

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И МИНИМИЗАЦИЯ ДИСПЕРСИЙ
ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ
МОДЕЛЕЙ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ**

В.Д. РОМАНЕНКО

Рассмотрены теоретические положения проектирования разнотемповых дискретных систем прогнозирования и минимизации изменяющихся максимальных условных дисперсий выходных координат одномерных и многомерных процессов при дискретизации входных возмущений с малыми периодами квантования, а выходных координат и управляющих воздействий — с большими. Динамика процессов в стохастической среде представлена моделями авторегрессии и скользящего среднего, моделями авторегрессии и скользящего среднего с дополнительным входным сигналом с разнотемповой дискретизацией.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] описана методика прогнозирования условных дисперсий на основе использования математических моделей авторегрессии (АР) или авторегрессии и скользящего среднего (АРСС) с однотемповой дискретизацией входных возмущений и выходных координат. Эта методика заключается в следующем.

Пусть динамика процесса описана моделью АРСС (2, 1)

$$y(kT_0) = a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + \delta, \quad (1)$$

где $M\{\xi(kT_0)\} = 0$, $M\{\xi^2(kT_0)\} = \sigma_\xi^2$; $M\{\xi(kT_0)y[(k-l)T_0]\} = 0$, $l > 0$ (M — оператор математического ожидания). Тогда известный алгоритм прогнозирования условной дисперсии последовательности $\{y(kT_0)\}$ выполняется на основе рекуррентной процедуры.

1. Определение условного математического ожидания для последовательности $\{y(kT_0)\}$

$$M_{k-1}\{y(kT_0)\} = a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + b_1 \xi[(k-1)T_0] + \delta. \quad (2)$$

2. Вычисление условной дисперсии для последовательности $\{y(kT_0)\}$

$$M_{k-1}\{\xi^2(kT_0)\} = \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], y[(k-2)T_0]\} =$$

$$= M_{k-1} \{ [y(kT_0) - a_1 y[(k-1)T_0] - a_2 y[(k-2)T_0] - b_1 \xi[(k-1)T_0] - \delta]^2 \} = \hat{\xi}^2(kT_0). \quad (3)$$

3. Вычисление ряда условных дисперсий на основе выражений (2), (3)

$$\hat{\xi}^2[(k-1)T_0] = \text{var} \{ y[(k-1)T_0] | y[(k-2)T_0], y[(k-3)T_0] \},$$

$$\hat{\xi}^2[(k-2)T_0] = \text{var} \{ y[(k-2)T_0] | y[(k-3)T_0], y[(k-4)T_0] \},$$

$$\hat{\xi}^2[(k-3)T_0] = \text{var} \{ y[(k-3)T_0] | y[(k-4)T_0], y[(k-5)T_0] \},$$

$$\hat{\xi}^2[(k-q)T_0] = \text{var} \{ y[(k-q)T_0] | y[(k-q-1)T_0], y[(k-q-2)T_0] \}.$$

4. Построение математической модели динамики условных дисперсий на основе данных вычисленного ряда условных дисперсий путем применения метода наименьших квадратов (МНК) в виде АР (q)

$$\hat{\xi}^2(kT_0) = \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}^2[(k-1)T_0] + \hat{\alpha}_2 \hat{\xi}^2[(k-2)T_0] + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}^2[(k-q)T_0] + v(kT_0), \quad (4)$$

где $v(kT_0)$ — процесс дискретного белого шума с нулевым средним.

5. Выполнение прогнозирования условной дисперсии (3) на основе модели (4) на один период квантования T_0

$$\hat{\xi}^2[(k+1)T_0] = \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}^2(kT_0) + \hat{\alpha}_2 \hat{\xi}^2(k-1)T_0 + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}^2[(k-q+1)T_0]. \quad (5)$$

Поскольку модель (4) может быть построена при условии, что $\text{var} \{ y(k) \} \neq \text{const}$, то уравнение (4) называется авторегрессионным условно гетероскедастическим (АРУГ).

Приведенный алгоритм дает возможность прогнозировать условную дисперсию (5) только на один базовый период квантования T_0 .

Пример 1. Однотемповая модель АР(2,0) имеет вид $y(kT_0) = a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0)$, где коэффициенты равняются $a_1 = 1,2726$; $a_2 = -0,3328$.

На рис. 1 приведен переходной процесс выходной координаты $y(kT_0)$ при подаче на вход дискретного белого шума $\xi(kT_0)$, где видно, что в спектре переходного процесса преобладают составляющие низкой частоты. Это было отмечено в работе [3] для процессов первого порядка.

