УДК 519.873

ОПТИМАЛЬНОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ С НАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ И УЧЕТОМ НАРАБОТКИ КАЖДОГО ЭЛЕМЕНТА

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ

Построена полумарковская модель технического обслуживания системы параллельной структуры с учетом суммарной наработки на отказ каждого элемента. Найдены стационарные показатели качества функционирования системы. Определены оптимальные величины наработок элементов для проведения предупредительного технического обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время оптимальная организация обслуживания сложных технических систем — актуальная задача. Обзор результатов по различным стратегиям технического обслуживания (ТО) систем содержится, например, в работах [1–4]. В монографии [4] исследована задача оптимального управляющего воздействия на эксплуатацию цепочки последовательно соединенных элементов с учетом наработки на отказ всей системы и систем с облегченным и ненагруженным резервом.

В данной статье исследуются стратегии ТО многокомпонентной восстанавливаемой системы с нагруженным резервированием и учетом суммарной наработки на отказ каждого ее элемента. Относительно длительностей безотказной работы элементов, их восстановлений и ТО предполагается, что они являются случайными величинами с распределениями общего вида. Индикация отказа осуществляется мгновенно. Для решения задачи привлекается аппарат полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний. Находится стационарное распределение вложенной цепи Маркова, определяются стационарные характеристики функционирования системы: коэффициент технического использования, средний удельный доход на единицу календарного времени, средние удельные затраты на единицу времени исправного функционирования системы. Решается задача определения оптимальной периодичности обновлений каждого элемента в зависимости от его «возраста жизни» с целью достижения экстремальных значений указанных показателей качества функционирования системы.

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим N-компонентную восстанавливаемую систему с нагруженным резервом. Время безотказной работы каждого элемента системы — случайная величина (СВ) α_i с функцией распределения (ФР) $F_i(t)=P(\alpha_i \le t)$,

$i=\overline{1,N}$. Индикация отказа элемента осуществляется мгновенно и начинается его восстановление (аварийное), которое длится случайное время β_i с ФР $G_i(t)=P(\beta_i \le t)$, $i=\overline{1,N}$. Предполагается, что в момент, когда суммарная наработка i-го элемента («возраст жизни») достигает уровня τ_i, начинается его предупредительное ТО, длительность которого СВ β_i^p с ФР $G_i^p(t)=$ $=P(\beta_i^p \le t)$. Как после ТО, так и после аварийного восстановления, все надежностные характеристики элементов полностью обновляются. Считается, что все СВ независимы, имеют абсолютно непрерывные ФР и конечные математические ожидания $M\alpha_i$, $M\beta_i$, $M\beta_i^p$. Обозначим c_i^0, c_i и c_i^p $(i=\overline{1,N})$ соответственно доход за единицу времени исправного функционирования, плату за единицу времени аварийного восстановления и за единицу времени ТО i-го элемента системы.

Требуется определить следующие показатели качества функционирования системы: стационарный коэффициент технического использования $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$, среднюю удельную прибыль $S(\tau_1,...,\tau_N)$ на единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau_1,...,\tau_N)$ на единицу времени исправного функционирования, а также определить величины суммарных наработок τ_i элементов, при достижении которых следует проводить ТО элементов, для того чтобы указанные показатели качества функционирования системы имели оптимальные значения.

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [5,6]

$$E=\left\{ i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u},\ \ i=\overline{1,N}\right\},$$

где компоненты вектора $\overline{d}=(d_1,...,d_N)$ указывают на «физические» состояния элементов: $d_k=1$ — k-й элемент находится в работоспособном состоянии; $d_k=0$ — в состоянии аварийного восстановления; $d_k=2$ — в состоянии ТО; i — номер элемента, изменившего свое «физическое» состояние последним. Компоненты вектора $\overline{x}^{(i)}$ фиксируют время от последнего изменения состояния i-го элемента до ближайших моментов изменения состояний остальных элементов $(x_i=0)$. Причем, если $d_k=1$, то x_k — время до ближайшего аварийного отказа k-го элемента. Компоненты вектора $\overline{u}=(u_1,...,u_N)$ равны суммарным наработкам соответствующих элементов в момент последнего изменения состояния системы. Если $d_k=2$, то считается, что $u_k=\tau_k$. В момент восстановления работоспособности i-го элемента после его ТО, наработка элемента равна нулю: $u_i=0$.

