УДК 517.956

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА «РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ»

В.Г. БОНДАРЕНКО, А. Н. СЕЛИН

Построены методом суперпозиции барьерные функции (суб- и суперпараболические) для полулинейного параболического уравнения типа «реакция–диффузия». Как следствие, установлено свойство мгновенной компактификации носителя решения. Вычислительный эксперимент показал высокую точность аппроксимации решения барьерными функциями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Линейное параболическое уравнение как математическая модель процесса диффузии имеет недостатки. Так, решению $u(t,\mathbf{x})$ задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

где эллиптический оператор

$$Lu = a^{jk}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^j \partial \mathbf{x}^k} \equiv \operatorname{tr} A(\mathbf{x}) \nabla^2 u(t,\mathbf{x}),$$

соответствует бесконечная скорость распространения начальных возмущений. В последние десятилетия обострился интерес к квазилинейным параболическим уравнениям: после опубликования обзора [1] число работ на эту тему значительно возросло. Одно из направлений — исследование свойств решений полулинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \Phi(\mathbf{x}, u, \nabla u).$$

Характерным примером является работа [2], посвященная исследованию свойств решения задачи Коши для уравнения «реакция–диффузия»

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - g(t,\mathbf{x})|u|^p \operatorname{sgn} u, \quad u(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad 0 < p < 1, \quad g(t,\mathbf{x}) \ge 0,$$

в которой приведены условия мгновенной компактификации носителя (МКН) решения: при некоторых условиях на функции f и g $\operatorname{supp} u(t,\mathbf{x}) \subset \subset [a;b]$ для любого $t > 0$.

Аналогичные результаты получены и для более общих квазилинейных уравнений [3].

В настоящей работе для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - b\sqrt{u}, \quad b > 0, \quad u(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \ge 0, \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

строятся барьерные функции — суперпараболическая $w(t,\mathbf{x})$ и субпараболическая $v(t,\mathbf{x})$ — и доказывается наличие в них МКН. Вычислительный эксперимент для одномерного уравнения (1) позволяет сравнить решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи Коши с барьерными функциями. Матрица диффузии предполагается ограниченной и дифференцируемой.

КОНСТРУКЦИЯ БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Введем обозначения:

$p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu; \tag{2}$$

$u_0(t,\mathbf{x})$ — решение задачи Коши для (2) с начальным условием $u_0(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \geq 0$; f — непрерывна, т. е. $u_0(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(\mathbf{y})p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$.

Очевидно, что $u < u_0$.

Рассматривая (1) как возмущенное уравнение (2), определим две функции:

$$v(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(\sqrt{u_0(t,\mathbf{x})} - \dfrac{bt}{2}\right)^2, & \text{если } u_0(t,\mathbf{x}) > \dfrac{b^2t^2}{4}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$w(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{D_t} \left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right) p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y},$$

где множество $D_t \subset \mathbf{R}^n$ определено соотношением

$$D_t = \left\{ y : \sqrt{f(y)} \geq \frac{t}{2} \right\}.$$

Очевидно, что $v(0,\mathbf{x}) = w(0,\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Идея построения таких функций — метод суперпозиции для пары уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad \frac{du}{dt} = -b\sqrt{u},$$

рассмотренный ранее для линейных возмущений [4].

Теорема 1. Имеют место неравенства

$$v(t,\mathbf{x}) \leq u(t,\mathbf{x}) \leq w(t,\mathbf{x}).$$

Доказательство основано на теореме сравнения для параболических уравнений ([5], стр. 72–74). Покажем, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} < Lv - b\sqrt{v}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} > Lw - b\sqrt{w}\,.$$

Вычисляя производные, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv + b\sqrt{v} = -\frac{bt}{4u_0^{3/2}}\left(A(\mathbf{x})\nabla u_0\,, \nabla u_0\right) =$$

$$= -\frac{bt}{\sqrt{u_0}}\left(A(\mathbf{x})\nabla\sqrt{u_0}\,, \nabla\sqrt{u_0}\right) < 0$$

в силу положительной определенности матрицы $A(\mathbf{x})$.

Далее,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -b\int_{D_t}\left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right)p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})\,dy + \int_{D_t}\left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} -$$

$$-\lim_{dt\downarrow 0}\frac{1}{dt}\int_{D(t;t+dt)}\left(\sqrt{f(y)} - \frac{bt}{2}\right)^2 p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

где множество $D(t;t+dt) = \left\{\mathbf{y} : \frac{bt}{2} < \sqrt{f(\mathbf{y})} < \frac{b(t+dt)}{2}\right\}$.

Применение теоремы о среднем приводит последнее слагаемое к виду

$$\lim_{dt\downarrow 0}\left(\sqrt{f(z)} - \frac{bt}{2}\right)^2 \frac{P(t,\mathbf{x},D(t;t+dt))}{dt}, \quad z \in D(t;t+dt)\,,$$

где переходная вероятность

$$P(t,\mathbf{x},D) = \int_D p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}\,.$$

В силу дифференцируемости переходной вероятности как меры предел равен нулю, т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -b\int_{D_t}\left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right)p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{D_t}\left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right)^2 \frac{\partial p}{\partial t}(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}\,.$$

Вычисляя производные по пространственным переменным, приходим к выражению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw + b\sqrt{w} = b\left(\sqrt{\int_{D_t}\left(\sqrt{f(y)} - \frac{bt}{2}\right)^2 p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}} -\right.$$

$$\left. - \int_{D_t}\left(\sqrt{f(\mathbf{y})} - \frac{bt}{2}\right)p(t,\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}\right),$$

и последнее выражение неотрицательно в силу неравенства Коши–Буняковского.