На рис. 2 показаны результаты вычисления и прогнозирования условной дисперсии, полученные на основе цифрового моделирования приведенного выше алгоритма. Видны сильные выбросы условной дисперсии в определенные дискретные моменты времени. В то же время на некоторых участках (от 40 до 65 отсчетов) вычисляемая на основе (3) и прогнозируемая посредством (5) условная дисперсия изменяется незначительно. Это объясняется тем, что для вычисления условной дисперсии (3) используется выборка всего из трех отсчетов выходной координаты.

Таким образом, вычисленная на основе (3) условная дисперсия не может характеризовать максимальные условные дисперсии, которые возможны на определенном интервале развития процесса. Следовательно, приведенный выше известный алгоритм прогнозирования условных дисперсий (2)–(5) нельзя применять для прогнозирования рисков.

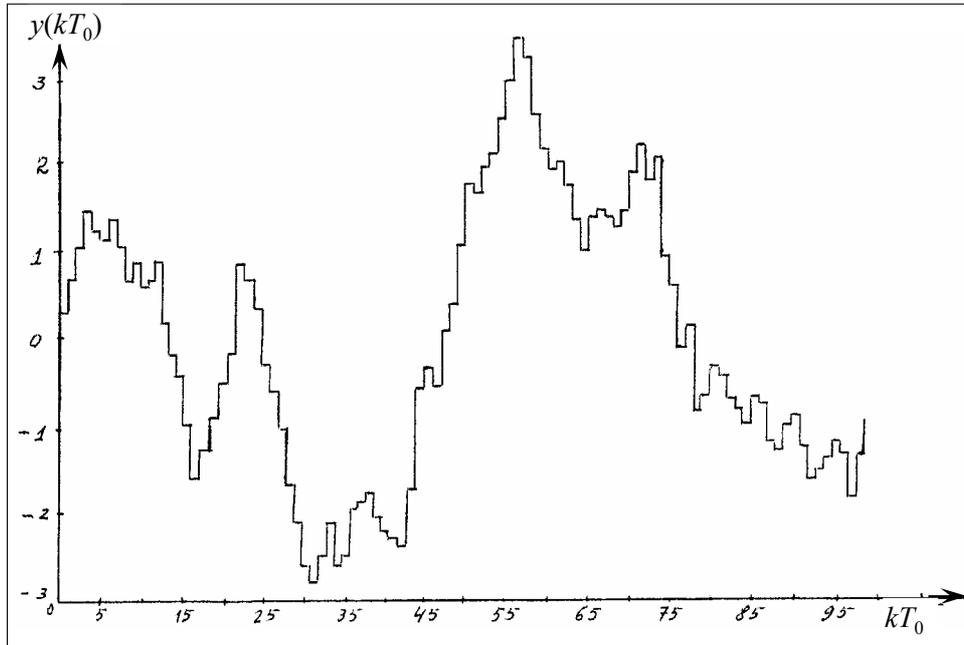


Рис. 1. График изменения выходной координаты для модели АРСС

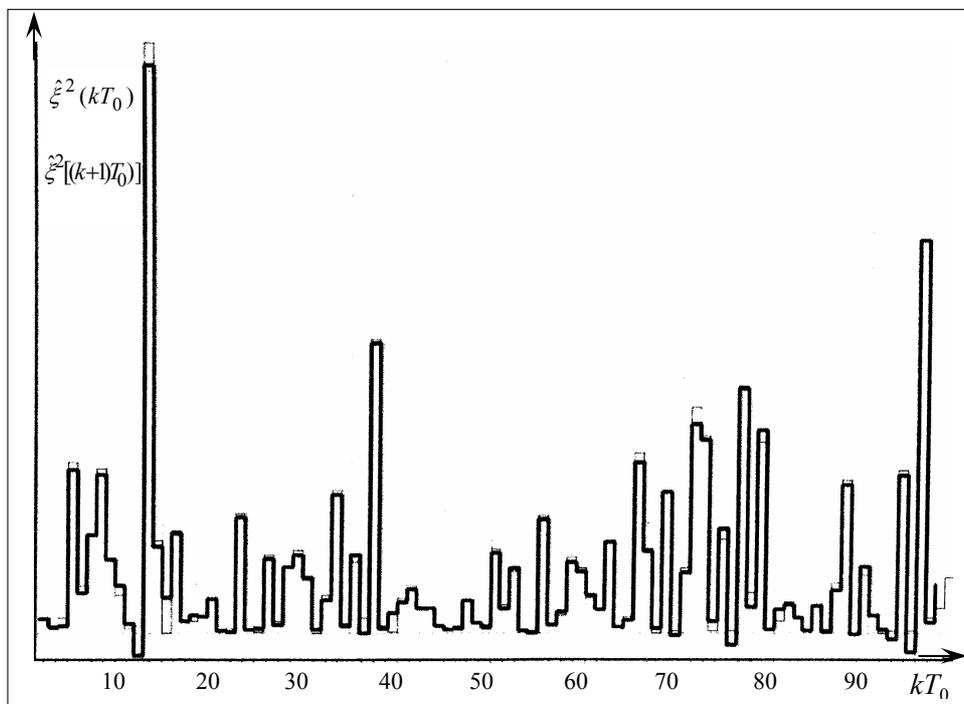


Рис. 2. Графики вычисления (—) и прогнозирования (—) условной дисперсии

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выходные координаты многих финансовых и социально-экономических процессов можно измерить только в дискретные моменты времени с увеличенными периодами квантования $h = mT_0$ (m — целое число, большее единицы) по сравнению с малыми периодами T_0 при дискретизации входных возмущающих воздействий [4]. В связи с этим для описания динамики данных процессов необходимы дискретные математические модели в стохастической среде с разнотемповой дискретизацией. Поэтому первой задачей является разработка методики прогнозирования максимальных выборочных условных дисперсий гетероскедастических процессов при переменной выборке с дискретизацией выходных координат с увеличенными периодами квантования $h = mT_0$ и входных координат с малым базовым периодом квантования T_0 . При этом предполагается вычислять и прогнозировать по рекуррентной процедуре не условную дисперсию с минимальной ограниченной выборкой согласно (2)–(5), а максимальную условную дисперсию на некотором интервале дискретного времени, так называемом «окне», величина которого при вычислении максимальной условной дисперсии изменяется от h до $p_{\max}h$. Наибольшую величину «окна» $p_{\max}h$ целесообразно выбирать равной наибольшей постоянной времени процесса. Например, для примера 1 согласно рис. 1 постоянная времени или максимальная величина «окна» равняется приблизительно $40T_0$ или $40h/m$.

