УДК 519.85
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.2.11

ЗАДАЧИ НЕЧЕТКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУХСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ПАРАМЕТРАМИ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ОГРАНИЧЕНИЙ В ВИДЕ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Ю.А. ЗАК

Аннотация. Предложены детерминированные эквиваленты задач нечеткого линейного программирования с двухсторонними ограничениями на детерминированные значения переменных, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, а коэффициенты функции цели и линейные функции ограничений, а также левые и правые граничные их значения — нечеткие множества, преставленные fuzzy-интервалами с LR -представлением функций принадлежности общего вида. На основе рассмотренных в работе правил ранжирования и оценки доминирования нечетких множеств установлены условия безусловного (строгого) и условного (нестрогого) выполнения ограничений. Различного вида детерминированные эквиваленты задачи, в которых требуется выполнение fuzzy-ограничений с различной степенью строгости, предусматривают решения не одной, а некоторого множества задач линейного программирования. Выбирается наилучшее из допустимых решений.

Ключевые слова: нечеткое линейное программирование, fuzzy-интервалы с LR -представлением функций принадлежности, условия доминирования нечетких множеств, двухсторонние интервальные ограничения, детерминированный эквивалент.

ВВЕДЕНИЕ

Постановкам, математическим моделям и методам решения задач линейного программирования, в которых такие параметры, как граничные значения, а также коэффициеты целевых функций и ограничений могут быть выражены нечеткими множествами, уделялось значительное внимание в монографиях и периодической литературе (см., например, [1–10]). Такие задачи возникают в практических приложениях вследствие как нечеткости математического описания решаемой проблемы, так и некоторой размытости требований к выполнению установленных ограничений.

Поскольку формы нечеткого математического описания решаемой проблемы бывают различными, существуют разные классы задач нечеткого математического программирования:

- оптимизация как некоторой детерминированной функции, так и функции принадлежности некоторого нечеткого множества на заданном нечетком множестве допустимых альтернатив. Для решения этой задачи применялся подход Беллмана–Заде [11, 12] — поиск решения, максимизирующего минимальное из значений превышения функцией цели некоторого заданного уровня и уровня выполнения каждого из ограничений; нечеткая цель описывается функцией принадлежности. Решить данную задачу означает достигнуть заданного уровня цели и обеспечить выполнение каждого уровня из системы ограничений с заданным уровнем надежности;
- задачи линейного ограничения с размытыми ограничениями, в которых отклонениям приписываются различные степени допустимости и допускается нечеткое выполнение некоторых неравенств [2, 13, 17]. Исходная задача оказывается сформулированной в форме задачи достижения нечеткой цели, и к ней также можно применить подход Беллмана–Заде;
- рассматриваемый в данной работе класс задач, в которых коэффициенты функций цели и ограничений, а также левые и правые граничные значения – нечеткие множества, а переменные задачи — действительные числа, на которые (в отличие от рассматриваемых ранее подходов) могут быть наложены двухсторонние ограничения и некоторые из этих действительных чисел могут иметь отрицательные значения. Все рассматриваемые в литературе задачи предусматривали лишь положительные значения всех действительных переменных [11, 12]. Если все переменные задачи не могут быть отрицательными числами, в качестве одного из подходов при выборе в качестве решения одной из возможных альтернатив исходная задача может быть сформулирована в форме задачи достижения нечеткой цели и к ней можно также применить подход Беллмана–Заде (см., например, [1–4, 10, 17]). Общая схема решения задач в рассматриваемой в данной работе постановке заключается в следующем:
- вводим некоторые дискретные уровни на основе λ_k, $k = 0,1,...,K$, сечений значений функций принадлежности нечетких множеств (подмножества уровня λ) как фунций ограничений, так и их граничных значений. Каждый из этих уровней определяет интервалы возможных значений этих параметров и устанавливает возможности их сравнения;
- в зависимости от требований бузусловного или допустимости нестрого выполнения системы ограничений, а также субъективных представлений лица, принимающего решение (ЛПР), устанавливаем ограничения на соотношения границ этих интервалов в каждом из этих сечений. Ограничения принимают интервальный вид и размерность системы ограничений существенно увеличивается;
- вводим подмножества уровня λ_k, $k = 0,1,...,K$, и для целевой функции задачи потребуем оптимизацию для каждой из функций, коэффициентами которых являются все граничные значения образованных интервалов. Получим задачу многокритериальной оптимизации, которая, например, введением аддитивной свертки этих критериев с различными весовыми коэффициентами, сводится к решению однокритериальной задачи;
- в результате выполненных преобразований получаем детерминированный эквивалент исходной задачи нечеткого линейного программирования в виде задачи линейного программирования, которая может быть решена симплексным методом.

