

## СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАТВИЙСКИХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

В. АЕВСКИС, В. ЯНСОНС

Рассмотрены процентные ставки Латвийского рынка межбанковских кредитов методом локально взвешенной регрессии первого порядка. Предложенная модель процентных ставок сравнивается по своим прогнозным качествам с двумя эталонными линейными моделями — случайного блуждания и линейной авторегрессионной. Главный результат работы — несомненное преимущество непараметрической модели над конкурентными моделями, что свидетельствует о присутствии нелинейностей в динамике латвийских процентных ставок.

### ВВЕДЕНИЕ

Точный прогноз финансовых и макроэкономических переменных важен для экономических агентов и учреждений, проводящих экономическую политику (центральных банков, министерств экономики и финансов и т.п.). Процентная ставка является одной из самых важных переменных — ключевой как в финансовой, так и в макроэкономической теории и практике.

Основные направления исследования процентной ставки в современной финансовой теории:

- 1) безарбитражное ценообразование (например, модели Vasicek [1], Heath и др. [2]);
- 2) общее равновесие (например, модели Cox и др. [3], Longstaff и Schwartz [4]).

Несмотря на успешное применение этих моделей для оценки процентных финансовых инструментов (таких, например, как деривативы), они не обладают достаточно хорошими прогнозными свойствами [5]. В перечисленных выше моделях предлагается линейность динамики процессов процентной ставки, что является очевидным недостатком данных моделей, поскольку эмпирические исследования свидетельствуют об их нелинейном поведении. Анализ нелинейностей динамики краткосрочных процентных ставок весьма важен как с теоретической, так и практической точек зрения. Изучение нелинейного характера краткосрочного поведения позволяет лучше понимать динамику. Изменение краткосрочной процентной ставки транслируется нелинейно на изменение среднесрочной и долгосрочной ставок и таким образом влияет на ценообразование всех финансовых активов. С практической точки зрения понимание природы нелинейности процентных ставок позволит улучшить прогнозные свойства их моделей. Недавние исследования обнаружили нелинейную динамику в поведении условного среднего и условной дисперсии процентных ставок.

Hamilton в работе [3] применил модель марковских переключений для данных американских краткосрочных процентных ставок и показал, что его модель лучше описывает их, чем линейная авторегрессионная модель. Granger [7] показал, что американские краткосрочные процентные ставки нелинейно зависят от разности среднесрочной и долгосрочной ставок. Kozicki [8] обнаружил асимметрию в поведении процентных ставок в ответ на позитивные и негативные шоки. Naik и Lee [9] связали эти нелинейности с изменениями режимов функционирования экономики (каждому состоянию экономики соответствует свой режим). Pfann, Schotman и Tscherning [10], используя SETAR модель (Self-Exciting Autoregressive models), обнаружили существование двух режимов динамики условного среднего. До тех пор пока процентная ставка не достигнет некоторого уровня, она ведет себя подобно процессу случайного блуждания. Выше этого уровня процентная ставка обнаруживает свойство возвращения к среднему уровню. Все эти работы указывают на неадекватность моделирования процесса линейными моделями.

В последнее время для моделирования временных рядов широко используются непараметрические методы — методы локальной регрессии, которые не накладывают предварительных ограничений на функциональный вид регрессии, тем самым позволяя определить регрессионную процедуру, исходя из имеющихся данных.

Таким образом с помощью непараметрического подхода удастся избежать спецификации регрессионной модели при параметрическом подходе, т.е. непараметрический метод допускает широкое разнообразие видов нелинейностей.

## МЕТОД ЛОКАЛЬНО ВЗВЕШЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Метод локально взвешенной регрессии (ЛВР) введен Cleveland в 1979 г. [11] и развит в работах Cleveland и Devlin [12], Hardle [13]. Идея метода заключается в локальном применении регрессионного метода относительно независимой переменной. Рассмотрим регрессионную функцию

$$y_t = g(x_t) + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, n, \quad (1)$$

где  $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})$  является  $1 \times p$  вектором экзогенной объясняющей переменной;  $g: R^p \rightarrow R$  — сглаживающая функция;  $\varepsilon_t$  — независимые и одинаково распределенные случайные величины со средним, равным 0, и дисперсией  $\sigma^2$ .