Замечание. Если $u_0(t,\mathbf{x}) \to 0$ при $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, то для функции $v(t,\mathbf{x})$ имеет место МКН. Достаточным условием для этого соотношения является неравенство

$$f(\mathbf{x}) \le \frac{C}{\left(1+\|\mathbf{x}\|\right)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \tag{3}$$

приведенное в работе [2].

Рассмотрим еще одну барьерную функцию

$$h(t,\mathbf{x}) = \sqrt{v(t,\mathbf{x})\,u_0(t,\mathbf{x})}\,,$$

невязка которой

$$H(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial h}{\partial t} - Lh + b\sqrt{h} = -\frac{bt}{2\sqrt{u_0}}\left(A(\mathbf{x})\nabla\sqrt{u_0}\,, \nabla\sqrt{u_0}\right) + b\left(\sqrt[4]{u_0 v} - \frac{\sqrt{u_0}}{2}\right).$$

Введем дополнительное предположение на начальную функцию f

$$\left\|\nabla\sqrt{f(x)}\right\| < C\,. \tag{4}$$

Тогда для достаточно гладких коэффициентов $a^{ik}(\mathbf{x})$ норма векторного поля $\nabla\sqrt{u_0(t,\mathbf{x})}$ ограничена [6].

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда для задачи Коши (1) имеет место МКН.

Доказательство. В силу ограниченности $\nabla\sqrt{u_0(t,\mathbf{x})}$ знак невязки положителен для $t < \delta$, т. е. в интервале $(0;\delta)$

$$h(t,\mathbf{x}) \ge u(t,\mathbf{x})\,.$$

В силу замечания функция $v(t,\mathbf{x})$ обладает свойством МКН, откуда и следует утверждение теоремы.

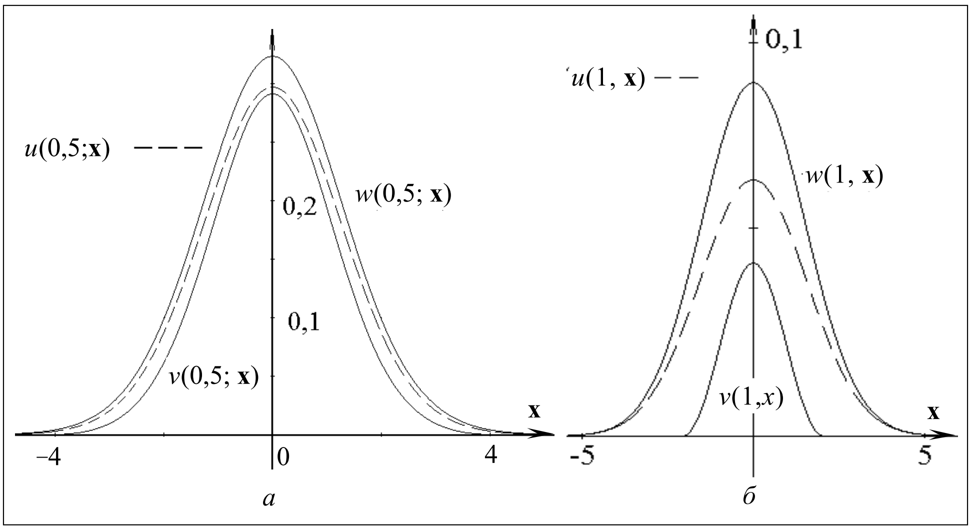
РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В качестве примера рассмотрена задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - b\sqrt{u}, \qquad u(0,\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{x}^2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}\,.$$

Для данного начального условия численно получены значения барьерных функций $v(t,\mathbf{x})$ и $w(t,\mathbf{x})$, а также решение этого уравнения $u(t,\mathbf{x})$ методом конечных разностей (см. рисунок).

Вследствие этого эффекта все три функции за конечное время оказываются тождественно равными нулю, причем тем быстрее, чем больше значение параметра b. При $b = 2$ $w(t,0) = 0$ для $t \ge 1$; $u(t,0) = 0$ для $t \ge 0{,}78$, $v(t,0) = 0$ для $t \ge 0{,}73$. (На рисунке *б* видно наличие МКН.)



Графики супер-, субпараболической функций, а также численного решения как функций от $\mathbf{x}$: *а* — $t = 0{,}5$; *б* — $t = 1$ (параметр *b* взят равным 1)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи математических наук. — 1987. — **42**, № 3. — С. 135–176.
2. *Калашников А.С.* Об условиях мгновенной компактификации носителей решений полулинейных параболических уравнений и систем // Математические заметки. — 1990. — **47**, вып. 1. — С. 74–80.
3. *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasi-linear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. — 2003. — **133 A**. — P. 1075–1119.
4. *Bondarenko V.* Construction of the fundamental solution of disturbed parabolic equation // Bulletin des sciences mathematiques. — 2003. — **127,** № 3. — P. 191–206.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 427 с.
6. *Бондаренко В.Г.* Логарифмический градиент ядра теплопроводности на римановом многообразии // Математические заметки. — 2003. — **74**, № 3. — С. 471–475.

Поступила 19.10.2006