптотически устойчивых стационарных, имеющих второй момент решений уравнения для дисперсии, т.е. сходимость матриц $M_4(t) := \mathbf{E}\{\Sigma_t^4\}$ при $t \to \infty$ к некоторой постоянной матрице M_4. Легко показать, что этот вопрос сводится к анализу поведения моментов соответствующего однородного уравнения [1]. Предположение о независимости элементов последовательности $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ позволяет сравнительно просто получить в удобной для приложений форме необходимые и достаточные для этого условия (см., например, [3]). Однако в последнее время в современной финансовой эконометрии все чаще стали появляться регрессионные модели, в которых статистическая неопределенность задается в форме случайных последовательностей с дискретным пространством состояний. Например, при анализе возможности хеджирования опционов в модели Кокса-Рубинштейна [9] динамика рынка определеяется поведением акций, задаваемых в форме итерационной процедуры $S_t = \zeta_t S_{t-1}$, где процентные ставки $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ независимы и в каждый момент времени принимают лишь два значения: либо вверх, либо вниз. Ясно, что даже в этом простейшем случае управляющая рынком ценных бумаг последовательность $\{S_t, t \in \mathbb{Z}\}$ уже не является последовательностью с независимыми элементами, а лишь обладает марковским свойством. Если итерпретировать сказанное выше в терминах регрессионных моделей с остатками типа GARCH, то это означает моделирование последовательности условных дисперсий остатков в форме разностных линейных уравнений в $\mathbb{R}^n$ с марковскими коэффициентами

$$x_t = A(\xi_t) x_{t-1}, \qquad (3)$$

где $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ — однородная цепь Маркова на фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ с переходной вероятностью $P(y, dz)$. В данной работе выводится операторное уравнение для первых и вторых моментов решений (3) и предлагаются асимптотические методы анализа динамики в случае, когда коэффициенты в этом уравнении близки к постоянным. Если же последовательность $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ составлена из независимых элементов, то предлагаемая методика позволяет получить необходимые и достаточные условия сходимости вторых моментов уравнений вида (2) в удобной для приложений форме.

АНАЛИЗ ПЕРВЫХ МОМЕНТОВ

В дальнейшем линейное пространство $\mathbb{R}^n$ n-мерных вектор-столбцов будем рассматривать как евклидово пространство со скалярным произведением

$$u \in \mathbb{R}^n, \ v \in \mathbb{R}^n : (u, v) = u^T v .$$

Предположим, что марковская последовательность $\vec{\xi} := \{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ задана на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}^t, \mathbf{P})$, где $\{\mathfrak{F}^t\}$ — минимальная фильтрация, с которой она согласована. Кроме этого, чтобы вывести удобные для приложений формулы, нам понадобятся следующие предположения:

- матричная функция $\{A(y),\ y \in \mathbb{Y}\}$ непрерывна;
- фазовое пространство $\mathbb{Y}$ цепи Маркова является метрическим компактом;
- переходная вероятность $P(y, dz)$ обладает феллеровским свойством, т.е. из непрерывности функции $\{u(y), y \in \mathbb{Y}\}$ следует непрерывность функции $\{(Pu)(y),\ y \in \mathbb{Y}\}$, определенной равенством

$$(\mathcal{P}u)(y) =: \int_{\mathbb{Y}} u(z) P(y, dz)\,; \tag{4}$$

- существует единственная вероятностная мера на $\mathbb{Y}$, удовлетворяющая равенству

$$(\mathcal{P}^* \mu)(dz) =: \int_{\mathbb{Y}} \mu(dy) P(y, dz)\,; \tag{5}$$

- существует такое положительное число $\rho < 1$, что спектр определенного на $\mathbb{C}(\mathbb{Y})$ оператора $\mathcal{P}$ можно представить в форме (экспоненциальная эргодичность)

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{1\} \bigcup \sigma_\rho,\ \ \sigma_\rho \in \{\lambda \in \mathcal{C} : |\lambda| < \rho\}\,. \tag{6}$$

Обозначим

$$s \in \mathbb{R} : X_s^s = I;\ \ t > s : X_s^t : = \prod_{k=s+1}^{t} A(\xi_k)\,. \tag{7}$$

Легко видеть, что решение уравнения (3) можно записать в форме $x_t = X_s^t x_s$ при всех $s \in \mathbb{R},\ t \ge s$. Кроме того, в силу марковского свойства последовательности $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ вероятностные характеристики матриц $\{X_s^t,\ t \ge s\}$ зависят лишь от вероятностных характеристик ξ_s. Определим на пространстве непрерывных n-мерных отображений $\mathbb{C}(\mathbb{Y} \to \mathbb{R}^n) := \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ оператор

$$y \in \mathbb{Y},\ u \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y}) : (\mathbf{A}u)(y) = \int_{\mathbb{Y}} A^T(z) u(z) P(y, dz)\,. \tag{8}$$

Поскольку переходная вероятность обладает феллеровским свойством, то $\mathbf{A}u \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$. Кроме того, для всех $u \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ из (8) следует неравенство

$$\| \mathbf{A}u \| \le \sup_{z \in \mathbb{Y}} | A^T(z) u(z) | \le \sup_{z \in \mathbb{Y}} \| A^T(z) \| \sup_{z \in \mathbb{Y}} | u(z) |\,,$$

и поэтому

$$\| \mathbf{A} \| := \sup_{\|u\|=1} \| \mathbf{A}u \| \le \sup_{z \in \mathbb{Y}} \| A(z) \|\,, \tag{9}$$

т.е. оператор $\mathbf{A}$ является линейным непрерывным оператором на $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$.

Лемма 1. Для любых $s \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $v \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ и $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{E}\{(X_s^{s+t}x, v(\xi_{s+t})) / \mathfrak{F}^s\} = (x, (\mathbf{A}^t v)(\xi_s)). \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся методом индукции. При $t = 1$ и любом $s \in \mathbb{R}$ равенство (10) следует из марковского свойства последовательности $\vec{\xi}$.

$$\mathbf{E}\{(X_s^{s+1}x, v(\xi_{s+1})) / \mathfrak{F}^s\} = \mathbf{E}\{(x, A^T(\xi_{s+1}))v(\xi_{s+1})) / \xi_s\} = (x, (\mathbf{A}v)(\xi_s)).$$

Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения леммы для $t = m+1$, используем это равенство для $s+m$ вместо s в предположении, что (10) верно для $t = m$.