Времена пребывания системы в состояниях определяются формулами

$$\theta_{i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}}=\gamma_i^{(d_i)}\wedge \underset{k\neq i}{\Lambda}\, x_k \underset{k\in\Omega_d^1}{\Lambda}\left(\tau_k-u_k\right),$$

где Λ — знак минимума; Ω_d^1 — совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных 1,

$$\gamma_i^{(d_i)} = \begin{cases} \alpha_i, & d_i = 1, \\ \beta_i, & d_i = 0, \\ \beta_i^{\,p}, & d_i = 2. \end{cases}$$

Опишем вероятности (плотности вероятностей) переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n,\ n \ge 0\}$. Заметим, что i-й элемент из физического состояния 1 может перейти в состояние 0(аварийное восстановление) и в состояние 2 (ТО), а из состояний 0 и 2 — только в состояние 1.

Обозначим $z_i = \underset{k \ne i}{\Lambda} x_k \wedge \underset{k \in \Omega_d^1}{\Lambda} (\tau_k - u_k)$, а Ω_d^0, Ω_d^2 — совокупность номеров компонент вектора $\overline{d}$, равных соответственно 0 и 2. Из состояния $i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}$, $i = \overline{1, N}$, переходы бывают следующих типов:

а) в состояния $i\overline{d'}\ \overline{x}^{(i)}\overline{u'}$, $d_i' \ne 2$ с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}} = \psi_i^{(d_i)}(z_i - y)$, где $y < z_i, \psi_i^{(d_i)}(\cdot)$ — плотность распределения вероятностей СВ $\gamma_i^{(d_i)}$, $d_k' = d_k$, $x_k' = x_k - (z_i - y)$, $k \ne i$,

$$u_k' = \begin{cases} u_k + z_i - y, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \ne i, \quad u_i' = \begin{cases} u_i + z_i - y, & i \in \Omega_d^1, \\ u_i & i \in \Omega_d^0, \\ 0 & i \in \Omega_d^2; \end{cases}$$

б) в состояния $i\overline{d'}\ \overline{x'}^{(i)}\overline{u'}$, $d_i = 1$, $d_i' = 2$ с вероятностью перехода $P_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{i\overline{d'}\overline{x'}^{(i)}\overline{u'}} = \overline{F}_i(\tau_i - u_i)$, где $d_k' = d_k$, $x_k' = x_k - (\tau_i - u_i)$, $k \ne i$,

$$u_k' = \begin{cases} u_k + \tau_i - u_i, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2; \end{cases}$$

в) в состояния $j\overline{d'}\ \overline{x'}^{(j)}\overline{u'}$, $j \ne i$ с плотностью вероятности перехода $p_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}}^{j\overline{d'}\overline{x'}^{(j)}\overline{u'}} = \psi_i^{(d_i)}(z_i + y)$, где $y > 0$, $d_k' = d_k$, $k \ne j$, $x_i' = y$, $x_k' = x_k - z_i$, $k \ne i, j$,

$$u_j' = \begin{cases} u_j + z_i, & j \in \Omega_d^1,\ d_j' \ne 2, \\ \tau_j, & j \in \Omega_d^1,\ d_j' = 2, \\ u_j, & j \in \Omega_d^0, \\ 0, & j \in \Omega_d^2, \end{cases} \qquad u_k' = \begin{cases} u_k + z_i, & k \in \Omega_d^1, \\ u_k, & k \in \Omega_d^0, \\ \tau_k, & k \in \Omega_d^2, \end{cases} \quad k \ne j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ

Разобьем фазовое пространство E состояний системы на два непересекающихся подмножества E_+ и E_-: E_+ — работоспособных состояний; E_- — отказовых состояний. Подмножество E_+ содержит состояния, в которых хотя бы один элемент системы работоспособен, а подмножество E_- — состояния, в которых все элементы находятся в состоянии аварийного восстановления либо в состоянии ТО.

$$E_+ = \left\{ i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}, \Omega_d^1 \neq \varnothing,\ \ i = \overline{1,N} \right\}, \quad E_- = \left\{ i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}, \Omega_d^1 = \varnothing,\ \ i = \overline{1,N} \right\}.$$

Среднюю стационарную наработку на отказ T_+, среднее стационарное время восстановления T_- и стационарный коэффициент технического использования (КТИ) K_u системы найдем по формулам [5]

$$\mathrm{T}_+ = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_-} \rho(dz)P(z,\mathrm{E}_+)}, \quad \mathrm{T}_- = \frac{\int\limits_{\mathrm{E}_-} m(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_-} \rho(dz)P(z,\mathrm{E}_+)}, \quad K_u = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{1}$$

где $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$; $m(z)$ — средние времена пребывания в состояниях системы; $P(z,\mathrm{E}_+)$ — вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ из отказовых состояний в работоспособные.