Вторая задача — это разработка процедуры минимизации обобщенной дисперсии на основе моделей авторегрессии и скользящего среднего с дополнительным входным управляющим воздействием с разнотемповой дискретизацией, известной как модель ARMAX.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫБОРОЧНОЙ УСЛОВНОЙ ДИСПЕРСИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ С ОДНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

При изменяющейся дисперсии максимальное ее значение необходимо вычислять на некотором переменном промежутке времени $t = lT_0$ (переменной выборке). При этом выборка будет перемещаться вперед с каждым периодом T_0 и дисперсия будет пересчитываться на каждом периоде квантования.

Пусть динамика стационарного процесса описана моделью (1). Тогда выборочное условное математическое ожидание выходной координаты на протяжении выборки l будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k M_{i-1}[y(iT_0)] &= \frac{1}{l} \{a_1 y[(k-1)T_0] + a_2 y[(k-2)T_0] + \\ &+ b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + a_1 y[(k-l)T_0] + \\ &+ a_2 y[(k-l-1)T_0] + b_1 \xi[(k-l)T_0] + b_2 \xi[(k-l-1)T_0] + l\delta\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выборочная условная дисперсия $\{y(lT_0)\}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], y[(k-2)T_0], \dots, y[(k-l)T_0]\} = \\ = \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k \left\{ y(iT_0) - \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k M_{i-1}[y(iT_0)] \right\}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления максимальной выборочной условной дисперсии необходимо использовать скользящую длину «окна» $l_{\min}T_0 \leq lT_0 \leq l_{\max}T_0$. При каждом l в указанном диапазоне с дискретностью в один период квантования T_0 определяется выборочная условная дисперсия на основе (7) и выбирается ее максимальное значение при определенном значении выборки l .

$$\hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}(kT_0) = \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y(kT_0) | y[(k-1)T_0], y[(k-2)T_0], \dots, y[(k-l)T_0]\}. \quad (8)$$

Максимальное значение выборки l_{\max} устанавливается из расчета $l_{\max}T_0 = T_{\text{пост}}$, где $T_{\text{пост}}$ — постоянная времени процесса, определяющая его инерционность.