В случае, если некоторые переменные задачи могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, правила fuzzy-арифметики не позволяют ограничиваться только одним видом детерминированной математической модели задачи, и в этом случае приходится решать не одну, а несколько детерминированных задач линейного программирования, что существенно усложняет процесс решения. Среди допустимых решений сформулированных детерминированных задач выбирается решение с наилучшим значением целевой функции.

В данной работе предлагаются методы сравнения и определения безусловных и условных предпочтений нечетких множеств, на основе которых формулируются различного вида правила выполнения ограничений для нечетких множеств представления критерия оптимальности в виде одной или нескольких детерминированных функций переменных задачи. Для рассматриваемого класса задач нечеткого линейного программирования предложены детерминированные эквиваленты, обеспечивающие решение задачи при различных требованиях к строгости выполнения системы ограничений для нечетких множеств. Обсуждаются алгоритмы решения сформулированной задачи [14, 15].

МЕТОДЫ СРАВНЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЙ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ FUZZY-ОГРАНИЧЕНИЙ

Нечеткое множество $\overline{A}$ с функцией принадлежности произвольного вида аппроксимируем некоторой ломанной линией, соединяющей точки минимальных $a_0^1, a_1^1, ..., a_k^1, ..., a_K^1$ и максимальных значений координат абсцисс $a_0^2, a_1^2, ..., a_k^2, ..., a_K^2$ некоторого множества сечений, т.е. подмножеств уровней $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k, ..., \lambda_K$, и представляем их многоугольником $(a_0^1, a_1^1, ..., a_k^1, ...$ $..., a_K^1, a_K^2, a_{K-1}^2, ..., a_k^2, ..., a_0^2)$. Такая аппроксимация поясняется рис. 1, на котором выбрано 5 сечений: $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ и исходное множество представлено многоугольником $(a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1 = a_5^2, a_4^2, a_3^2, a_2^2, a_1^2, a_0^2)$.

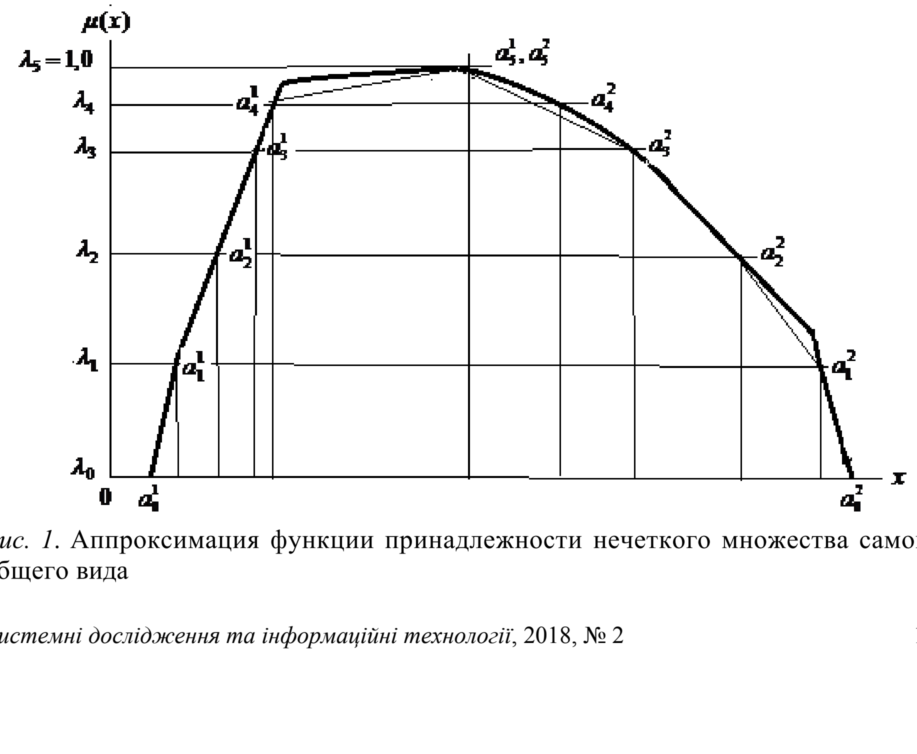

Рис. 1. Аппроксимация функции принадлежности нечеткого множества самого общего вида