Предположим, что для ВЦМ $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ выполняются условия существования и единственности стационарного распределения [5]. Докажем следующую теорему.

Теорема. Стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n,\ n \geq 0\}$ определяется формулами

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u} \right) = \rho \prod_{k \in \Omega_d^0} h_k(u_k)\overline{G}_k(x_k) \prod_{k \in \Omega_d^1} v_k(u_k, x_k) \prod_{k \in \Omega_d^2} \overline{G}_k^p(x_k),\ \ i = \overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{N} \left(1 + H_i(\tau_i)\right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \left(\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k) \right) \right]^{-1},$$

где $\overline{G}_k(x_k) = 1 - G_k(x_k)$, $\overline{G}_k^p(x_k) = 1 - G_k^p(x)$, $h_k(u_k)$ — плотность функции восстановления $H_k(u_k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F^{*(n)}(u_k)$; $v_k(u_k, x_k) = f_k(u_k + x_k) + \int\limits_0^{u_k} f_k(u_k + x_k - s)h_k(s)ds$ — плотность прямого остаточного времени восстановления рекуррентного потока, порожденного СВ α_k, $v_k(0,0) \equiv 1$.

Доказательство. По определению стационарного распределения плотность $\rho(\cdot)$ удовлетворяет следующей системе интегральных уравнений:

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=f_m(x_m+u_m)\rho\left(m\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{u_m})^{(m)}\overline{u''}\right)+$$

$$+\int_0^{u_m} f_i(t)\rho\left(i\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(i)}\overline{u'}\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_0^{u_m}\psi_j^{\left(d_j'\right)}\left(t+x_j\right)\rho\left(j\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(j)}\overline{u'}\right)dt,\quad x_i=0,\ d_i=0,\ i=\overline{1,N}, \quad (3)$$

$$d_i'=1,\ d_k'=d_k,\ k\neq i,\ u_m=\bigwedge_{k\in\Omega_d^1}u_k\wedge u_i,$$

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=\int_0^{\infty} f_m(x_m+u_m)\,\rho\left(m\overline{d'}(\overline{x}+\overline{u_m})^{(m)}\overline{u''}\right)dx_i+$$

$$+\int_0^{u_m}\overline{F}_i(t)\rho\left(i\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(i)}\overline{u'}\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_0^{u_m}\psi_j^{\left(d_j'\right)}\left(t+x_j\right)dt\int_0^{\infty}\rho\left(j\overline{d'}(\overline{x}+\overline{t})^{(j)}\overline{u'}\right)dx_i,\quad d_i=2,\ i=\overline{1,N},$$

$$d_i'=1,\ d_k'=d_k,\ k\neq i,\ u_m=\bigwedge_{k\in\Omega_d^1}u_k\wedge\tau_i,$$

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=f_m(x_m+u_m)\rho\left(m\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{u_m})^{(m)}\overline{u''}\right)+$$

$$+\int_0^{u_m}\psi_i^{\left(d_i'\right)}(t)\rho\left(i\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(i)}\overline{u'}\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_0^{u_m}\psi_j^{\left(d_j'\right)}\left(t+x_j\right)\rho\left(j\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(j)}\overline{u'}\right)dt,\quad d_i=1,\ i=\overline{1,N};$$

$$d_i'=\begin{cases}2, & u_i=0,\\ 0, & u_i>0,\end{cases}\quad d_k'=d_k,\ k\neq i,\ u_m=\bigwedge_{\substack{k\in\Omega_d^1\\ k\neq i}}u_k,\ \Omega_d^1-\{i\}\neq\varnothing,$$

$$u_k'=\begin{cases}u_k-t, & k\in\Omega_{d'}^1,\\ u_k, & k\notin\Omega_{d'}^1,\end{cases}\qquad u_k''=\begin{cases}u_k-u_m, & k\in\Omega_{d'}^1,\\ u_k, & k\notin\Omega_{d'}^1,\end{cases}$$

$$\rho\left(i\overline{d}\,\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)=\int_0^{\infty}\psi_i^{\left(d_i'\right)}(t)\rho\left(i\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})\overline{u}\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_0^{\infty}\psi_j^{(d_j')}\left(t+x_j\right)\rho\left(j\overline{d'}(\overline{x}^{(i)}+\bar{t})^{(j)}\overline{u}\right)dt\,,$$

$$d_i=1,\ i=\overline{1,N},\ d_i'=\begin{cases}2, & u_i=0,\\ 0, & u_i>0,\end{cases}\quad d_k'=d_k,\ k\neq i,\ \Omega_d^1-\{i\}=\varnothing\,.$$

