

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ
ВЗАЄМОДІЇ ДВОХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ
ПІД ЧАС СТИСКАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ ЖОРСТКОГО
ДИСКОПОДІБНОГО ВКЛЮЧЕННЯ МІЖ НИМИ**

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК, О.В. ГАВРИЛЕНКО

Анотація. Розвинено математичну модель для аналізу контактної взаємодії двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання за наявності жорсткого дископодібного включення сталої товщини між ними. Модель базується на використанні зв'язаної системи рівнянь електропружності для кожного з п'єзоелектричних півпросторів. Аналітичний розв'язок задачі отримано за допомогою загального подання розв'язків рівнянь електропружності на основі гармонічних функцій, зведення задачі до розгляду інтегрального рівняння і розкладу шуканої функції за малим параметром. Як окремий випадок з отриманих виразів впливають параметри контакту для двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів (за наявності включення між ними). Проведено числові дослідження, вивчено вплив зв'язаності силових і електричних полів на параметри контактної взаємодії.

Ключові слова: математичне моделювання, зв'язана система рівнянь електропружності, п'єзоелектричний півпростір, жорстке дископодібне включення, параметри контактної взаємодії.

ВСТУП

У різних галузях промисловості п'єзоелектричні матеріали широко застосовуються для створення різних датчиків, перетворювачів енергії та елементів вимірювальних приладів, що, у свою чергу, потребує детального вивчення та аналізу розподілу силових і електричних полів у електропружних тілах поблизу концентраторів напружень, а також під час їх контактної взаємодії. У той же час розв'язання просторових задач електропружності є надто складною математичною проблемою, оскільки базова система рівнянь для знаходження напруженого і електричного станів є зв'язаною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [1–5, 10, 12, 16]. Натепер найбільш повно досліджено двовимірні задачі електропружності (з урахуванням зв'язаності силових та електричних полів) [6, 8, 9, 14, 17]. Для випадку трансверсально-ізотропних властивостей електропружного матеріалу у працях [12, 15] запропоновано підходи до побудови загальних розв'язків системи зв'язаних рівнянь електропружності за допомогою гармонічних функцій.

Контактна взаємодія для двох пружних ізотропних півпросторів під час стискання за наявності жорсткого дископодібного включення між тілами вивчалась у працях [7, 11, 13]. Але моделювання контактної взаємодії для двох електропружних тіл (за наявності між ними включення) є проблемою значно складнішою, оскільки необхідно розв'язувати систему зв'язаних рівнянь електропружності, у яку входять по десять незалежних сталих для кожного п'єзоелектричного матеріалу півпростору, у той час, як пружні властивості ізотропного матеріалу залежать тільки від двох пружних сталих, а система рівнянь пружності містить лише три рівняння і має значно простішу структуру від системи рівнянь електропружності.

У цій роботі на основі математичного моделювання, яке враховує зв'язаність силових і електричних полів у п'єзоелектричному матеріалі, вивчено контактну взаємодію двох п'єзоелектричних півпросторів під час стискання за наявності між ними жорсткого дископодібного включення сталої товщини. У постановці задачі припускається, що поверхня поділу двох електропружних тіл розташована у площині ізотропії кожного п'єзоелектричного матеріалу і вважається, що під час контактної взаємодії відбувається гладкий (без тертя) контакт. За допомогою подання розв'язку рівнянь електропружності через гармонічні функції, зведення задачі до інтегрального рівняння та розкладу шуканої функції за малим параметром отримано аналітичний розв'язок задачі, знайдено параметри контактної взаємодії півпросторів (за наявності дископодібного включення між ними). Зі знайдених виразів впливають параметри контактної взаємодії двох пружних трансверсально-ізотропних півпросторів за наявності включення, а також параметри контакту двох пружних ізотропних півпросторів [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянути математичну модель, за допомогою якої вивчити контактну взаємодію двох різних за властивостями електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів під час стискання, між якими розташоване жорстке дископодібне включення сталої товщини (рис. 1).