Рассматриваются нормализованные нечеткие множества с LR-представлением функции принадлежности, т.е. функции, значения которых $\mu_{\overline{A}}(A)$, начиная с некоторого значения абсцисс $x = a(A)$, $\mu_{\overline{A}}[a(A)] = 0$ и до значения $x = m_1(A)$, $\mu_{\overline{A}}[m_1(A)] = 1{,}0$, на некотором отрезке $x \in [m_1(A), m_2(A)]$ (в частном случае только в одной точке — $x \in [m_1(A) = m_2(A) = m(A)]$) имеют постоянное значение $\mu_{\overline{A}}[m_1(A)] = \mu_{\overline{A}}[m_2(A)] = 1{,}0$, а на отрезке $x \in [m_2(A), b(A)]$ убывают до значения $\mu_{\overline{A}}[b(A)] = 0$.

Среди достаточно большого количества функций этого класса наибольший интерес представляют нечеткие множества с функцией принадлежности прямоугольного, треугольного и трапецевидного типов.

Обозначим координаты абсцисс крайних точек каждого из этих сечений соответственно $a_k^1[A(\beta_k)]$ и $a_k^2[A(\beta_k)]$, $k = 0,1,...,K$. Обозначим координаты абсцисс крайних точек функций принадлежности соответствующих нечетких множеств при $\beta_0 = \beta_K = 0$ через $R^1(\overline{A})$ и $R^2(\overline{A})$, а крайних точек функций принадлежности соответствующих нечетких множеств при $\beta_s = 1{,}0$, где $s = \dfrac{K+1}{2}$, соответственно $T^1(\overline{A})$ и $T^2(\overline{A})$. Здесь, если $T^1(\overline{A}) = T^2(\overline{A})$, т.е. $\mu_{\overline{A}}(A)$, имеет только одну координату абсцисс, для которой $\mu_{\overline{A}}(A) = 1{,}0$, то K — четное число.

Координаты абсцисс соответствующих сечений функций принадлежности определяются по формулам:

$$a_k^1[\overline{A}(\beta_k)] = R^1(\overline{A}) + \beta_k[T^1(\overline{A}) - R^1(\overline{A})];$$

$$a_k^2[\overline{A}(\beta_k)] = R^2(\overline{A}) - \beta_k[R^2(\overline{A}) - T^2(\overline{A})],\ k = 0,1,...,K.$$

В результате умножения нечеткого множества на некоторое действительное число b координаты абсцисс соответствующих сечений функций принадлежности нечетких множества $\overline{D}$ вычисляются по формулам:

$$a_k^1[\overline{D}(\lambda_k)] = ba_k^1[\overline{A}(\beta_k)] = \begin{cases} b\{R^1(\overline{A}) + \lambda_k[T^1(\overline{A}) - R^1(\overline{A})]\},\ if\ b \ge 0, \\ b\{R^2(\overline{A}) - \lambda_k[R^2(\overline{A}) - T^2(\overline{A})]\},\ if\ b < 0; \end{cases}$$

$$a_k^2[\overline{D}(\lambda_k)] = ba_k^2[\overline{A}(\lambda_k)] = \begin{cases} b\{R^2(\overline{A}) - \lambda_k[R^2(\overline{A}) - T^2(\overline{A})]\},\ if\ b \ge 0, \\ b\{R^1(\overline{A}) + \lambda_k[T^1(\overline{A}) - R^1(\overline{A})]\},\ if\ b < 0. \end{cases}$$

В результате сложения нечетких множеств координаты соответствующих сечений вычисляются по формулам:

$$a_k^1[\overline{P}(\lambda_k)] = \sum_{i=1}^{n} a_k^1[\overline{A}_i(\lambda_k)] = \left\{\sum_{i=1}^{n} R^1(\overline{A}_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_k[T^1(\overline{A}_i) - R^1(\overline{A}_i)]\right\};$$

$$a_k^2[\overline{P}(\lambda_k)] = \sum_{i=1}^{n} a_k^2[\overline{A}_i(\lambda_k)] = \left\{\sum_{i=1}^{n} R^2(\overline{A}_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_k[R^2(\overline{A}_i) - T^2(\overline{A}_i)]\right\}.$$