Метод ЛВР является численным алгоритмом вычисления оценки  $\hat{g}(x^*)$  значения функции  $g$  в точке  $x^*$ . Обозначив  $k \in (0, 1]$  сглаживающую константу, положим  $q_k = \text{int}(k \cdot n)$ , где  $\text{int}(\cdot)$  — операция взятия целой части. Метод ЛВР использует «окно», состоящее из  $q_k$  точек наблюдения бли-

жайших к точке  $x^*$ . Близость определяется в евклидовой метрике. В этом случае условное среднее определяется как регрессионное значение с помощью взвешенного метода наименьших квадратов с  $q_k$  соответствующих точек. Обозначим  $\|\dots\|$  евклидову норму. Расстояние точки  $x^*$  до всех  $q_k$  ближайших точек  $x_{qk}$  можно записать в виде

$$d_k(x^*, x_{qk}) = \left[ \sum_{i=1}^p (x_{qk} - x_i^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Каждая из  $q_k$  точек  $d_k$ -окрестности точки  $x^*$  взвешивается с помощью евклидова расстояния до точки  $x^*$ . Веса для точек, не принадлежащих  $d_k$ -окрестности точки  $x^*$ , полагаются равными 0. Для вычисления весов наблюдений используется кубическая функция  $w_{i,t} = (1 - u^3)^3$ , где

$$u = \frac{\|x_{i,t} - x^*\|}{\|x_q - x^*\|}. \quad (3)$$

Значение регрессионной поверхности в точке  $x^*$  вычисляется как величина

$$\hat{y}^* = \hat{q}(x^*) = (x^*)' \hat{\beta}, \quad (4)$$

где

$$\hat{\beta} = \arg \min \left[ \sum_{t=1}^n w_t (y_t - (x_t)' \beta)^2 \right]. \quad (5)$$

## ЭМПИРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Данные.** Используются процентные ставки латвийского рынка межбанковских кредитов RIGIBID-RIGIBOR (усредненные по дням месячные данные с декабря 1997 г. до марта 2006 г.). За основу анализа взята среднеарифметическая между ставками спроса RIGIBID и предложения RIGIBOR.

**Методика и результаты эмпирического оценивания.** Предлагается модель локально взвешенной авторегрессии первого порядка [11, 12, 13].

$$y_t = g(y_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, n.$$

Выбор «окна»  $k$  обусловлен стремлением обеспечить монотонность функции  $g(\cdot)$ . Минимальное окно, удовлетворяющее этому требованию, при этом равняется 0,6.

На рис. 1 приведена гистограмма и статистические характеристики исследуемого временного ряда — одномесячных процентных ставок RIGIBID-RIGIBOR. Гистограмма показывает явную негауссовость распределения, что может свидетельствовать о нелинейности процесса динамики процентных ставок.