$$\mathbf{E}\{(X_s^{s+m+1}x, v(\xi_{s+m+1})) / \mathfrak{F}^s\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{(X_s^{s+m}x, A^T(\xi_{s+m+1})v(\xi_{s+m+1}))/\mathfrak{F}^{s+m}\}/\mathfrak{F}^s\} =$$

$$= \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{(z, A^T(\xi_{s+m+1}))v(\xi_{s+m+1})) / \mathfrak{F}^{s+m}\}\Big|_{z = X_s^{s+m}x} / \mathfrak{F}^s\} =$$

$$= \mathbf{E}\{(X_s^{s+m}x, (\mathbf{A}v)(\xi_{s+m})) / \mathfrak{F}^s\} = (x, (\mathbf{A}^m(\mathbf{A}v))(\xi_s)) = (x, (\mathbf{A}^{m+1}v)(\xi_s)).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть элементы последовательности $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ независимы и одинаково распределены. Тогда

(i) оператор $\mathbf{A}$ оставляет инвариантным подпространство $\mathbb{R}^n \subset \subset \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ и сужение $\overline{\mathbf{A}}$ оператора $\mathbf{A}$ на это подпространство задается равенством

$$v \in \mathbb{R}^n : \overline{\mathbf{A}}v = \overline{A}^T v, \tag{11}$$

где $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}\{A(\xi_0)\}$;

(ii) для любого $s \in \mathbb{Z}$, любого $t > s$ и любого $\mathfrak{F}^t$-согласованного решения (3) $\{x_t, t \geq 0\}$ имеет место равенство

$$\mathbf{E}\{x_t\} = \overline{A}^{t-s}\mathbf{E}\{x_s\}. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку в условиях теоремы $P(y, dz)$ от y не зависит, т.е. $P(y, dz) \equiv P(dz)$, то утверждение (i) следует непосредственно из (8).

$$v \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}v = \int_{\mathbb{Y}} A^T(y)vP(dz) = \mathbf{E}\{A^T(\xi_0)\}v = \overline{\mathbf{A}}v.$$

Далее, по определению фильтрации в силу независмости элементов последовательности $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}\}$ случайная величина ξ_t не зависит от $\mathfrak{F}^{t-1}$-измеримого случайного вектора x_{t-1}. Поэтому для любого $v \in \mathbb{R}^n$

$$(E\{x_t\},v)=\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{(x_{t-1},A^T(\xi_t)v)/\mathfrak{F}^{t-1}\}\}=\mathbf{E}\{(x_{t-1},\mathbf{E}\{A^T(\xi_t)/\mathfrak{F}^{t-1}\}v)\}=$$

$$=(\mathbf{E}\{x_{t-1}\},\mathbf{E}\{A^T(\xi_0)\}v)=(\mathbf{E}\{x_{t-1}\},\overline{A}^T v)\,.$$

Остается последовательно применить эту формулу для всех $t\in$ $\in\{s+1,t-1\}$, и теорема доказана.

Одним из наиболее распространенных методов анализа разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$ вида

$$t\in\mathbb{Z}: y_t = G_t y_{t-1} \tag{13}$$

является замена переменных $y_t=\mathbf{B}_t z_t$, где $\mathbf{B}_t$ — матрица некоторого переменного базиса в $\mathbb{R}^n$ [10] . Если удается найти такую матричную последовательность, что $z_t = Hz_{t-1}$, то говорят, что уравнение (13) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами, и любое его решение можно представить как

$$y_t=\mathbf{B}_t z_t=\mathbf{B}_t H^{t-s} z_s=\mathbf{B}_t H^{t-s}\mathbf{B}_s^{-1} y_s\,.$$

Это свойство в теории разностных уравнений называется *приводимостью*. Мы будем называть уравнение (3) *приводимым в среднем* , если существует такая непрерывная матричная функция $\{\mathbf{B}(y),\ y\in\mathbb{Y}\}$ и такая матрица Λ, что для всех $s\in\mathbb{R}$ и $t>s$ выполняется равенство

$$\mathbb{E}\{\mathbf{B}(\xi_t)x_t\,/\,\mathcal{F}^s\}=\Lambda^{t-s}\mathbf{B}(\xi_s)x_s\,. \tag{14}$$

Рассмотрим возможность приводимости (3) в среднем, когда матричная функция $\{A(y),\ y\in\mathbb{Y}\}$ близка к постоянной и может быть представлена в форме равномерно сходящегося ряда

$$A(y)=A_0+\varepsilon A(y,\varepsilon):=A_0+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_{k+1}(y)\,, \tag{15}$$

где $\varepsilon\in(0,1)$ — малый параметр.

Вначале сделаем некоторые вспомогательные построения. Определим тензорное произведение элементов пространства $\mathbb{C}(\mathbb{Y})$ и $\mathbb{R}^n$ как произведение скалярной функции на вектор и представим пространство $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ как тензорное произведение $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})=\mathbb{C}(\mathbb{Y})\otimes\mathbb{R}^n$. Напомним, что тензорное произведение линейных пространтв $\mathbb{H}$ и $\mathbb{G}$ определяется как линейная оболочка множества тензоров $\{h\otimes g,\ h\in\mathbb{H},\ g\in\mathbb{G}\}$. Соответствующий матрице (15) оператор (8) можно представить в виде суммы $\mathbf{A}(\varepsilon)=\mathbf{A}_0+\varepsilon\mathbf{A}(\varepsilon)$, причем оператор $\mathbf{A}_0$ оставляет инвариантным подпространство $\mathbb{R}^n$, и его можно представить в виде тензороного произведения операторов $\mathbf{A}_0=\mathcal{P}\otimes A_0^T$.

$$h\in\mathbb{C}(\mathbb{Y}),g\in\mathbb{R}^n:\mathbf{A}_0(h\otimes g)=\mathcal{P}h\otimes A_0^T g\,,$$

где $\mathcal{P}$ — марковский оператор, определенный равенством (4). Тензорное представление оператора позволяет упростить нахождение спектра и резольвенты, используя спектры и резольвенты определяющих его операторов [6]. Спектр оператора $\mathbf{A}_0$ с учетом предположения об экспоненциальной эргодичности (6) можно представить в форме

$$\sigma(\mathbf{A}_0) = \{\lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma(\mathcal{P}),\ \lambda_2 \in \sigma(A_0)\} = \sigma(A_0) \cup \sigma_\rho\,, \tag{16}$$

где $\sigma_\rho(A_0) := \{\lambda_1 \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma(\mathcal{P}),\ \lambda_2 \in \sigma_\rho\}$. Основным предположением для приводимости в среднем уравнения (3) является дезъюнктность множеств в разложении спектра (16), т.е.

$$\sigma(A_0) \cap \sigma_\rho = \varnothing\,. \tag{17}$$

Это позволит нам предложить асимптотический метод, основанный на разложении спектрального проектора [5] оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$ по степеням малого параметра ε.