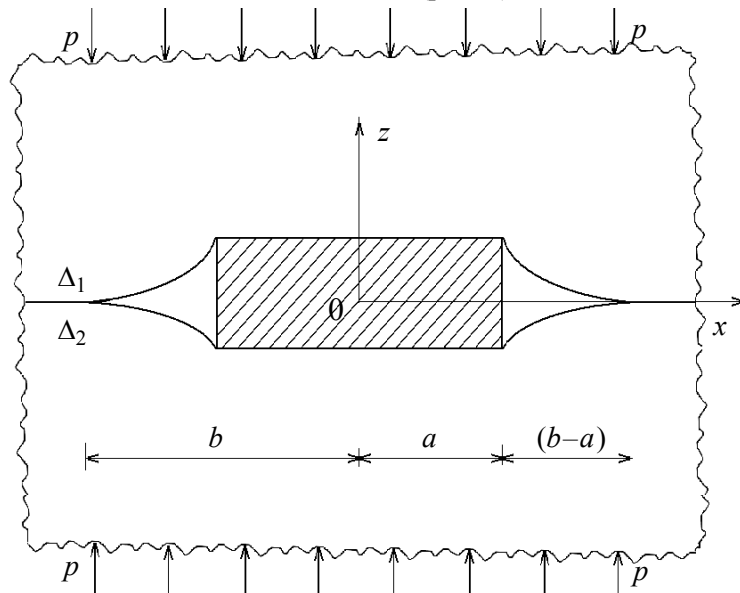


Рис. 1. Контактна взаємодія двох електропружних півпросторів за наявності жорсткого дископодібного включення між ними

Припускаємо, що площина $z = 0$ (рис. 1), яка обмежує два півпростори, є площиною ізотропії кожного з електропружних трансверсально-ізотропних матеріалів, тобто вісь Oz — вісь симетрії кожного з п'єзоелектричних матеріалів. Вважаємо, що поверхні півпросторів є неелектродованими (не містять електродного покриття) і в площині контактної взаємодії $z = 0$ виконуються умови гладкого (без тертя) контакту. При цьому розміри ділянки розшарування двох електропружних півпросторів (рис. 1) є невідомими і визначаються під час розв'язання задачі контактної взаємодії. Параметри контактної взаємодії п'єзоелектричних тіл залежать від значення стискальних зусиль p , електропружних властивостей двох п'єзоелектричних матеріалів (усього двадцять незалежних величин) і двох геометричних параметрів жорсткого включення (його радіуса і товщини).

Електропружний стан у кожному з п'єзоелектричних півпросторів подамо суперпозицією основного (пов'язаного зі стискальними навантаженнями) та збуреного станів. Для знаходження збуреного стану в кожному з електропружних півпросторів у площині $z = 0$ отримуємо такі умови:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)}(r,0) &= \Delta_1, 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= p, a < r < b; \\ \sigma_{rz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{rz}^{(2)}(r,0) = 0, 0 < r < \infty; \\ u_z^{(2)}(r,0) &= -\Delta_2, 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_{zz}^{(2)}(r,0) &= p, a < r < b; \\ \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) &= \sigma_{zz}^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \\ u_z^{(1)}(r,0) &= u_z^{(2)}(r,0), b \leq r < \infty; \\ D_z^{(1)}(r,0) &= D_z^{(2)}(r,0) = 0, 0 \leq r < \infty; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta,$$

де індекси «1» і «2» відповідають першому і другому п'єзоелектричному півпростору; p — величина стискальних зусиль; Δ і a — товщина і радіус дископодібного включення; значення $b - a$ відповідає розміру зони розшарування між півпросторами, що викликане наявністю включення. Із наведених граничних умов у площині поділу умови (1) відповідають умовам відсутності дотичних напружень на всій поверхні поділу, умови (2), (3) — умовам ідеального механічного контакту поза зоною розшарування матеріалу, вирази (4) — умовам відсутності електродного покриття на поверхнях півпросторів. Для того щоб дослідити задачу на основі використовуваної математичної моделі, необхідно знайти розв'язки рівнянь електропружності в кожному з п'єзоелектричних півпросторів, що задовольняють наведені вище граничні умови на поверхні поділу електропружних матеріалів. Суперпозиція основного і збуреного станів приводить до виконання умови вільної від навантажень (силових та