Непосредственной подстановкой убедимся, что функции (2) удовлетворяют первым N уравнениям системы.

$$\int_0^{u_m}f_i(t)h_i(u_i-t)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\neq i}}v_k\left(u_k-t,\ x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+t\right)dt+$$

$$+\sum_{\substack{j\in\Omega_{d'}^1\\ j\neq i}}\int_0^{u_m}f_j(t+x_j)h_j(t+x_j)v_i(u_i-t,t)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\neq i,j}}v_k\left(u_k-t,\ x_k+t\right)\times$$

$$\times\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+t\right)dt+\sum_{j\in\Omega_{d'}^0}\int_0^{u_m}g_j(t+x_j)\times$$

$$\times\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ x_i=0}}v_k\left(u_k-t,\ x_k+t\right)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^0\\ k\neq j}}\overline{G}_k\left(x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+t\right)dt+$$

$$+\sum_{j\in\Omega_{d'}^2}\int_0^{u_m}g_j^{\,p}(t+x_j)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ x_i=0}}v_k\left(u_k-t,\ x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+t\right)\times$$

$$\times\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^2\\ k\neq j}}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+t\right)dt+f_m(x_m+u_m)\times$$

$$\times\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\neq m\\ x_i=0}}v_k\left(u_k-u_m,\ x_k+u_m\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+u_m\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+u_m\right)=$$

$$=-\int_0^{u_m}\frac{d}{dt}\left[\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ x_i=0}}v_k\left(u_k-t,\ x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+t\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^2}\overline{G}_k^{\,p}\left(x_k+t\right)\right]dt+$$

$$+f_m(x_m+u_m)\prod_{\substack{k\in\Omega_{d'}^1\\ k\neq m\\ x_i=0}}v_k\left(u_k-u_m,\ x_k+u_m\right)\prod_{k\in\Omega_{d'}^0}h_k\left(u_k\right)\overline{G}_k\left(x_k+u_m\right)\times$$

$$\times \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k+u_m) = \prod_{\substack{k\in\Omega^1_{d'}\\ x_i=0}} v_k(u_k,\, x_k) \prod_{k\in\Omega^0_{d'}} h_k(u_k)\overline{G}_k(x_k) \prod_{k\in\Omega^2_{d'}} \overline{G}^p_k(x_k) =$$

$$= \prod_{k\in\Omega^1_d} v_k(u_k,\, x_k) \prod_{\substack{k\in\Omega^0_d\\ x_i=0}} h_k(u_k)\overline{G}_k(x_k) \prod_{k\in\Omega^2_d} \overline{G}_k(x_k) = \frac{1}{\rho}\,\rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right).$$

Аналогично можно убедиться, что формулы (2) определяют решения остальных уравнений системы. Постоянная ρ находится из условия нормировки.

Найдем значения интегралов, входящих в формулы (1).

$$\int_{E_-} \rho(dz)P(z, \mathrm{E}_+) = \int_{E_-} \rho(dz) = \rho\sum_{i=1}^{N}\left(1+H_i(\tau_i)\right)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{N}\left(M\beta^p_k + M\beta_k H_k(\tau_k)\right). \quad (4)$$

Средние времена пребывания системы в состояниях подмножества E_- определяются так:

$$M\theta_{i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}} = \int_0^{x^i} \overline{\Psi}^{(d_i)}_i(t)dt\,, \quad (5)$$

где $\overline{\Psi}^{(d_i)}_i(t) = 1-\Psi^{(d_i)}_i(t)$; $\Psi^{(d_i)}_i(t)$ — ФР СВ $\gamma^{(d_i)}_i$; $x^i = \underset{\substack{k=1\\ k\neq i}}{\overset{N}{\Lambda}} x_k$; $d_i = 0{,}2$.