Сопряженным пространством к $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ является пространство векторно-значных мер $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})^*$, и скалярное произведение элементов $v \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ и $g \in \mathbb{C}_n(\mathbb{Y})^*$ определяется равенством [2]

$$< g, v > := \int_{\mathbb{Y}} (g(dy), v(y))\,. \tag{18}$$

Из определения сопряженного оператора $< \mathbf{A}_0^* g, v > = < g, \mathbf{A}_0 v >$, т.е.

$$\int_{\mathbb{Y}} (g(dy), A_0^T v(z)) P(y, dz) = \left(\int_{\mathbb{Y}} A_0 g(dy) P(y, dz), v(z) \right),$$

находим его форму

$$(\mathbf{A}_0^* g)(dz) = \int_{\mathbb{Y}} A_0 g(dy)\, P(y, dz)\,. \tag{19}$$

Пространство $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})^*$ также можно представить как тензорное произведение пространства скалярных счетно-аддитивных мер $\mathbb{C}^*(\mathbb{Y})$ и пространства $\mathbb{R}^n$. Отсюда, используя определение тензорного произведения, имеем равенство

$$a \in \mathbb{C}^*(\mathbb{Y}),\ b \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{A}_0^*(a \otimes b))(dy) := (\mathcal{P}^* a)(dy) \otimes A_0 b\,. \tag{20}$$

Лемма 2. Если выполнены описанные выше предположения, то при достаточно малом $\bar{\varepsilon} > 0$ и при всех $|\varepsilon| < \bar{\varepsilon}$ разностное уравнение приводимо в среднем, причем матричная функция $\{\mathbf{B}(y, \varepsilon), y \in \mathbb{Y}\}$ является базисом в корневом подпространстве оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$, соответствующем части спектра $\sigma_0(\varepsilon)$, которая определяется равенством $\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_0(\varepsilon) = \sigma_0$, а матрица $\Lambda(\varepsilon)$ является матрицей сужения оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$ на это корневое подпространство. При каждом $|\varepsilon|<\bar{\varepsilon}$ базисная $n\times n$-матрица-фунукция $\{\mathbf{B}(y,\varepsilon)$, $y\in\mathbb{Y}\}$ и постоянная $n\times n$-матрица $\Lambda(\varepsilon)$ однозначно определяются равенством

$$y\in\mathbb{Y},\ |\varepsilon|<\bar{\varepsilon}:(\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{B})(y,\varepsilon)=\mathbf{B}(y,\varepsilon)\Lambda^{T}(\varepsilon)\,. \tag{21}$$

Доказательство. В силу предположений об экспоненциальной эргодичности марковского процесса и возможности представления спектра оператора $\mathbf{A}_0$ в форме (17), размерность корневого подпространства этого оператора, соответствующего части спектра $\sigma(A_0)$, равна n. Кроме того, в силу предположения о равномерной по $y\in\mathbb{Y}$ сходимости матричного ряда $A(y,\varepsilon)$ найдется такое положительное число $\bar{\varepsilon}$, что операторное семейство $\mathbf{A}(\varepsilon)$ аналитически зависит от параметра ε при $|\varepsilon|<\bar{\varepsilon}$. Следовательно [5], равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sigma_0(\varepsilon)=\sigma_0$ однозначно определяет изолированную часть спектра операторов $\mathbf{A}(\varepsilon)$ при всех $|\varepsilon|<\bar{\varepsilon}$, а соответствующее этой части спектра корневое подпространство имеет размерность n. Отсюда следует возможность выбора базиса в этом корневом подпространстве из n элементов пространства $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$, который можно представить в форме матричной функции

$$\mathbf{B}(y,\varepsilon)=\{\mathbf{b}_1(y,\varepsilon),\mathbf{b}_2(y,\varepsilon),\ldots,\mathbf{b}_n(y,\varepsilon)\}\,. \tag{22}$$

При каждом $\varepsilon\in(-\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon})$ после последовательного применения оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$ к элементам базиса (22) и разложения по этому базису получим матрицу сужения оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$ на это подпространство

$$(\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{B})(y,\varepsilon):=\left\{(\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{b}_j)(y,\varepsilon),\ j=1,2,\ldots,n\right\}=$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{jk}(\varepsilon)\mathbf{b}_j(y,\varepsilon),\ j=1,2,\ldots,n\right\}:=\mathbf{B}(y,\varepsilon)\Lambda^{T}(\varepsilon)\,. \tag{23}$$

Теперь подставим (22) в (14).

$$\mathbf{E}\{\mathbf{B}(\xi_t,\varepsilon)x_t/\mathcal{F}^s\}=\{\mathbf{E}\{(x_t,\mathbf{b}_1(y,\varepsilon))/\mathcal{F}^s\},\ldots,\mathbf{E}\{(x_t,\mathbf{b}_n(y,\varepsilon))/\mathcal{F}^s\}\}=$$

$$=\{(x_s,\mathbf{A}^{t-s}\mathbf{b}_1)(y_s,\varepsilon)),\ldots,\{(x_s,\mathbf{A}(\varepsilon)^{t-s}\mathbf{b}_n)(y_s,\varepsilon))\}=$$

$$=(\mathbf{A}(\varepsilon)^{t-s}\mathbf{B})(\xi_s,\varepsilon)x_s=\mathbf{B}(y_s,\varepsilon)(\Lambda^{T}(\varepsilon))^{t-s}x_s\,,$$

и лемма доказана.

Для описания алгоритма построения матричного базиса (22) и матрицы $\Lambda(\varepsilon)$ воспользуемся разложениями в равномерно сходящиеся ряды по степеням малого параметра ε этих матриц

$$\Lambda(\varepsilon):=\Lambda_0+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_{k+1},\mathbf{B}(y,\varepsilon):=\mathbf{B}_0+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{B}_{k+1}(y) \tag{24}$$

и оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$

$$\mathbf{A}(\varepsilon) := \mathbf{A}_0 + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{A}_{k+1}\,, \tag{25}$$

где

$$(\mathbf{A}_j v)(y) = \int_{\mathbb{Y}} A_j^T(z) v(z) P(y, dz)\,. \tag{26}$$

При каждом достаточно малом ε можно подставить эти разложения в (23) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, учитывая (26), получить последовательность уравнений

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0 \Lambda_0^T\,, \tag{27}$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \Lambda_0^T = \mathbf{B}_0 \Lambda_1^T - \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_0\,, \tag{28}$$

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \Lambda_0^T = \mathbf{B}_0 \Lambda_2^T + \mathbf{B}_1 \Lambda_1^T - \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \tag{29}$$

и т. д. для определения неизвестных элементов рядов (24). Выбрав единичную матрицу $\mathbf{B}_0 := I$ в качестве базиса в $\mathbb{R}^n$ и подставив ее в (27), находим $\Lambda_0^T = A_0^T$, т.е. $\Lambda_0 = A_0$. Теперь на элементах пространства $\hat{\mathbb{C}}$ непрерывных матричных функций определим оператор

$$y \in \mathbb{Y},\ \mathbf{v} \in \hat{\mathbb{C}} : (\mathbb{L}\mathbf{v})(y) := (\mathbf{A}_0 \mathbf{v})(y) - \mathbf{v}(y) A_0^T :=$$

$$:= \int_{\mathbb{Y}} A_0^T (\mathbf{v}(z) - \mathbf{v}(y)) P(y, dz) + A_0^T \mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(y) A_0^T := (\mathbb{H}\mathbf{v})(y) + (\mathbb{G}\mathbf{v})(y)\,. \tag{30}$$