Для прогнозирования максимальной выборочной условной дисперсии необходимо разработать ее динамическую модель. Для этого на основе (6)–(8) строится ряд:

$$\begin{aligned} 1) \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-1)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y[(k-1)T_0] | y[(k-2)T_0], \dots, y[(k-l-1)T_0]\}; \\ 2) \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-2)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y[(k-2)T_0] | y[(k-3)T_0], \dots, y[(k-l-2)T_0]\}; \\ &\dots \\ N) \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-q)T_0] &= \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var}\{y[(k-q)T_0] | y[(k-q-1)T_0], \dots, \\ &\dots, y[(k-q-l)T_0]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

На основе построенного ряда (8), (9) по МНК разрабатывается математическая модель динамики максимальной выборочной дисперсии в виде АР (q)

$$\hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}(kT_0) = \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-1)T_0] + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-q)T_0]. \quad (10)$$

Тогда на основе модели (10) выполняется прогнозирование на один период T_0 максимальной выборочной условной дисперсии

$$\hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k+1)T_0] = \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}(kT_0) + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^{\hat{=2}}[(k-q+1)T_0].$$

Рекуррентная процедура прогнозирования (6)–(10) повторяется на каждом периоде квантования.

РАЗНОТЕМПОВЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Разнотемповая модель с удвоенной частотой при $h = 2T_0$

Исходная однотемповая модель АРСС(2, 2) имеет вид

$$(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\xi(kT_0) + \delta, \quad (11)$$

где $\{\xi(kT_0)\}$ — последовательность возмущений в виде дискретного белого шума с нулевым средним, а параметр δ определяет уровень процесса. Рекуррентная процедура преобразования исходной модели (11) в разнотемповую при дискретизации выходной координаты y с периодом квантования $h = 2T_0$ выполнена на основе методики [4]. Для этого модель (11) представим в разностной форме

$$y(kT_0) = -\alpha_1 y[(k-1)T_0] - \alpha_2 y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta. \quad (12)$$

На основе рекуррентной процедуры [4] получена обобщенная разнотемповая модель при $h = 2T_0$ в разностной форме

$$y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] = a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)h\right] + a_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 2\right)h\right] + \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] + c_1 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - T_0\right] + c_2 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 2T_0\right] + c_3 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 3T_0\right] + c_4 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 4T_0\right] + a_0, \quad (13)$$

где $\left[\frac{k}{2}\right]$ — целое число от деления номера дискретного отсчета k на 2.

Коэффициенты этой модели равняются: $a_1 = (\alpha_1^2 - 2\alpha_2)$; $a_2 = -\alpha_2^2$; $c_1 = b_1 - \alpha_1$; $c_2 = (-\alpha_1 b_1 + \alpha_2 + b_2)$; $c_3 = (\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2)$; $c_4 = \alpha_2 b_2$; $a_0 = (1 - \alpha_1 + \alpha_2)\delta$.

Координаты $y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]$ разнотемповой модели (13) и $y(kT_0)$ исходной

модели (11) будут совпадать в узловых точках отсчета $\left[\frac{k}{2}\right]h$. На основе предложенной методики [4] модель (13) можно преобразовать в разнотемповую модель при $h = 4T_0$.

Разнотемповая модель с утроенной частотой при $h = 3T_0$

При дискретизации выходной координаты y с периодом квантования $h = 3T_0$ исходная однотемповая модель (11) на основе методики [4] преоб-

разуется к разнотемповой модели АРСС, представленной в разностной форме

$$y\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] = a'_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{3}\right]-1\right)h\right] + a'_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{3}\right]-2\right)h\right] + \xi y\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] + \\ + c'_1 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - T_0\right] + c'_2 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 2T_0\right] + c'_3 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 3T_0\right] + \\ + c'_4 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 4T_0\right] + c'_5 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 5T_0\right] + c'_6 \xi \left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 6T_0\right] + a'_0, \quad (14)$$

где $\left[\frac{k}{3}\right]$ — целое число от деления номера дискретного отсчета k на 3.

Коэффициенты этой модели равны: $a'_1 = (-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2)$; $a'_2 = -\alpha_2^3$; $c'_1 = (b_1 - \alpha_1)$; $c'_2 = -(\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 + b_2)$; $c'_3 = (\alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_2)$; $c'_4 = (\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 b_1 + \alpha_1^2 b_2 - \alpha_2 b_2)$; $c'_5 = (-\alpha_1 \alpha_2 b_2 + \alpha_2^2 b_1)$; $c'_6 = \alpha_2^2 b_2$; $a'_0 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1)\delta$.

На основе предложенной методики [4] модель (14) можно преобразовать в разнотемповую с удвоенной частотой при $h = 6T_0$ или с утроенной частотой при $h = 9T_0$ и т.д.