електричних) поверхні зони розшарування, а саме: $\sigma_{zz}^{(0)}(r,0) + \sigma_{zz}^{(1)}(r,0) = -p + p = 0$ і $D_z^{(0)}(r,0) + D_z^{(1)}(r,0) = 0$, якщо $a < r \leq b$. Цілком аналогічні вирази отримуємо і для другого півпростору. Для завершення побудови математичної моделі наведемо рівняння статички для електропружних трансверсально-ізотропних тіл, що враховують зв'язаність силових і електричних полів у п'єзоелектричному матеріалі.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І СПІВВІДНОШЕННЯ

Статичні рівняння електропружності для п'єзоелектричного тіла щодо компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу можна подати у вигляді [12]

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\ + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0. \\ (e_{13} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + \\ + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

У рівняннях (5) використано такі позначення: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ — незалежні модулі пружності; e_{31}, e_{15}, e_{33} — п'єзомодулі; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ — діелектричні проникності. Отже, електропружні властивості п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного матеріалу характеризуються десятьма незалежними сталими.

Розв'язок системи рівнянь (5) відповідно до праці [12] можна подати чотирма потенціальними функціями Φ_j ($j = \overline{1,4}$):

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (6)$$

де k_j, l_j — деякі сталі, а функції Φ_j задовольняють рівняння

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = \overline{1,2,3}), \quad (7)$$

$v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, а значення v_i ($i = \overline{1,2,3}$) згідно з працею [12] є коренями алгебричного рівняння третього порядку:

$$\begin{aligned} & v^3(A_1B_2 - C_1D_2) + v^2(A_1B_3 + A_2B_2 - C_1D_3 - C_2D_2) + \\ & + v(A_2B_3 + A_3B_2 - C_2D_3 - C_3D_2) + A_3B_3 - C_3D_3 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Значення k_j, l_j ($j=1,2,3$) у виразах (6) пов'язані з величинами v_j такими співвідношеннями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j, \quad (j=1,2,3); \quad (9)$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j, \quad (j=1,2,3,4). \quad (10)$$

У разі використання позначень $z_j = zn_j^{-1/2}$ ($j=1,4$) функції $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ згідно з рівняннями (7) стають гармонічними функціями у відповідних системах координат. Надалі формули (8)–(10) будуть використані для обчислень.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для побудови розв'язку граничної задачі електропружності скористаємося поданням (6), згідно з яким потенціальні функції $\Phi_i(x, y, z_i)$ (для кожного півпростору з урахуванням електропружних сталих електропружного матеріалу) візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_i^* F_i^*(x, y, z_i), \quad (i=1, 2, 3); \quad \Phi_4 \equiv 0. \quad (11)$$

Сталі α_i^* у виразах потенціальних функцій згідно з формулами (11) визначимо з такої системи лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j) &= 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j) / \sqrt{v_j} = 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* (e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Під час вибору сталих α_i^* згідно з формулами (12) задовольняються граничні умови за дотичними напруженнями та умови відсутності електродного покриття на поверхнях півпросторів уздовж усієї поверхні поділу, а також умови рівності нормальних компонентів напружень поза зоною розшарування матеріалів. Для граничних умов, що залишилися, використовуючи потенціальні функції на основі функцій $F_1^*(x, y, z_i)$ і $F_2^*(x, y, z_i)$ (функції для першого та другого електропружних півпросторів) з урахуванням системи рівнянь (12), отримуємо умови в площині $z=0$ стосовно невідомих гармонічних функцій $F_1^*(x, y, z)$ і $F_2^*(x, y, z)$:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z}(r, 0) = \Delta_1, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 \partial F_1^*}{\partial z^2}(r, 0) = p, \quad a < r < b;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}(r,0) = -\Delta_2, \quad 0 \leq r \leq a; \quad \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r,0) = p, \quad a < r < b; \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \frac{\partial F_1^*}{\partial z} = \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \frac{\partial F_2^*}{\partial z}, \quad b \leq r < \infty;$$

$$\frac{\partial^2 F_1^*}{\partial z^2}(r,0) = \frac{\partial^2 F_2^*}{\partial z^2}(r,0), \quad b \leq r < \infty, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = \Delta.$$