Рассматривая $\hat{\mathbb{C}}$ как $\mathbb{R}^{n^2}$, можно, как и в случае пространства $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$, найти в качестве сопряженного пространство счетно-аддитивных матричнозначных мер $\hat{\mathbb{C}}^*$ и определить скалярное произведение элементов $\mathbf{g} \in \hat{\mathbb{C}}^*$ и $\mathbf{v} \in \hat{\mathbb{C}}$ формулой

$$< \mathbf{g}, \mathbf{v} > := \mathrm{Sp}\left\{ \int_{\mathbb{Y}} \mathbf{v}^T(y) \mathbf{g}(dy) \right\}, \tag{31}$$

где $\mathrm{Sp}\{\}$ — след матрицы. Из этого определения аналогично (19) легко найти сопряженный оператор $\mathbb{L}^*$ к оператору $\mathbb{L}$.

$$(\mathbb{L}^* \mathbf{g})(dz) := (\mathbf{A}_0^* \mathbf{g})(dz) - \mathbf{g}(dz) A_0 :=$$

$$:= \int_{\mathbb{Y}} A_0 (\mathbf{g}(dy) - \mathbf{g}(dz)) P(y, dz) + A_0 \mathbf{g}(dz) - \mathbf{g}(dz) A_0 :=$$

$$:= (\mathbb{H}^* \mathbf{g})(dy) + (\mathbb{G}^* \mathbf{g})(dy)\,. \tag{32}$$

Как и в случае пространства $\mathbb{C}_n(\mathbb{Y})$ пространство $\hat{\mathbb{C}}$ можно рассматривать как тензорное произведение $\mathbb{C}(\mathbb{Y})$ и пространства постоянных матриц $\mathbf{M}_n$, а пространство $\hat{\mathbb{C}}^*$ как тензорное произведение $\mathbb{C}(\mathbb{Y})^*$ и пространства постоянных матриц $\mathbf{M}_n$. Оператор $\mathbb{L}^*$ в соответствии с (32) является тензорной суммой оператора $\mathbb{H}^*$, действующего в пространстве $\mathbb{C}^*(\mathbb{Y})$, и оператора $\mathbb{G}^*$, действующего в пространстве $\mathbf{M}_n$. Поэтому ядро оператора $\mathbb{L}^*$ состоит из элементов вида

$$\mathbf{M} \in \operatorname{Ker}\{\mathbb{L}^*\} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mu(dy)M, \;\; M \in \{\mathbf{M}_n : A_0 M - M A_0 = 0\}. \qquad (33)$$

Теперь можно переписать (28) в форме

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_1(y) - \mathbf{B}_1(y)\Lambda_0^T = \mathbf{\Lambda}_1^T - A_1^T(y),$$

применив теорему Фредгольма о нормальной разрешимости. Для того чтобы уравнение вида

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \Lambda_0^T = \mathbf{C}$$

для $\mathbf{C} \in \hat{\mathbb{C}}$ имело решение, необходима и достаточна ортогональность правой части этого уравнения всем элементам ядра оператора $\mathbb{L}^*$. Итак, для разрешимости (28), учитывая $\mathbf{B}_0 = I$, нужно обеспечить равенство

$$\int_{\mathbb{Y}} [\Lambda_1 - A_1(y)] M^T \mu(dy) = 0 \qquad (34)$$

для всех $n \times n$-матриц, удовлетворяющих равенству $A_0 M - M A_0 = 0$.

Очевидно, что при

$$\Lambda_1 = \overline{A}_1 := \int_{\mathbb{Y}} A_1(y)\, \mu(dy) \qquad (35)$$

равенство (34) выполняется для любой постоянной матрицы M. Теперь можно найти $\mathbf{B}_1(y)$ и перейти к анализу следующего уравнения для отыскания Λ_2 и $\mathbf{B}_2(y)$. Уравнение (28) имеет много решений. Удобно выбрать такое решение $B_1(y)$, что $\overline{B}_1 = 0$. Подставим известные матрицы в (29) и перепишем это уравнение так:

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2 \Lambda_0^T = \Lambda_2^T + \mathbf{B}_1(y)\overline{A}_1^T - A_1^T(y)\mathbf{B}_1(y).$$

Теперь вновь применим теорему Фредгольма

$$\Lambda_2^T = -\overline{\mathbf{B}}_1 \overline{A}_1^T + \int_{\mathbb{Y}} A_1^T(y)\mathbf{B}_1(y)\mu\, dy \qquad (36)$$

и найдем матрицу Λ_2, а затем и $\mathbf{B}_2(y)$. После этого можно выписать следующее уравнение для отыскания Λ_3, $\mathbf{B}_3(y)$ и т. д. до достижения нужной точности в разложении матрицы $\Lambda(\varepsilon)$. В силу компактности пространства $\mathbb{Y}$ и непрерывности матриц $\{\mathbf{B}_j(y),\ j = 1,2,...\}$ элементы найденного базиса $\mathbf{B} := I + \varepsilon \mathbf{B}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{B}_2 + \cdots$ при достаточно малом ε линейно независимы.

КОВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Проанализируем динамику матриц вторых моментов решений разностного уравнения (3), т.е. поведение матриц

$$Q_t := \mathbf{E}\{x_t x_t^T\} \tag{37}$$

как матричной функции аргумента t. Чтобы упростить выкладки, введем некоторые обозначения. Прежде всего заметим, что пространство $\mathbb{M}_n$ действительных $n \times n$-матриц можно рассматривать как n^2-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ со скалярным произведением $[q, g] := \mathrm{Sp}\{q\, g^T\}$. Множество симметричных $n \times n$-матриц $\hat{\mathbb{M}}_n$ вида

$$q := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \tag{38}$$

образует в $\mathbb{M}_n$ линейное замкнутое подпространство. Поскольку при $q \in \hat{\mathbb{M}}_n$ равенство

$$\| q \|^2 := [q, q] := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (q_{kj})^2 = 0$$

эквивалентно равенству

$$\| \vec{q} \|^2 := (q, q) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} (q_{kj})^2 = 0\,,$$

то $\hat{\mathbb{M}}_n$ можно отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ с вектор-столбцами вида

$$\vec{q} := (q_{11}, q_{12}, ..., q_{1n}; q_{22}, q_{23}, ..., q_{2n};\ q_{(n-1)(n-1)}, q_{(n-1)(n-1)};\ q_{nn})^T \tag{39}$$

и со скалярным произведением $(q, g) := q^T g$. Используя эти обозначения и уравнение (3), для матричных последовательностей $(xx)_t := x_t x_t^T$ можно выписать линейное разностное уравнение в $\mathbb{M}_n$

$$(xx)_t = A(\xi_t)(xx)_{t-1} A^T(\xi_t) := \vec{A}(\xi_t)(xx)_{t-1} \tag{40}$$

и воспользоваться всеми результатами, приведенными ранее. Определенное выше семейство линейных операторов $\vec{A}(\xi_t)$ на пространстве $\mathbb{M}_n$ при каждом фиксированном значении аргумента ξ_t оставляет инвариантным пространство $\hat{\mathbb{M}}_n$ симметричных матриц и поэтому, если нам удобно, вместо (40) будем анализировать соответствующее линейное разностное уравнение в $\mathbb{R}^{\frac{n(+1)}{2}}$.