Обозначим D_- множество векторов $\overline{d}$, компоненты которых равны кодам «физических» состояний элементов системы, находящейся в подмножестве отказовых состояний E_-.

$$D_- = \left\{\overline{d}\,\middle|\, d_k = 0{,}2,\ k=\overline{1,N}\right\},\quad R^\tau_{\Omega^0} = \left\{u_k\,\middle|\, 0\le u_k\le\tau_k,\ \ k\in\Omega^0_d\right\}.$$

Учитывая формулы (2) и (5), получаем

$$\frac{1}{\rho}\int_{E_-} m(z)\rho(dz) = \sum_{\overline{d}\in D_-}\sum_{i=1}^{N}\int_{R^\tau_{\Omega^0}} d\overline{u} \int_{R^{N,i}_+} \rho\left(i\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right)d\overline{x}^{(i)}\int_0^{x^i}\overline{\Psi}^{(d_i)}_i(t)\,dt =$$

$$= \sum_{\overline{d}\in D_-}\left[\sum_{i\in\Omega^0_d}\int_{R^\tau_{\Omega_0}} d\overline{u}\int_{R^{N,i}_+}\prod_{k\in\Omega^0_d} h_k(u_k)\prod_{\substack{k\in\Omega^0_d\\ k\neq i}}\overline{G}_k(x_k)\prod_{k\in\Omega^2_d}\overline{G}^p_k(x_k)\,d\overline{x}^{(i)}\int_0^{x^i}\overline{G}_i(t)dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in\Omega^2_d}\int_{R^\tau_{\Omega^0_d}} d\overline{u}\int_{R^{N,i}_+}\prod_{k\in\Omega^0_d} h_k(u_k)\overline{G}_k(x_k)\prod_{\substack{k\in\Omega^2_d\\ k\neq i}}\overline{G}^p_k(x_k)\,d\overline{x}^{(i)}\int_0^{x^i}\overline{G}^p_i(t)dt\right] =$$

$$= -\sum_{\bar d \in D_-} \prod_{k\in\Omega_d^0} H_k(\tau_k) \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[\prod_{k\in\Omega_d^0} \int_t^\infty \overline{G}_k(t)\,dt \prod_{k\in\Omega_d^2} \int_t^\infty \overline{G}_k^{\,p}(x_k)\,dx_k\right] dt =$$

$$= \sum_{\bar d \in D_-} \prod_{k\in\Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p = \prod_{k=1}^{N}\left[M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right]. \qquad (6)$$

Средние времена пребывания системы в работоспособных состояниях вычисляются по формулам

$$M\theta_{i\bar d\bar x^{(i)}\bar u} = \int_0^{x^i \wedge u_1} \overline{\Psi}_i^{(d_i)}(t)\,dt\,,$$

где $u^1 = \Lambda_{k\in\Omega_d^1}\left(\tau_k - u_k\right)$.

Аналогично (6) находим

$$\frac{1}{\rho}\int_{E_+} m(z)\rho(dz) = \sum_{\bar d\in D_+}\sum_{i=1}^{N}\int_{R_{10}^{\tau}} d\bar u \int_{R_+^{N,i}} \rho\left(i\bar d\bar x^{(i)}\bar u\right) d\bar x^{(i)} \int_0^{x^i\wedge u^1} \overline{\Psi}_i^{(d_i)}(t)\,dt =$$

$$= \sum_{\bar d\in D_+} \prod_{k\in\Omega_d^1} \tau_k \prod_{k\in\Omega_d^0} M\beta_k H_k(\tau_k) \prod_{k\in\Omega_d^2} M\beta_k^p =$$

$$= \prod_{k=1}^{N}\left(\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right) - \prod_{k=1}^{N}\left(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right), \qquad (7)$$

$$D_+ = \left\{\bar d \,\middle|\, k\in\Omega_d^1 \neq \varnothing\right\},\ R_{10}^{\tau} = \left\{0 \le u_k \le \tau_k,\ k\in\Omega_d^0,\ k\in\Omega_d^1\right\}.$$

Формулы (4), (6) и (7) позволяют определить среднюю стационарную наработку на отказ, среднее стационарное время восстановления и стационарный коэффициент технического использования системы.