Розглянемо для порівняння більш просту задачу теорії пружності про стискання двох пружних ізотропних півпросторів, між якими розташоване дископодіне жорстке включення сталі товщини. За допомогою подання Папковича–Нейбера визначення зони розшарування для збуреного стану зводиться до пошуку двох гармонічних функцій $f_1^*(x, y, z)$ і $f_2^*(x, y, z)$, для знаходження яких отримуємо у площині поділу матеріалів $z=0$ граничні умови, що цілком аналогічні всім наведеним формулам (13). Відмінність полягає у тому, що в цих виразах замість множників $\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} k_j^{(1)} / \sqrt{v_j^{(1)}}$ і

$\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} k_j^{(2)} / \sqrt{v_j^{(2)}}$ використовуються вирази $(1-\nu_1)/\mu_1$ і $(1-\nu_2)/\mu_2$, де

ν_1, ν_2 — коефіцієнти Пуассона, а μ_1, μ_2 — модулі зсуву для матеріалів першого і другого пружних півпросторів відповідно. Виходячи з відповідності між розв’язками пружної та електропружної задач, що розглядаються, надалі використаємо схему розгляду більш простої пружної задачі.

Згідно з результатами пружної задачі [7] та встановленої відповідності задачу контактної взаємодії двох електропружних півпросторів (за наявності жорсткого плоского дископодібного включення між ними) зводимо до розв’язання інтегрального рівняння для знаходження невідомого значення $c = b/a$, тобто невідомої ділянки розшарування матеріалів. Маємо

$$\begin{aligned} & \varphi(\eta) + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(\xi^2 - \eta^2)} \left(\eta \ln \left[\frac{c - \eta}{c + \eta} \right] - \xi \ln \left[\frac{c - \xi}{c + \xi} \right] \right) d\xi = \\ & = \frac{\Delta}{ap(1 + \alpha) \sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}}} + \frac{2}{\pi} (1 - \eta^2) \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c^2 - 1}{1 - \eta^2} \right), \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (14)$$

з додатковою умовою, що характеризує відсутність сингулярної складової у зоні розшарування матеріалів, якщо $r = b$:

$$\frac{2c}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{(c^2 - \xi^2)} d\xi + (c^2 - 1)^{1/2} = 0,$$

$$\text{де } \eta = r/a, \quad c = b/a, \quad \alpha = \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(2)*} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right) / \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_i^{(1)*} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right).$$

Далі, на основі розкладу за малим параметром $\varepsilon = a/b = 1/c < 1$ шуканої функції, що входить до інтегрального рівняння (14) (цілком аналогічно випадку контакту двох пружних ізотропних півпросторів [7]), наближений розв'язок інтегрального рівняння з додатковою умовою можна отримати аналітично за допомогою розв'язання алгебричного рівняння п'ятого порядку:

$$\frac{\Omega_1(\varepsilon)}{(1+\alpha)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) - 2p \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right) \frac{\Omega_2(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1(\varepsilon) = & \frac{4}{\pi} \varepsilon + \frac{16}{\pi^3} \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^5} + \frac{4}{3\pi} \right) + \varepsilon^4 \left(\frac{80}{9\pi^3} + \frac{256}{\pi^7} \right) + \\ & + \varepsilon^5 \left(\frac{448}{9\pi^5} + \frac{1024}{\pi^9} + \frac{4}{5\pi} \right) + O(\varepsilon^6); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2(\varepsilon) = & 1 - \frac{4}{\pi^2} \varepsilon - \frac{16}{\pi^4} \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \left(\frac{64}{\pi^6} + \frac{1}{8} \right) - \varepsilon^4 \left(\frac{16}{3\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{8}{9\pi^2} + \frac{64}{\pi^6} + \frac{4}{9\pi^3} \right) \right) - \\ & - \varepsilon^5 \left(\frac{16}{\pi^4} \left(\frac{1}{24} + \frac{64}{\pi^6} - \frac{8}{9\pi^3} + \frac{8}{9\pi^2} \right) + \frac{256}{9\pi^6} - \frac{4}{15\pi^2} \right) + O(\varepsilon^6). \quad (16) \end{aligned}$$