Обозначим $\mathbb{V}$ банахово пространство симметричных $n \times n$-матричных функций $\{q(y),\ y \in \mathbb{Y}\}$ с нормой

$$\| q \| := \sup_{y \in \mathbb{Y}, \|x\|=1} |(q(y)x, x)|\,.$$

Используя матричную функцию $\{A(y),\ y\in\mathbb{Y}\}$ и переходную вероятность марковской цепи, определим на $\mathbb{V}$ линейный непрерывный оператор

$$(\mathbf{A}q)(y):=\int\limits_{\mathbb{Y}} A^T(z)q(z)A(z)P(y,dz)\,. \qquad (41)$$

Все результаты предыдущей секции могут быть достаточно просто переформулированы и для анализа этого оператора. Однако он обладает некоторой спецификой, которая позволяет упростить исследования. Легко доказать, что оператор (41) *оставляет инвариантным конус неотрицательно определенных матричных функций* [7] , представленный равенством

$$\mathbb{K}:=\{q\in\mathbb{V}:\ \inf_{y\in\mathbb{Y},\,||x||=1}(q(y)x,x)\geq 0\}$$

с множеством внутренних точек

$$\overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}:=\{q\in\mathbb{V}:\ \inf_{y\in\mathbb{Y},||x||=1}(q(y)x,x)>0\}\,.$$

Напомним, что в этом случае конус называется *телесным* [7]. Конус $\mathbb{K}$ позволяет частично упорядочить пространство $\mathbb{V}$, используя «неравенство»

$$q_1<<q_2\Leftrightarrow q_2-q_1\in\mathbb{K}\,.$$

Очевидно, $q\in\overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}$ тогда и только тогда, когда существует такое положительное число $c(q)$, что $q>>c(q)I$, где I — матричная единица. Это упорядочение позволит достаточно просто изучить характер поведения вторых моментов решений (3) при $t\to\infty$. Для упрощения выкладок удобно ввести обозначение $x_{t+k}(k,x,y)$ для решения (3), удовлетворяющего начальным условиям $x_k=x,\ \xi_k=y$ и $X(t+k,k,y)$ для матрицы (7) при условии $\xi_k=y$. Ясно, что $x_{t+k}(k,x,y)=X(t+k,k,y)x$. Если безусловный второй момент решений (37) экспоненциально убывает при $t\to\infty$, т.е.

$$\exists C>0,\ \exists\lambda\in\{\mathcal{C}:|z|<1\},$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall y\in\mathbb{Y},\ \forall k\in\mathbb{Z},\ \forall t\geq 0:\mathbf{E}\{||x_{t+k}(k,x,y)||^2\}\leq C\lambda^t|x|^2, \qquad (42)$$

то говорят [8], что (3) *экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном*. Покажем, что это свойство позволит достаточно просто установить действительный положительный спектр оператора (3).

Определим теперь действие оператора $\mathbf{A}$ с помощью решений уравнения (3).

Лемма 3. Для любых $q\in\mathbb{V},\ t>k\geq 0,\ y\in\mathbb{Y},$ и $x\in\mathbb{R}^n$

$$\left(\left(\mathbf{A}^t q\right)(y)x,x\right)=\mathbf{E}\left\{(q(y_{t+k})\,x_{t+k}(k,x,y),\ x_{t+k}(k,x,y))/\,\xi_k=y\right\}.$$

Доказательство. Как и (10), эта формула является простым следствием марковского свойства последовательности $\{x_t,\xi_t\}$.

$$\mathbf{E}\left\{(q(y_{t+k})\,x_{t+k}(k,x,y),x_{t+k}(k,x,y))/\,\xi_k=y\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\!\left(A^T(y_{t+k})\,q(y_{t+k})\,A(y_{t+k})\,x_{t+k-1}(k,x,y),x_{t+k-1}(k,x,y)\right)/\,y_k=y\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\left.\left(\int_{\mathbb{Y}}A^T(z)\,q(z)A(z)P(y_{t+k-1}dz)h,h\right)\right|_{h=x_{t+k-1}(k,x,y),\,\xi_k=y}\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{((\mathbf{A}q)(y_{t+k-1})\,x_{t+k-1}(k,x,y),x_{t+k-1}(k,x,y))/\,\xi_k=y\right\}=\ldots=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\!((\mathbf{A}^{t-1}q)(y_{k+1})\,x_{k+1}(k,x,y),x_{k+1}(k,x,y))/\,\xi_k=y\right\}=\left(\!(\mathbf{A})^t\,q\right)\!(y)\,x,x\Big).$$

Используя обозначение (7), перепишем утверждение леммы в матричной форме

$$(\mathbf{A}^t q)(y)=\mathbf{E}\left\{X^T(t+k,k,y)\,q(y_{t+k})\,X(t+k,k,y)/\,\xi_k=y\right\}. \qquad (43)$$

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) уравнение (3) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном;

(ii) существует такая матричная функция $q\in\overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}$, что

$$\mathbf{A}q-q=-I\,; \qquad (44)$$

(iii) максимальная положительная точка спектра $\mathbf{r}\{\mathbf{A}\}$ оператора $\mathbf{A}$ меньше единицы.