В общем случае для исходной однотемповой модели АРСС (2, 2) типа (11) разнотемповая модель при $h = mT_0$ будет иметь следующий вид:

$$y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = a''_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + a''_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ + c''_1 \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + c''_2 \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2T_0\right] + \dots + c''_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2mT_0\right] + a''_0. \quad (15)$$

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫБОРОЧНОЙ УСЛОВНОЙ ДИСПЕРСИИ ОДНОМЕРНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Динамика стационарного процесса описана моделью (15) с разнотемповой дискретизацией при $h = mT_0$. Выборочное условное математическое ожидание выходной координаты на протяжении «окна» ph будет равно

$$\frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{i-1}[y(ih)] = \frac{1}{p} \{a''_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + a''_2 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \\ + c''_m \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h - mT_0\right] + \dots + c''_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2mT_0\right] + \dots + a_1 y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-p\right)h\right] +$$

$$\begin{aligned}
 &+ a_2'' y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p - 1 \right) h \right] + c_m'' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p + 1 \right) h - mT_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c_{2m}'' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - p + 1 \right) h - 2mT_0 \right] + pa_0'' \left. \right\}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Выборочная условная дисперсия на интервале ph вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
 &\text{var} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \middle| y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots, y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{ y(ih) - \frac{1}{p} \sum_{i=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} M_{i-1} [y(ih)] \right\}^2. \tag{17}
 \end{aligned}$$

Максимальное значение выборочной условной дисперсии определяется при изменении p в интервале $1 \leq p \leq p_{\max}$ на основе выражений (16) и (17)

$$\begin{aligned}
 &\sup_{1 \leq p \leq p_{\max}} \text{var} \left\{ y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \middle| y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots, y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - p \right) h \right] \right\} = \\
 &= \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \tag{18}
 \end{aligned}$$

где p_{\max} устанавливается на основе $p_{\max} h = T_{\text{пост}}$.

Для прогнозирования максимальной выборочной условной дисперсии строится ряд

$$\hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right], \dots, \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right]. \tag{19}$$

Динамическая модель максимальной выборочной условной дисперсии разрабатывается путем аппроксимации по МНК ряда (18), (19)

$$\begin{aligned}
 &\hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \hat{\alpha}'_1 \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\
 &+ \hat{\alpha}'_1 \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \hat{\alpha}'_{\mu} \hat{\xi}_{\max}^{\cong 2} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + v \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \tag{20}
 \end{aligned}$$

где $v \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ — процесс дискретного белого шума с нулевым средним. По аналогии с (4) уравнение (20) называется авторегрессионным, условно гетероскедастическим. Тогда прогнозирование максимальной выборочной ус-

ловной дисперсии на один период квантования $h = mT_0$ выполняется на основе разработанной модели (20)

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \hat{\alpha}'_1 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ \hat{\alpha}'_2 \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \hat{\alpha}'_\mu \hat{\xi}_{\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu + 1 \right) h \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Пример 2. Разнотемповая модель (14) при $h = 3T_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} y \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] &= (-\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2) y \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right] - \alpha_2^3 y \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 2 \right) h \right] + \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] + \\ &+ (b_1 - \alpha_1) \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - T_0 \right] - (\alpha_1^2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2) \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 2T_0 \right] + (\alpha_1^2 b_1 - \alpha_1 \alpha_2 - \\ &- \alpha_2 b_1) \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 3T_0 \right] + (\alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2 b_1) \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 4T_0 \right] + \alpha_2^2 b_1 \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 5T_0 \right], \end{aligned}$$

где коэффициенты равны: $\alpha_1 = -1,2726$; $\alpha_2 = 0,3328$; $b_1 = -0,5$.

На основе (17), (18) выполнено вычисление максимальной выборочной условной дисперсии и ее прогнозирование на основе (21), результаты которых показаны на рис. 3.