Знайдене з алгебричного рівняння значення $\varepsilon = a/b$, що отримуємо з формул (15), (16), визначає розміри зони розшарування між двома п'езоелектричними півпросторами (за наявності дископодібного жорсткого включення сталої товщини між ними) під час стиснення. Розміри заглиблення включення у відповідний півпростір залежать від електропружних властивостей матеріалів обох півпросторів і визначаються співвідношенням

$$\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right)} \Delta_1 = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \Delta_2.$$

Тобто заглиблення включення у перший півпростір пропорційне значенню

$$\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)}}{\Delta^{(1)}} \frac{k_j^{(1)}}{\sqrt{v_j^{(1)}}} \right), \quad \text{а заглиблення у другий півпростір — значенню}$$

$$\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)}}{\Delta^{(2)}} \frac{k_j^{(2)}}{\sqrt{v_j^{(2)}}} \right).$$

Із формул (15) отримуємо співвідношення, що пов'язує значення стискальних навантажень із зоною розшарування півпросторів у вигляді

$$p = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta_j^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta_j^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right)} \left(\frac{\Delta}{a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \Omega_1(\varepsilon) / \Omega_2(\varepsilon)}{L^*} \left(\frac{\Delta}{a} \right), \quad (17)$$

де

$$L^* = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(1)} k_j^{(1)}}{\Delta_j^{(1)} \sqrt{v_j^{(1)}}} \right) + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\Delta_j^{(2)} k_j^{(2)}}{\Delta_j^{(2)} \sqrt{v_j^{(2)}}} \right). \quad (18)$$

За допомогою виразів (17), (18) можна знайти значення навантажень, що для відомих геометричних параметрів дископодібного включення і електропружних властивостей матеріалів півпросторів відповідають заданому розміру зони розшарування матеріалів.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Залежності зони розшарування від стискальних зусиль показано на рис. 2. Вплив властивостей п'єзоелектричних матеріалів півпросторів на зону розшарування матеріалів здійснюється через множник L^* , значення якого відповідає формулам (18). У розрахунках відносна товщина дископодібного включення Δ/a становить 0,1.

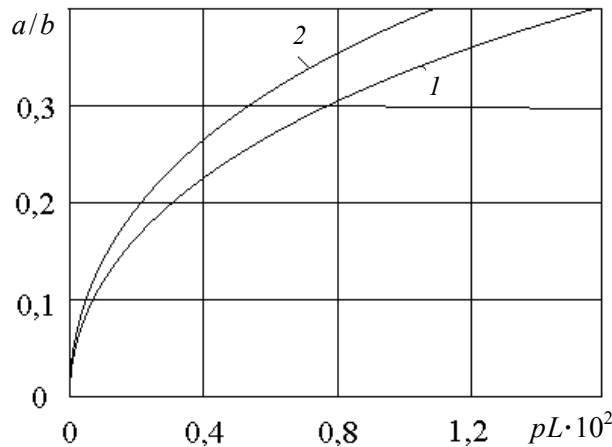


Рис. 2. Залежність зони розшарування від прикладених навантажень

Крива 1 на рис. 2 відповідає контактній взаємодії двох електропружних матеріалів PZT-4, а крива 2 — випадку стискання двох чисто пружних трансверсально-ізотропних півпросторів, пружні властивості яких збігаються з пружними властивостям п'єзокерамічного матеріалу PZT-4. Вплив зв'язаності силових і електричних полів для матеріалу PZT-4 можна оцінити, порівнюючи значення навантажень, за яких досягається однакове відношення a/b на кривих 1 і 2 (збігаються розміри зон розшарування для пружного і електропружного матеріалів). Видно, що зв'язаність силових і електричних полів збільшує зону розшарування (порівняно з чисто пружним матеріалом, який має такі самі пружні властивості, що й електропружні). Аналогічний якісний ефект характерний і для п'єзокерамічних матеріалів

PXE-5, PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H, P-7, для яких виконано розрахунки, що підтверджують подібний вплив зв'язаності полів. Це означає, що до двох п'єзоелектричних півпросторів потрібно прикласти більші стискальні зусилля, ніж до двох чисто пружних трансверсально-ізотропних півпросторів, щоб отримати зони розшарування однакового розміру.