Доказательство. $(i)\to(ii)$. Используя равенство

$$\left\|\mathbb{E}\left\{X^T(t,0,y)X(t,0,y)\right\}\right\|=\sup_{|x|=1}\left|(\mathbb{E}\left\{X^T(t,0,y)X(t,0,y)\right\}x,x)\right|=$$

$$=\sup_{|x|=1}\left|\mathbb{E}\left\{(X(t,0,y)x,X(t,0,y)x)\right\}\right|=\sup_{|x|=1}\mathbb{E}\left\{|\,x_t(0,x,y)\,|^2\right\}$$

и условие экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном, можно убедиться в существовании матричной функции, определенной равенством

$$q(y):=\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{E}\left\{X^T(t,0,y)X(t,0,y)\right\}.$$

В силу тождества $X(k,k,y)\equiv I$ из равенства

$$\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{E}\left\{X^T(t,0,y)X(t,0,y)\right\}=I+\sum_{t=1}^{\infty}\mathbf{E}\left\{X^T(t,0,y)X(t,0,y)\right\}$$

следует неравенство $q>>I$. Следовательно, $q\in\overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}$. Чтобы завершить доказательство первого утверждения теоремы, можно воспользоваться формулой (43) для матричной функции $q(y)\equiv I$.

$$\mathbf{A}q(y)-q(y)=\mathbf{A}\left(\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{A}^tI\right)-\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{A}^tI=\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{A}^{t+1}I-\sum_{t=0}^{\infty}\mathbf{A}^tI=-I\,.$$

$(ii)\to(iii)$. Прежде всего заметим, что, если $q\in\overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}$, то в силу компактности $\mathbb{Y}$ и непрерывности этой матричной функции можно найти такое положительное число $c(q)$, что $c(q)I << q << \| q \| I$. Пусть эта матричная функция удовлетворяет (44). Тогда должно выполняться неравенство $\mathbf{A}q - q << -q/\| q \|$ или $\mathbf{A}^t q << r^t q$ для любого $t \in \mathbb{N}$, где $r = 1 - \| q \|^{-1} \in$ $\in (0,1)$. Следовательно,

$$\mathbf{A}^t I << \frac{1}{c(q)} \mathbf{A}^t q << \frac{r^t}{c(q)} q << \| q \| \frac{r^t}{c(q)} I$$

для всех $t \in \mathbb{N}$, т.е.

$$\sum_{t=0}^{m} \mathbf{A}^t I << \frac{\| q \|}{c(q)} \sum_{t=0}^{m} r^t I << \frac{\| q \|}{c(q)(1-r)} I$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{|x|=1,\, y \in \mathbb{Y}} \sum_{t=0}^{m} | ((\mathbf{A}^t g)(y)x, x) | < \infty \tag{45}$$

для любой матричной функции $g \in \mathbb{V}$. Поскольку линейный непрерывный оператор $\mathbf{A}$ оставляет инвариантным телесный конус $\mathbb{K}$, существует такая положительная точка спектра $\rho(\mathbf{A})$, что $\rho(\mathbf{A}) = \sup\{| z |,\, z \in \sigma(\mathbf{A})\}$, и этой точке спектра соответствует действительная собственная функция (матричная) $q_\rho \in \mathbb{K}$, т.е., $\mathbf{A} q_\rho = \rho(\mathbf{A}) q_\rho$ [7]. Поэтому, если $\rho(\mathbf{A}) \ge 1$, то

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{|x|=1,\, y \in \mathbb{Y}} \sum_{t=0}^{m} ((\mathbf{A}^t q_\rho)(y)x, x) = \infty .$$

Это противоречит (45).

$(iii) \to (i)$. Поскольку оператор $\mathbf{A}$ оставляет инвариантным конус $\mathbb{K}$, существует положительная точка спектра $\mathbf{r}(\mathbf{A})$, удовлетворяющая неравенству $\mathbf{r}(\mathbf{A}) = \max \mathbf{Re}\{\sigma(\mathbf{A})\}$ [7]. Следовательно, если $\mathbf{r}(\mathbf{A}) < 1$, то $\sigma(\mathbf{A}) \subset$ $\subset \{z \in \mathbb{C}: | z | < 1\}$, и тогда существуют такие константы $c > 0$ и $\lambda \in (0,1)$, что $\| \mathbf{A}^t \| \le c\lambda^t$ для всех $t \in \mathbb{N}$ [7]. Теперь можно воспользоваться неравенством

$$\mathbb{E} | x_{t+k}(k, x, y) |^2 = ((\mathbb{A}^t I)(y)x, x) \le c\lambda^t | x |^2 ,$$

и теорема доказана.

Если матричная функция $\{A(y),\; y \in \mathbb{Y}\}$ близка к постоянной и может быть представлена в форме равномерно сходящегося ряда (15), где $\varepsilon \in (0,1)$ — малый параметр, то можно повторить рассуждения для приводимости уравнения в среднем квадратичном, изменив размерность матрицы $\Lambda(\varepsilon)$ и матрицы-базиса $\mathbf{B}(\varepsilon)$ с n на $\frac{n(n+1}{2}$. К сожалению, это увеличение размерности существенно усложняет и без того громоздкие вычисления, и поэтому может оказаться полезным описанный ниже алгоритм анализа поведения вторых моментов решений уравнения (3). Этот алгоритм основан на применении утверждения (*iii*) теоремы 2, поскольку в соответствии с (*iii*) должно существовать изолированное положительное наибольшее по модулю собственное значение $\hat{\lambda}(\varepsilon)$ оператора (41). Если матрица (15) аналитически зависит от параметра ε, то этот оператор в некоторой окрестности $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ тоже аналитически зависит от ε, и его изолированное собственное значение $\hat{\lambda}(\varepsilon)$ можно представить [Kato] в виде ряда по степеням ε.

Для отыскания разложения $\hat{\lambda}(\varepsilon) := \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \cdots$ понадобится базис $\hat{\mathbf{B}}(\varepsilon)$ в корневом подпространстве этого собственного значения. Если собственное значение имеет алгебраическую кратность m, то базис состоит из m элементов пространства $\mathbb{V}$, и его удобно представить строкой $\hat{\mathbf{B}}(\varepsilon) := \{\hat{b}_1(\varepsilon), \hat{b}_2(\varepsilon), \ldots, \hat{b}_m(\varepsilon)\}$. При достаточно малом ε базис можно представить в форме ряда [5] $\hat{\mathbf{B}}(\varepsilon) := \hat{\mathbf{B}}_0 + \varepsilon\hat{\mathbf{B}}_1 + \varepsilon^2\hat{\mathbf{B}}_2 + \cdots$. Поскольку тотальный проектор в корневое подпространство также является аналитической функцией параметра ε, то матрицу $\hat{\Lambda}(\varepsilon)$ сужения $\hat{\mathbf{A}}(\varepsilon)$ оператора $\mathbf{A}(\varepsilon)$ на это подпространство также можно разложить в ряд $\hat{\Lambda}(\varepsilon) := \hat{\Lambda}_0 + \varepsilon\hat{\Lambda}_1 + \varepsilon^2\hat{\Lambda}_2 + \cdots$. С учетом изложенного выше выпишем уравнения для отыскания λ_j, $\hat{\Lambda}_j$ и $\hat{\mathbf{B}}_j$ при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\hat{\mathbf{A}}_0\hat{\mathbf{B}}_0 = \hat{\mathbf{B}}_0\hat{\Lambda}_0^T, \tag{46}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_0\hat{\mathbf{B}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_1\hat{\Lambda}_0^T = \hat{\mathbf{B}}_0\hat{\Lambda}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{B}}_0, \tag{47}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_0\hat{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{B}}_2\hat{\Lambda}_0^T = \hat{\mathbf{B}}_0\hat{\Lambda}_2^T + \hat{\mathbf{B}}_1\hat{\Lambda}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_0\hat{\mathbf{B}}_2 - \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{B}}_1. \tag{48}$$