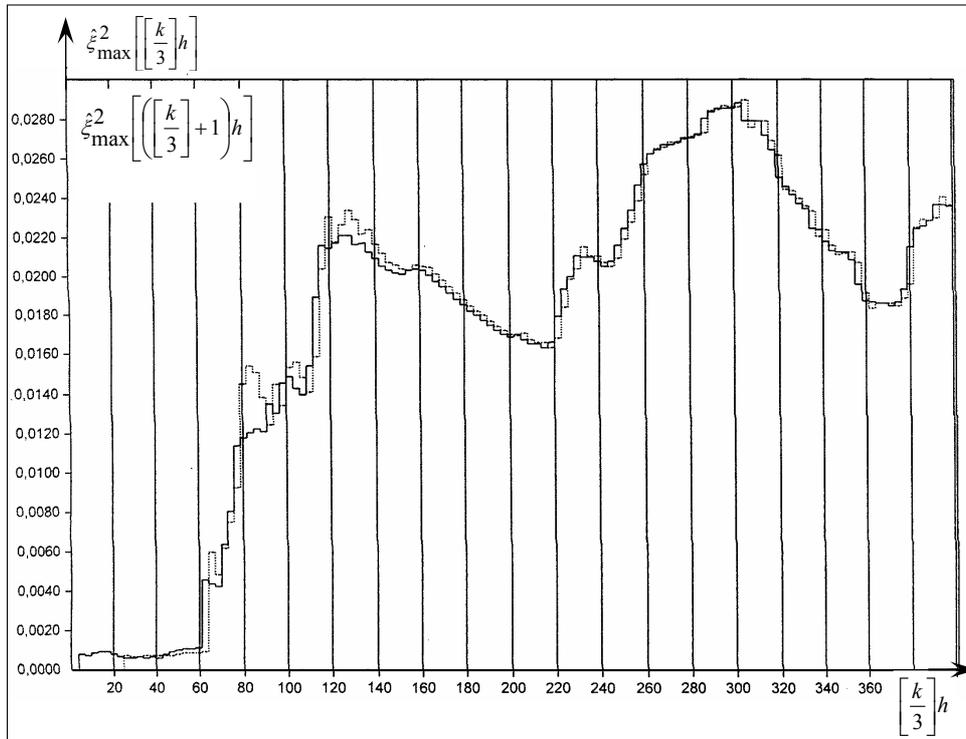


Рис. 3. Графики вычисления (—) и прогнозирования (---) максимальной выборочной условной дисперсии

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ УСЛОВНЫХ ДИСПЕРСИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Многомерная модель АРСС с разнотемповой дискретизацией представлена в виде [4]

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_2^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r_1 h_1) \\ y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{22}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

При этом соотношение периодов квантования для дискретных отсчетов выходных координат будет следующее:

$$h_i = m_i T_0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

где m_i — целое число, большее единицы. Тогда соотношение операторов обратного сдвига

$$z_i^{-1} = z^{-m_i}, \quad (24)$$

где z^{-1} — оператор обратного сдвига на один период квантования T_0 ; z_i^{-1} — оператор обратного сдвига на один период h_i . Структура полиномов в модели (22) имеет вид

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1i} z_i^{-1}, \quad (25)$$

$$c_{ij}(z^{-1}) = 1 + c_{1ij} z^{-1} + c_{2ij} z^{-2} + \dots + c_{m_{ij}} z^{-m_i}, \quad (26)$$

$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$. При этом a_{0i} — смещение i -й выходной координаты, равное $A_{ii}(1)y_{i\text{ср}}$. Разнотемповую модель (22) можно представить в разностной форме для каждой выходной координаты

$$y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = -a_{1i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1i1} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + \\ + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1i2} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots \\ \dots + c_{m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + c_{1in} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots$$

$$\dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + a_{0_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

Выборочное условное математическое ожидание выходной координаты y_i на протяжении «окна» $p_i h_i$ будет равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_i} \sum_{l_i = \left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1}^{\left[\frac{k}{m_i} \right]} M_{l_i - 1} [y_i(l_i h_i)] &= \frac{1}{p_i} \left\{ -a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \right. \\ &+ c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + \\ &+ c_{m_{ij}} \xi_j \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] - \dots \\ &\dots - a_{1_i} y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] + c_{m_{ij}} \xi_j \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots \\ &\left. \dots + c_{m_{in}} \xi_n \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + p_i a_{0_i} \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

На интервале $p_i h_i$ можно вычислить выборочную дисперсию

$$\begin{aligned} \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} &= \\ = \frac{1}{p_i} \sum_{l_i = \left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1}^{\left[\frac{k}{m_i} \right]} \left\{ y_i(l_i h_i) - \frac{1}{p_i} \sum_{l_i = \left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1}^{\left[\frac{k}{m_i} \right]} M_{l_i - 1} [y_i(l_i h_i)] \right\}^2. \quad (29) \end{aligned}$$

Максимальное значение выборочной условной дисперсии при $1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}$ определяется по формулам (28), (29) согласно

$$\begin{aligned} \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i_{\max}}} \text{var} \left\{ y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} &= \\ = \overset{\wedge}{\xi}_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

Для построения модели динамики максимальной выборочной условной дисперсии по i -му каналу на основе (28) – (30) строится ряд

$$\overset{\wedge}{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, \overset{\wedge}{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \eta \right) h_i \right].$$

По аналогии с (20), (21) при помощи МНК формируется модель динамики в виде $AR(\eta)$ и выполняется прогнозирование максимальной выборочной дисперсии по i -му каналу на один период квантования $h_i = m_i T_0$.