$$T_+ = \frac{\prod_{k=1}^{N}\left(\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right) - \prod_{k=1}^{N}\left(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(1 + H_i(\tau_i)\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right)},$$

$$T_- = \frac{\prod_{k=1}^{N}\left(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(1 + H_i(\tau_i)\right)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\left(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\right)},$$

$$K_u(\tau_1,...,\tau_N)=1-\prod_{k=1}^{N}\frac{M\beta_k^p+M\beta_k H_k(\tau_k)}{\tau_k+M\beta_k^p+M\beta_k H_k(\tau_k)}. \tag{8}$$

Заметим, что КТИ системы $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$ и $K_i(\tau_i)$ элементов связаны формулой

$$K_u(\tau_1,...,\tau_N)=1-\prod_{i=1}^{N}(1-K_i(\tau_i)).$$

Здесь [4]

$$K_i(\tau_i)=\frac{\tau_i}{\tau_i+M\beta_i^p+M\beta_i H_i(\tau_i)}. \tag{9}$$

Для определения среднего удельного дохода $S(\tau_1,...,\tau_N)$ на единицу календарного времени и средних удельных затрат $C(\tau_1,...,\tau_N)$ на единицу времени исправного функционирования системы используем формулы [7]

$$S=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)f_s(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)\rho(dz)},\quad C=\frac{\int\limits_{\mathrm{E}} m(z)f_c(z)\rho(dz)}{\int\limits_{\mathrm{E}_+} m(z)\rho(dz)}, \tag{10}$$

где $f_s(z)$, $f_c(z)$ — функции, определяющие соответственно доход и затраты в каждом состоянии.

Функции $f_s(z)$ и $f_c(z)$ с учетом обозначений, введенных в постановочной части статьи, имеют вид

$$f_s(z)=\begin{cases} -\sum\limits_{i\in\Omega_d^0}c_i-\sum\limits_{i\in\Omega_d^2}c_i^p, & z\in\left\{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right\},\quad i=\overline{1,N},\ \text{если}\quad \Omega_d^1=\varnothing,\\ \sum\limits_{i\in\Omega_d^1}c_i^0-\sum\limits_{i\in\Omega_d^0}c_i-\sum\limits_{i\in\Omega_d^2}c_i^p, & z\in\left\{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right\},\quad i=\overline{1,N},\ \text{если}\quad \Omega_d^1\neq\varnothing; \end{cases}$$

$$f_c(z)=\begin{cases} \sum\limits_{i\in\Omega_d^0}c_i+\sum\limits_{i\in\Omega_d^2}c_i^p, & z\in\left\{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right\},\quad i=\overline{1,N},\quad \text{если}\ \ \Omega_d^0\cup\Omega_d^2\neq\varnothing,\\ 0, & z\in\left\{\overline{i}\overline{d}\overline{x}^{(i)}\overline{u}\right\},\quad i=\overline{1,N},\quad \text{если}\ \ \Omega_d^0\cup\Omega_d^2=\varnothing. \end{cases}$$

Используя формулы (10), получаем

$$S(\tau_1,...,\tau_N)=\sum_{i=1}^{N}\frac{c_i^0\tau_i-c_i^pM\beta_i^p-c_i\,M\beta_i\,H_i(\tau_i)}{\tau_i+M\beta_i^p+M\beta_i\,H_i(\tau_i)}=\sum_{i=1}^{N}S_i(\tau_i), \tag{11}$$

где $S_i(\tau_i)=\dfrac{c_i^0\tau_i-c_i^pM\beta_i^p-c_i\,M\beta_i\,H_i(\tau_i)}{\tau_i+M\beta_i^p+M\beta_i\,H_i(\tau_i)}$ — средний удельный доход i-го элемента на единицу календарного времени,

$$C(\tau_1,...,\tau_N)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\Bigl(c_i^p M\beta_i^p + c_i\, M\beta_i\, H_i(\tau_i)\Bigr)\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}\Bigl(\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\Bigr)}{\prod\limits_{k=1}^{N}\Bigl(\tau_k + M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\Bigr)-\prod\limits_{k=1}^{N}\Bigl(M\beta_k^p + M\beta_k H_k(\tau_k)\Bigr)}.$$

Средние удельные затраты $C(\tau_1,...,\tau_N)$ системы связаны со средними удельными затратами $C_i(\tau_i)$ i-го элемента формулой

$$C(\tau_1,...,\tau_N)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}C_i(\tau_i)K_i(\tau_i)}{1-\prod\limits_{j=1}^{N}\bigl(1-K_j(\tau_j)\bigr)}, \qquad (12)$$