Сделаем несколько замечаний о возможности упрощения вычислений. Так, представление матрицы $A(\varepsilon)$ в виде ряда по степеням параметра ε можно выбрать в таком виде, чтобы все собственные значения $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k\}$ матрицы A_0, равные по модулю ее спектральному радиусу $\rho_0 := \rho(A_0)$, были простыми. Здесь k — суммарная кратность выписанных выше собственных значений. В силу возможности представления пространства непрерывных $n \times n$-матричных функций в форме тензорного произведения $\mathbb{V} := \mathbb{C}(\mathbb{Y}) \otimes \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ и оператора $\mathbf{A}_0$ в виде тензорного произведения $\mathcal{P} \otimes A_0 \otimes A_0$, наибольшие по модулю собственные значения этого оператора образуют множество $\{\nu_j\nu_l,\ l = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,k\}$. А тогда наибольшее по модулю действительное собственное положительное значение оператора $\hat{\mathbf{A}}_0$ имеет вид [6] $\hat{\lambda}_0 = \rho_0^2$ и кратность $m = 2k$. Следовательно, в соответствующем собственному значению корневом подпространстве можно выбрать базис $\hat{\mathbf{B}}_0$ так, чтобы $\hat{\Lambda}_0^T = \rho_0^2 I$, где I — единичная $m \times m$-матрица. Используя этот базис, определим оператор

$$(\hat{\mathbf{L}}\mathbf{v})(y) := \hat{\mathbf{A}}_0\mathbf{v} - \rho_0^2\hat{\mathbf{v}} \tag{49}$$

и перепишем уравнение (47) в форме

$$(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{B}}_1)(y) = \hat{\mathbf{B}}_0\hat{\Lambda}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{B}}_0 . \tag{50}$$

Теперь к этому уравнению нужно применить теорему Фредгольма о нормальной разрешимости, используя сопряженное уравнение в пространстве матрично-значных мер, как было описано выше. Для того чтобы это имело решение, необходимо и достаточно ортогональности правой части уравнения для всех элементов ядра оператора $\mathbb{L}^*$. Итак, для разрешимости (50), учитывая $\mathbf{B}_0 = I$, достаточно обеспечить равенство

$$\int_{\mathbb{Y}}[\hat{\mathbf{B}}_0\hat{\Lambda}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{B}}_0]\mu(dy) = 0 , \tag{51}$$

откуда находим $\hat{\Lambda}_1$, подставляем в (50) и находим $\hat{\mathbf{B}}_1$. Затем переходим к следующему уравнению для определения $\hat{\Lambda}_2$ и $\hat{\mathbf{B}}_2$ и т.д. до достижения нужной точности.

УРАВНЕНИЕ С НЕЗАВИСИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Если последовательность $\{\xi_t, t \in \mathbb{N}\}$ состоит из независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение $p(dy)$, то ковариационный анализ (3) упрощается. В этом случае, как и при анализе первых моментов решений, приведенных выше, можно использовать сужение $\hat{\mathbf{A}}$ определенного формулой (41) оператора $\mathbf{A}$ на пространство постоянных действительных симметричных $n \times n$ -матриц $\mathbb{M}_n$

$$\hat{\mathbf{A}}q := \mathbb{E}\{A^T(y_t)\,qA(y_t)\} = \int_{\mathbb{Y}} A^T(y)qA(y)p(dy)$$

и конус положительно определенных матриц $\overset{\mathbf{o}}{\mathbf{K}}_n := \hat{\mathbb{M}}_n \cap \overset{\mathbf{o}}{\mathbb{K}}$.

Следствие 1. Пусть последовательность $\{\xi_t, t \in \mathbb{N}\}$ состоит из независимых случайных величин и выполнены остальные условия теоремы 2. Тогда следующие утверждения эквивалентны

(i) уравнение (3) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном;

(ii) существует такая матрица $q \in \overset{\mathbf{o}}{\mathbf{K}}$, что

$$\mathbf{A}q - q = -I ; \tag{52}$$

(iii) максимальная положительная точка спектра $\mathbf{r}\{\mathbf{A}\}$ оператора $\mathbf{A}$ меньше единицы.

Утверждение (iii) позволяет достаточно просто анализировать поведение решений скалярных разностных уравнеий m -го порядка

$$x_{n+m} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{k+1}x_{n+k} + c\sum_{k=0}^{m-1} h_{k+1}\xi_{n+k+1}x_{n+k} , \tag{53}$$

где $\{\xi_k\}$ — последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Это уравнение можно переписать в векторной форме в пространстве $\mathbb{R}^m$

$$\vec{X}_{n+1} = A\vec{X}_n + c\sum_{k=0}^{m-1}\xi_{n+k+1}H_{k+1}\vec{X}, \tag{54}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_1 \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{m-k} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В соответствии со следствием 1 второй момент любого решениия уравнения (54) экспоненциально убывает тогда и только тогда, когда для любого $0 \le \rho < 1$ существует положительно определенное матричное решение уравнения

$$A^T qA + c^2\sum_{k=1}^{m} H_k^T qH_k = \rho q .$$

Следовательно, если собственные значения матрицы A расположены внутри круга $\{|z|<1\}$, то существует такое положительное число $c^2 < \mathbf{r}^2$, что второй момент любого решения $\mathbb{E}|x_n|^2$ уравнения (53) стремится к нулю при $n \to \infty$, но при $c^2 > \mathbf{r}^2$ найдется решение, которое неограниченно возрастает. Подставим это число $\mathbf{r}^2$ в предыдущее матричное уравнение

$$A^T qA + \mathbf{r}^2\sum_{k=1}^{m} h_k^T qH_k - q = 0 \tag{55}$$

и перепишем его в виде системы уравнений для элементов матрицы $q := \{q_{sj}\}$

$$q_{11} = q_{22}, q_{12} = q_{23},\dots,q_{1m-1} = q_{2m}, q_{1m} = \sum_{i=1}^{m} q_{2i}a_i ,$$

$$q_{22} = q_{33}, q_{23} = q_{34},\dots,q_{2m-1} = q_{3m}, q_{2m} = \sum_{i=1}^{m} q_{3i}a_i ,$$

....

$$q_{mm} = (a_1^2 + \mathbf{r}^2h_1^2)q_{11} + \ldots + (a_m^2 + \mathbf{r}^2h_m^2)q_{mm} +$$
$$+ 2a_m a_{m-1}q_{12} + \ldots + 2a_m a_1 q_{1m} + 2a_{m-1}a_{m-2}q_{23} + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{m-1}a_1 q_{2m} + \ldots + 2a_2 a_1 q_{m-1m} .$$