МИНИМИЗАЦИЯ ДИСПЕРСИЙ ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАЗНОТЕМПОВОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Исходная разнотемповая модель ARMAX (2, 2, 2) при $h = mT_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= a_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + b'_1 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\ &+ b'_2 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + c'_1 \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + c'_2 \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c'_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + a'_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где u — управляющее воздействие, которое изменяется в дискретные моменты времени $i h$.

Выберем критерий оптимальности в виде обобщенной дисперсии [5]

$$I \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = M \left\{ y^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] + r u^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}. \quad (32)$$

Запишем модель (31) со смещением вперед на один период квантования h

$$\begin{aligned} y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + b'_1 u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ b'_2 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] + c'_1 \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - T_0 \right] + \dots \\ &\dots + c'_{2m} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - 2mT_0 \right] + a_0. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в критерий (32)

$$I \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = M \left\{ a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + b'_1 u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ b'_2 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] + c'_1 \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - T_0 \right] + \dots \\
 &\dots + c'_{2m} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - 2mT_0 \right] + a_0 \left. \right]^2 + ru^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

В момент времени $\left[\frac{k}{m} \right] h$ все отсчеты переменных, входящие в (33), известны за исключением $u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, $\xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$, $\xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - T_0 \right]$... $\dots \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - (m-1)T_0 \right]$. Поэтому при определении математического ожидания критерий оптимальности (33) можно разделить на детерминированную и стохастическую части

$$\begin{aligned}
 I \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \left\{ a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + b'_1 u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ b'_2 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + c'_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + c'_{m+1} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right) \right] + \dots \\
 &\dots + c'_{2m} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right) \right] \left. \right\}^2 + ru^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + 2 \left\{ a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + b'_1 u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + b'_2 u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + c'_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
 &+ c'_{m+1} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right) \right] + \dots + c'_{2m} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right) \right] \left. \right\} M \left\{ \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] + \right. \\
 &+ c'_1 \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - T_0 \right] + \dots + c'_{m-1} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - (m-1)T_0 \right] \left. \right\} + \\
 &+ M \left\{ \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] + c'_1 \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - T_0 \right] + \dots \right. \\
 &\left. \dots + c'_{m-1} \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h - (m-1)T_0 \right] \right\}^2. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Выполним минимизацию детерминированной части критерия $I \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ по управляющему воздействию $u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]}{\partial u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]} = & 2 \left\{ a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + b_1' u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\ & + b_2' u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + c_m' \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + c_{m+1}' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right) \right] + \dots \\ & \left. \dots + c_{2m}' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right) \right] \right\} b_1' + 2ru \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Из полученного уравнения определяется оптимальное управляющее воздействие, минимизирующее обобщенную дисперсию (32)

$$\begin{aligned} u \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \frac{b_1'}{(b_1')^2 + r} \left\{ -a_1 y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - b_2' u \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \right. \\ & \left. - c_m' \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - c_{m+1}' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right) \right] - \dots - c_{2m}' \xi \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пример 3. Исходная модель ARMAX с разнотемповой дискретизацией координат при $h = 3T_0$ имеет вид

$$\begin{aligned} y \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] = & a_1 y \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right] + a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 2 \right) h \right] + b_1' u \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right] + \\ & + b_2' u \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 2 \right) h \right] + \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] + c_1' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - T_0 \right] + c_2' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 2T_0 \right] + \\ & + c_3' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 3T_0 \right] + c_4' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 4T_0 \right] + \\ & + c_5' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 5T_0 \right] + c_6' \xi_1 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 6T_0 \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где коэффициенты $a_1 = -3,33$; $a_2 = 0,0369$; $b_1' = 0,907$; $b_2' = 0,418$; $c_1' = 0,3726$; $c_2' = 0,34$; $c_3' = 0,653$; $c_4' = -0,013$; $c_5' = -0,015$; $c_6' = 0,022$.

Используя критерий оптимальности (32)

$$I \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] + 1 \right) h \right] = M \left\{ y^2 \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] + 1 \right) h \right] + ru^2 \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] \right\}, \quad (37)$$

на основе алгоритма (33)–(35) синтезирован оптимальный закон управления, который минимизирует обобщенную дисперсию (37)

$$u \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] = \frac{b_1'}{(b_1')^2 + r} \left\{ -a_1 y \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] - a_2 y \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right] - b_2' u \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right] - \right.$$

$$-c'_3 \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right] - c'_4 \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - T_0 \right] - c'_5 \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 2T_0 \right] - c'_6 \xi \left[\left[\frac{k}{3} \right] h - 3T_0 \right] \}. \quad (38)$$

На рис. 4 приведены результаты моделирования. На первом графике показано изменяющееся и прогнозируемое значение максимальной услов-