На рис. 3 зображено вплив відношення товщини включення до її радіуса Δ/a на розмір зони розшарування матеріалів від стискальних навантажень. Для розрахунків значення Δ/a покладались рівними 0,05 (лінія 1), 0,1 (лінія 2), 0,2 (лінія 3) і 0,3 (лінія 4).

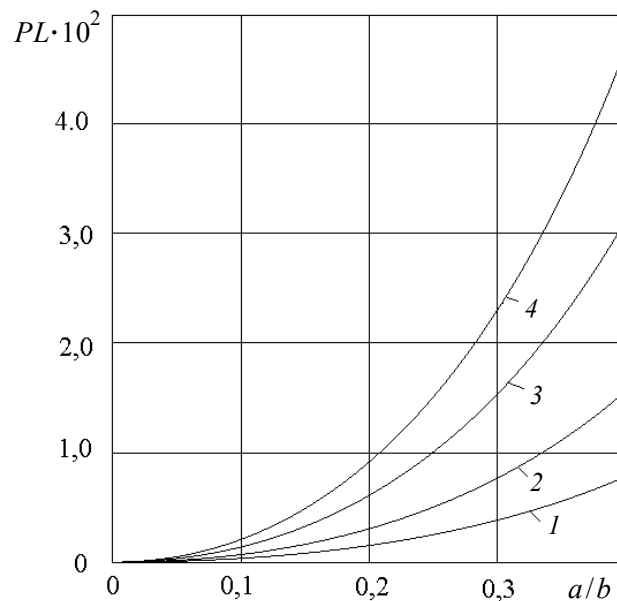


Рис. 3. Вплив товщини включення на розмір зони розшарування

Видно, що за більшої відносної товщини дископодібного жорсткого включення для досягнення такого самого значення зони розшарування, яке отримуємо для більш тонкого включення, необхідно прикласти більші за значеннями стискальні навантаження, ніж для тоншого включення.

ВИСНОВОК

У роботі на основі математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів у п'єзоелектричному матеріалі, отримано аналітичний розв'язок задачі про контактну взаємодію двох електропружних півпросторів під час стискання за наявності жорсткого плоского дископодібного включення сталої товщини між ними. Досліджено вплив зв'язаності силових і електричних полів на параметри контактної взаємодії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6 т.; Т. 1. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.

2. Кирилюк В.С. Математическое моделирование контактного взаимодействия жесткой основы с приповерхностной осесимметричной выемкой и электроупругого полупространства / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 3. — С.118–125.
3. Кирилюк В.С. Моделирование контактного взаимодействия пьезоэлектрического полупространства и упругой изотропной основы с приповерхностной выемкой кругового сечения / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2016. — № 4. — С.120–132.
4. Кирилюк В.С. Математическое моделирование и анализ напряженного состояния в ортотропной пьезоэлектрической среде с круговой трещиной / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук, Е.В. Гавриленко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 3. — С.117–126.
5. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // Int. J. Fract. — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
6. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
7. Gladwell G.M.L. On Inclusions at a Bi-Material Elastic Interface / G.M.L. Gladwell // Journal of Elasticity. — 1999. — 54, N 1. — P.27–41.
8. Kaloerov S.A. Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // International Applied Mechanics. — 2015. — **51**, N 6. — P.623–639.
9. Kaloerov S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // Int. Appl. Mech. — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
10. Kirilyuk V.S. Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.
11. Kotousov A. On a rigid inclusion pressed between two elastic half spaces / A. Kotousov, L.B. Neto, A. Khanna // Mechanics of Materials. — 2014. — **68**, N 1. — P. 38–44.
12. Podil'chuk Yu.N. Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // International Applied Mechanics. — 1998. — 34, N 7. — P. 623–628.
13. Selvadurai A.P.S. A unilateral contact problem for a rigid disc inclusion embedded between two dissimilar elastic half-spaces / A.P.S. Selvadurai // Q.J. Mech. Appl. Math. — 1994. — N 3. — P. 493–509.
14. Wang Y.J. The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // Mechanics Research Communications. — 2015. — Vol. 65. — P. 17–23.
15. Wang Z.K. The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // Int. J. Solids Structures. — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.

Надійшла 15.03.2018