Из этих равенств можно найти форму матрицы-решения

$$q=\begin{pmatrix} q_{mm} & q_{m-1m} & q_{m-2m} & \cdots & q_{3m} & q_{2m} & q_{1m} \\ q_{m-1m} & q_{mm} & q_{m-1m} & \cdots & q_{4m} & q_{3m} & q_{2m} \\ q_{m-2m} & q_{m-1m} & q_{mm} & \cdots & q_{5m} & q_{4m} & q_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \dots \\ q_{3m} & q_{4m} & q_{5m} & \cdots & q_{mm} & q_{m-1m} & q_{m-2m} \\ q_{2m} & q_{3m} & q_{4m} & \cdots & q_{m-1m} & q_{mm} & q_{m-1m} \\ q_{1m} & q_{2m} & q_{3m} & \cdots & q_{m-2m} & q_{m-1m} & q_{mm} \end{pmatrix},$$

и тогда из (55) легко получить систему m линейных уравнений для чисел q_{jm}, $j=1,2,...,m$

$$q_{im}-\sum_{l=1}^{i}a_l q_{(m-i-1+l)m}-\sum_{l=1}^{m-i}a_{m-i-l+1}q_{(m-l+1)m}=0,\ i=1,2,...,m-1, \tag{56}$$

$$q_{mm}(1-\sum_{i=1}^{m}(a_{m-i+1}^2+\mathbf{r}^2h_{m-i+1}^2))-2\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{l}a_{m-l+1}a_{l-s+1}q_{lm}=0. \tag{57}$$

В силу существования числа $\mathbf{r}^2$ это уравнение должно иметь нетривиальное решение, и поэтому детерминант системы уравнений (56), (57) должен быть равен нулю. Из формы анализируемой системы уравнений можно сделать вывод, что ее детерминант является линейной функцией параметра $\mathbf{r}^2$, и найти это число в форме отношения двух определителей. Проиллюстрируем приведенный алгоритм на примере анализа существования, имеющего второй момент устойчивого стационарного процесса $\text{GARCH}(p,q)$ [3], заданного формулой (2). Пусть $\hat{\sigma}_t^2$ — стационарный процесс, удовлетворяющий (2) и $x_t:=\sigma_t^2-\hat{\sigma}_t^2$. Если существует $s^4:=\mathbf{E}\{(\varepsilon_1^2-1)^2\}$, то для x_t можно записать разностное уравнение вида (53), где $\xi_t:=(\varepsilon_t^2-1)s^{-2}$, $c=s^2$, $m=\max\{p,q\}$,

$$a_k=\begin{cases}\phi_k+\theta_k, & \text{если}\quad p\le q=m,\quad k=1,2,...,p,\\ \phi_k, & \text{если}\quad p<q=m,\quad k=p+1,p+2,...,m,\\ \theta_k, & \text{если}\quad q<p=m,\quad k=q+1,q+2,...,m,\end{cases}$$

$h_k=\theta_k$ при $k=1,2,...,q$ и $h_k=0$ при $k>q$. Ясно, что любой удовлетворяющий (2) процесс сходится к стационарному тогда и только тогда, когда второй момент решений уравнения (53) стремится к нулю при $t\to\infty$. Применив следствие 2, можно найти число $\mathbf{r}^2$ и сравнить его с $c^2:=s^4$. Если выполняется неравенство $s^4<\mathbf{r}^2$, то заданный уравнением (2) $\text{GARCH}(p,q)$-процесс сходится к стационарному при $t\to\infty$. Можно также показать, что это условие является и необходимым для существования безусловного второго момента условной дисперсии σ_t^2. Несмотря на громоздкие вычисления, предлагаемый алгоритм достаточно прост и всегда приведет к желаемому результату. Он особенно просто выглядит для малых значений p и q. Например, для модели $\mathrm{GARCH}(2,1)$ система уравнений для отыскания $\mathbf{r}^2$ имеет вид

$$q_{12}(a_2-1)+a_1q_{22}=0\,,$$

$$2a_1a_2q12-(1-a_1^2-a_2^2-\mathbf{r}^2b_1^2)q_{22}=0\,.$$

Подставив $a_1=\phi_1+\theta_1$, $a_2=\phi_2$, $b_1=\theta_1$ и приравняв к нулю определитель этой системы уравнений, находим критическое значение $\mathbf{r}^2$.

$$\mathbf{r}^2=-\frac{\begin{vmatrix}a_2-1 & a_1\\ 2a_1a_2 & a_1^2+a_2^2-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2-1 & a_1\\ 0 & b_1^2\end{vmatrix}}=\frac{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-(\phi_1+\theta_1)^2]}{\theta_1^2(1-\phi_2)}\,.$$

Следовательно, стационарный GARCH(2,1)-процесс со вторым моментом условной дисперсии существует тогда и только тогда, когда четвертый момент $s^4:=\mathbb{E}\{(\varepsilon_1^2-1)^2\}$ случайных возмущений $\{\varepsilon_k\}$ удовлетворяет неравенству

$$s^4<\frac{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-(\phi_1+\theta_1)^2]}{\theta_1^2(1-\phi_2)}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carkova V., Goldsteine J.* On mean square stability of linear Markov difference equations // Proceedings of the 3rd International conference Aplimat, Slovak University of Technology, Bratislava, 2004.
2. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators. Part I: General Theory, Interscience Publishers. — NY, London. — 1958.
3. *Changli H., Terӓsvirta T.* Fourth moment structure of the GARCH(*p*,*q*) process // Econometric Theory. — 1999. — **15**.
4. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis // Princeton University Press. — Princeton. — 1994.
5. *Kato T.* Perturbations Theory for Linear Operators. — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1966.
6. *Katafygiotis L., Tsarkov Ye.* Mean square stability of linear dynamical systems with small Markov perturbations.II. Diffusion coefficients // Random Oper. and Stoch. Equ. — 1996. — № 4.
7. *Krein M.G.,Ruthman M.A.* The linear operators leaving as invariant cone in Banach space // Russian Math. Survey. — 1947. — **3,** № 1–3.
8. *Nevelson M.B., Khasminskij R.Z.* it Stochastic Approximation and Recurrent Evaluation. — Moscow: Nauka (Russian), 1972.
9. *Shiryayev A.N.* Basis of Stochastic Finansial Mathematics. Facts. Models. — Moscow: Fazis (Russian), 1998.
10. *Tsarkova V.* Convergence of Stochastic Iterations. — Riga: Latvian University (Russian), 1979.
11. *Tsarkova V., Berdichevska M.* Averaging and stability of linear difference equations with Markov coefficients // Proceedings of the Latvian Probability Seminar. — Riga: RTU, 1993.

Поступила 01.06.2006