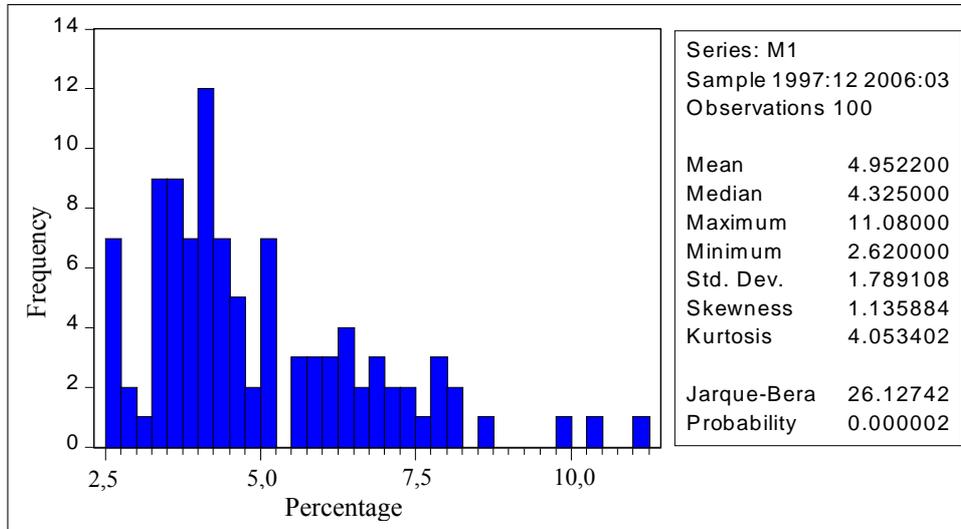


Рис. 1. Гистограмма и статистические характеристики ряда процентных ставок RIGIBID-RIGIBOR

Функция локальной регрессии «ухватывает» нелинейности процесса, генерирующего данные (рис. 2).

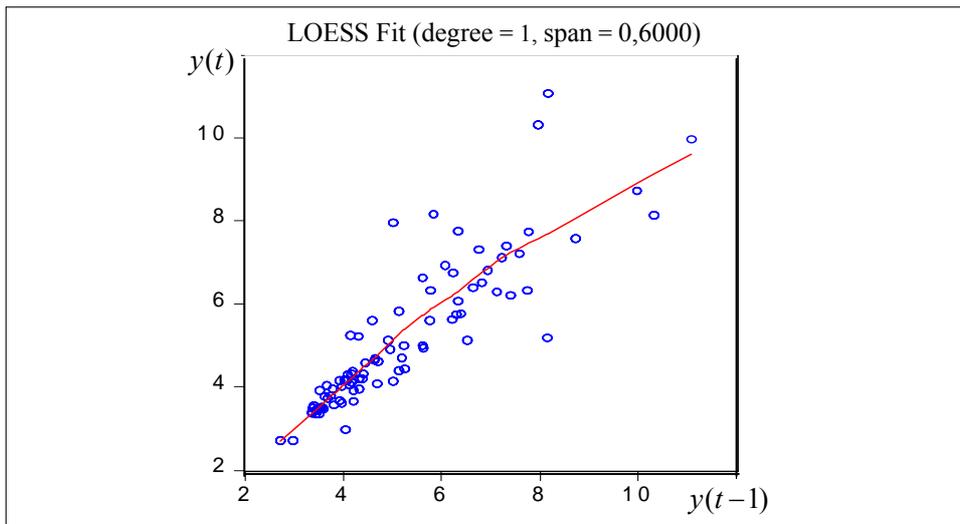


Рис. 2. Зависимость процентных ставок  $y_t$  от их значений в предыдущий период  $y_{t-1}$  вместе с функцией локальной регрессии при «окне», равном 0,6

Чтобы оценить качество модели локальной регрессии, мы проверили, насколько она хорошо прогнозирует вне интервала оценки (out-of-sample forecasting) по сравнению с двумя конкурирующими моделями — случайного блуждания и классической линейной авторегрессии AR. Для оценки качества модели использовалась оценка RMSE (root of mean squared errors).

$$RMSE = \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$e_t = y_{\text{mod},t} - y_t,$$

где  $y_{\text{mod}}$  — значение, предсказанное с использованием соответствующей модели.

Так, например, хорошо известно, что модель случайного блуждания задается формулой

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Количество лагов авторегрессионной модели выбиралось с минимизацией информационных критериев Akaike, Schwarz и Hannan-Quinn. (Расчеты проводились с использованием программ Eviews 4,0 и MathCad 2001.)