где $K_i(\tau_i)$ — КТИ i-го элемента (8),

$$C_i(\tau_i)=\frac{c_i^p M\beta_i^p + c_i\, M\beta_i H_i(\tau_i)}{\tau_i}.$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СРОКОВ ПРОВЕДЕНИЯ ТО ЭЛЕМЕНТОВ

Задача определения оптимальных показателей качества функционирования системы сводится к отысканию абсолютных экстремумов функций (8), (11) и (12). Приравнивая нулю частные производные функций $K_u(\tau_1,...,\tau_N)$, $S(\tau_1,...,\tau_N)$ и $C(\tau_1,...,\tau_N)$, получаем соответственно системы уравнений (13)−(15) для определения оптимальных значений наработок τ_i^k, τ_i^s, τ_i^c, $i=\overline{1,N}$.

$$\tau_i h_i(\tau_i)-H_i(\tau_i)=\frac{M\beta_i^p}{M\beta_i},\ \ i=\overline{1,N}, \qquad (13)$$

$$h_i(\tau_i)\left(\tau_i+\frac{c_i-c_i^p}{c_i+c_i^p}M\,\beta_i^p\right)-H_i(\tau_i)=\frac{M\beta_i^p}{M\beta_i}\,\frac{c_i^p+c_i^0}{c_i+c_i^0},\ \ i=\overline{1,N}, \qquad (14)$$

$$\bigl(\tau_i h(\tau_i)-H_i(\tau_i)\bigr)\bigl(c_i\bigl(1-K_i(\tau_i)\bigr)+C(\tau_1,...,\tau_N)\bigl(1-K_u(\tau_1,...,\tau_N)\bigr)\bigr)=$$

$$=\frac{M\beta_i^p}{M\beta_i}\Bigl[C(\tau_1,...,\tau_N)\bigl(1-K_u(\tau_1,...,\tau_N)\bigr)+\bigl(1-K_i(\tau_i)\bigr)\times$$

$$\times\Bigl(c_i^p+(c_i^p-c_i)M\beta_i h_i(\tau_i)\Bigr)\Bigr],\ \ i=\overline{1,N}. \qquad (15)$$

В случае существования единственных решений этих систем уравнений оптимальные значения показателей качества функционирования системы определяются формулами

$$K_{u\max} = 1 - \prod_{i=1}^{N} \frac{M\beta_i h_i\left(\tau_i^k\right)}{1 + M\beta_i h_i\left(\tau_i^k\right)}, \quad S_{\max} = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i^0 - c_i M\beta_i h_i\left(\tau_i^s\right)}{1 + M\beta_i h_i\left(\tau_i^s\right)},$$

$$C_{\min} = \frac{\sum_{i=1}^{N} C_i\left(\tau_i^c\right) K_i\left(\tau_i^c\right)}{K_u\left(\tau_1^c, ..., \tau_N^c\right)}.$$

Если системы уравнений имеют несколько решений, оптимальные значения показателей качества находятся подстановкой каждого из них в формулу для случая единственного решения с последующим выбором наилучшего из них. Если какая-либо компонента решения системы (13)–(15) равна ∞, тогда в соответствующих слагаемых формул (8), (11) и (12) следует заменить $h_j(\infty)$ и $\frac{H_j(\infty)}{\infty}$ на $\frac{1}{M\alpha_j}$.

Заметим, что для достижения максимальных значений КТИ $K_u(\tau_1, ..., \tau_N)$ и среднего удельного дохода $S(\tau_1, ..., \tau_N)$ системы необходимо и достаточно оптимизировать величину наработки каждого элемента системы, чего нельзя утверждать относительно минимальных средних удельных затрат $C(\tau_1, ..., \tau_N)$.

В дальнейшем предполагается исследование стратегий ТО систем с монотонной структурой и учетом суммарной наработки на отказ каждого элемента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cho D.I., Parlar M.* A survey of maintence models for multi-unit systems // Eur.J. Oper.Res. — 1991. — **51**. — P. 1–23.
2. *Dekker R., Wildeman R.E.* A review of multi-component maintence models with economic dependence // Math. Methods of Oper.Res. — 1997. — **45**. — P. 411–435.
3. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
4. *Каштанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
5. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.
6. *Полумарковские* модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, В.Н. Кузнецов, М.И.Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
7. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. — М.: Наука, 1989. — 336 с.

Поступила 14.06.2006