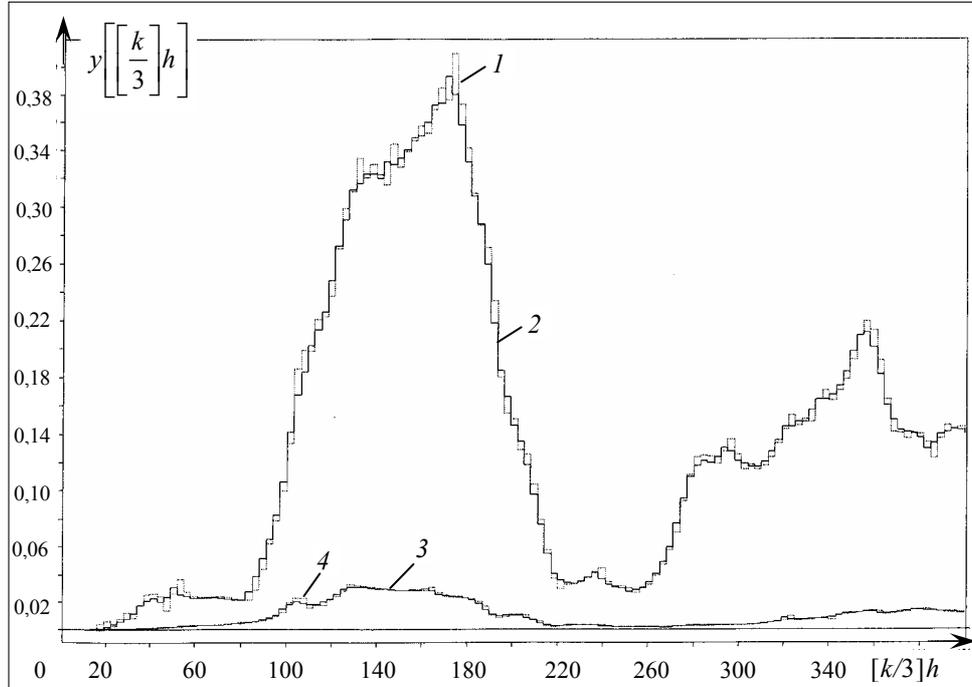


Рис. 4. Графики моделирования максимальной условной дисперсии при разнотемповой дискретизации: 1 — прогнозируемая дисперсия без управления; 2 — вычисляемая дисперсия без управления; 3 — вычисляемая дисперсия с управлением; 4 — прогнозируемая дисперсия с управлением

ной дисперсии координаты $y \left[\left[\frac{k}{3} \right] h \right]$ для неуправляемого процесса (36),

когда вместо управляющих воздействий $u \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right]$, $u \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 2 \right) h \right]$ подавались возмущения типа «белого» шума $\xi_2 \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 1 \right) h \right]$, $\xi_2 \left[\left(\left[\frac{k}{3} \right] - 2 \right) h \right]$.

На втором графике показано изменение и прогнозирование максимальной выборочной дисперсии координаты y при управляемом процессе согласно закону управления (38). Из графиков видно существенное уменьшение дисперсии при оптимальном управлении процессом.

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что условная дисперсия гетероскедастических процессов, которая определяется на основе минимальной выборки, не может ха-

рактизовать в каждый момент дискретного времени максимальную условную дисперсию выходной координаты процесса.

2. На основе моделей авторегрессии и скользящего среднего разработана методика прогнозирования максимальных выборочных условных дисперсий на один базовый период квантования T_0 при переменной выборке и однотемповой дискретизации координат.

3. Предложены модели авторегрессии и скользящего среднего с дискретизацией входных координат с малым периодом квантования T_0 , а выходных координат — с увеличенными периодами $h = mT_0$.

4. Описана методика прогнозирования максимальных выборочных условных дисперсий гетероскедастических процессов на один увеличенный период квантования $h = mT_0$ на основе моделей авторегрессии и скользящего среднего с разнотемповой дискретизацией при переменной выборке входных и выходных координат.

5. Разработан алгоритм минимизации обобщенной дисперсии на основе разнотемповых моделей авторегрессии и скользящего среднего с дополнительным входным управляющим воздействием (модель ARMAX).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бідюк П.І. Системний підхід до прогнозування на основі моделей часових рядів // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 3. — С. 88 – 110.
2. Hamilton J.D. Time series analysis. — Prinseton University Press. — 1994. — 799 p.
3. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. — М.: Мир, 1974. — Вып. 1. — 406 с.
4. Романенко В.Д. Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей временных рядов с разнотемповой дискретизацией // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 2. — С. 23 – 41.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления. — М.: Мир, 1984. — 541 с.

Поступила 21.11.2006