По всем критериям авторегрессионная модель третьего порядка AR(3) является оптимальной. Так что как одну из эталонных моделей мы выбрали AR(3), имеющую вид

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} + \varepsilon_t.$$

**Таблица 1.** Значения информационных критериев для авторегрессионных моделей

Lag	AIC	SC	HQ
0	4,019194	4,048544	4,030977
1	2,598019	2,656719	2,621586
2	2,474708	2,562759	2,510059
3	2,351913*	2,469314*	2,399048*
4	2,369314	2,516065	2,428232
5	2,385238	2,561339	2,455940
6	2,409273	2,614725	2,491759
7	2,425486	2,660287	2,519755
8	2,393282	2,657434	2,499335

В табл. 1 номер лага для наилучшей модели обозначен \*; **AIC**, **SC**, **HQ** — информационные критерии, соответственно, Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn.

Для оценки моделей локальной регрессии и AR(3) использовался временной интервал с декабря 1997 г. до мая 2005 г. Временной интервал с июня 2005 г. до марта 2006 г. использовался для прогноза с помощью моделей на один шаг вперед.

Прогноз с помощью модели AR(3) ненамного превосходит по качеству случайное блуждание (табл. 2). Необходимо отметить, что по качеству прогноза локальная регрессия примерно в четыре раза превосходит конкурентов.

**Таблица 2.** Оценки ошибок out-sample прогноза RMSE

Модель	RMSE
Локальная регрессия с окном 0,6	0,0932
AR(3)	0,3617
Случайное блуждание	0,4209

## ВЫВОДЫ

Для описания динамики процентных ставок рынка межбанковских кредитов Латвии RIGIBID-RIGIBOR предложена модель взвешенной локальной авторегрессии. Регрессия с окном 0,6 обеспечивала монотонность функциональной зависимости процентных ставок от их предыдущих значений. Сравнивая предложенную нами модель с моделью случайного блуждания и с наилучшей авторегрессионной моделью AR(3), получили значительное ее превосходство по критерию RMSE при out-of-sample forecasting. Это свидетельствует о наличии нелинейностей в поведении процентных ставок, а также о широких возможностях развития методов локальной регрессии для моделирования финансовых и экономических временных рядов.

В дальнейшем представляют интерес исследования локальных регрессий с числом лагов, ббльшим одного, и нелинейных локальных регрессий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Vasicek O.* An equilibrium characterization of the term structure // *Journal of Financial Economics*. — 1977. — № 5. — P. 177 – 188.
2. *Heath D.C., Jarrow R.A., Morton A.* Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New methodology for Contingent Claims Valuation // *Econometrica*. — 1992. — № 60. — P. 77–105.
3. *Cox J., Ingersoll J, Ross S.* A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*. — 1985. — № 53. — P. 385 – 407.
4. *Longstaff F., Schwartz E.* Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model // *Journal of Finance*. — 1992. — № 47. —P. 1259 – 1282.
5. *Duffee G.R.* Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models // *Journal of Finance*. — 2002. — № 57. — P. 405–443.
6. *Hamilton J.* Rational Expectations Econometric Analysis of Changes in Regimes: An Investigation of the Term Structure of Interest Rates // *Journal of Economic Dynamics and Control*. — 1988. — № 12. — P. 385–423.
7. *Granger C.W.J., Terasvirta T.* Modelling nonlinear economic relationships. — New York: Oxford University Press, 1993. — 187 p.
8. *Kozicki S.* A Nonlinear Model of the Term Structure. — Washington, DC: Federal Reserve Board, 1994. — 28 p.
9. *Naik V., Lee M.H.* The Yield Curve and Bond Option Prices with Discrete Shifts in Economic Regimes. — Vancouver: University of British Columbia, 1993. — 34 p.
10. *Pfann G.A., Schotman P.C., and Tschernig R.* Nonlinear Interest Rate Dynamics and Implications for the Term Structure // *Journal of Econometrics*. — 1996. — № 74. — P. 149–176.
11. *Cleveland W.S.* Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots // *Journal of the American Statistical Association*. — 1979. — № 74. — P. 829–836.
12. *Cleveland W.S. and Devlin S.J.* Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting // *Journal of the American Statistical Association*. — 1988. — № 83. — P 596–610.
13. *Hardle W.* Applied Nonparametric Regression. — Cambridge University Press. — 1994. — 443 p.

Поступила 01.06.2006