Рассматривается задача нечеткого линейного программирования с двухсторонними ограничениями вида

$$\overline{F} = \min_{X \in [H^1, H^2]} \sum_{j=1}^{m} \overline{C}_j x_j$$

в условиях ограничений

$$b_i^1 \le y_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{A}_{ij} x_j \le b_i^2, \ i = 1,...,n,$$

или

$$\overline{B}_i^1 \le y_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{A}_{ij} x_j \le \overline{B}_i^2, \ i = 1,...,n;$$

$$h_j^1 \le x_j \le h_j^2, \ j = 1,...,m. \qquad (1)$$

Здесь $\overline{C}_j$, $\overline{A}_{ij}$ и граничные значения $\overline{B}_i^1$, $\overline{B}_i^2$, $i = 1,...,n$; $j = 1,...,m$, а следовательно и значения $\overline{F}$ и $\overline{Y}_i$, $i = 1,...,n$, — нечеткие множества с функций принадлежности LR-представления произвольного вида, а переменные задачи x_j и граничные значения h_j^1, h_j^2 и b_i^1, b_i^2 — действительные числа, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Так как нечеткое множество определяет некоторый диапазон возможных значений критерия оптимальности и выходных переменных, определим сформулированные в данной задаче условия выполнения ограничений задачи и понятие оптимальности функции цели задачи.

Здесь и в дальнейшем для простоты изложения наряду с обозначениями $\overline{F}(\lambda)$, $\overline{Y}_i(\lambda)$, $\overline{B}_i^1(\lambda)$, $\overline{B}_i^2(\lambda)$ могут также использоваться обозначения соответствующих нечетких множеств $F(\lambda)$, $Y_i(\lambda)$, $B_i^1(\lambda)$, $B_i^2(\lambda)$.

Обозначим $d^1[F(\lambda)]$, $d^2[F(\lambda)]$ и $d^1[\overline{Y}_i(\lambda)]$, а также $d^2[\overline{Y}_i(\lambda)]$, $d^1 B_i^1(\lambda)]$, $d^2 B_i^1(\lambda)]$; $d^1[B_i^2(\lambda)]$, $d^2[B_i^2(\lambda)]$, $i = 1,...,n$ — соответственно левые и правые крайние координаты абсцисс различных сечений функций принадлежности соответствующих сечений рассматриваемых нечетких множеств. Пусть $\lambda_0 = 0$, $\lambda_K = 1{,}0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k = 0,1,...,(K-1)$.

Определение 1. Из условий

$$d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^1[B_i^1(\lambda)] \text{ и } d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^2[B_i^1(\lambda)], \ \lambda = 0,1,...,k,...,K,$$

и $$d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \le d^1[B_i^2(\lambda)] \text{ и } d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \le d^2[B_i^2(\lambda)], \ \lambda = 0,1,...,k,...,K,$$

или $$d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^2[B_i^1(\lambda)] \text{ и } d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^1[B_i^2(\lambda)], \ \lambda = 0,1,...,k,...,K,$$

следует безусловное выполнение ограничений $\overline{Y}_i \ge \overline{B}_i^1$ и $\overline{Y}_i \le \overline{B}_i^2$, $i = 1,...,n$.

Определение 2. Выполнение неравенств

$$d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^1[B_i^1(\lambda)] \text{ и } d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^2[B_i^2(\lambda)], \ \lambda = 0,1,...,k,...,K,$$

свидетельствует о нестрогом выполнении i-го ограничения (выполнение в слабом смысле).

Определение 3. Если для некоторого подмножества сечений $\overline{K}_1^1 = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{g^1}\}$ одно из неравенств $d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge d^2[B_i^1(\lambda)]$ или $d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \ge$

$\geq d^1[B_i^1(\lambda)]$ может не выполняться, или для некоторого подмножества сечений $\overline{K}_1^2 = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{g^2}\}$ может не выполняться одно из неравенств $d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] \leq d^2[B_i^2(\lambda)]$ или $d^2[\overline{Y}_i(\lambda)] \leq d^1[B_i^2(\lambda)]$, а для каждого из подмножества уровня λ $\overline{K}_2^1 = \{\lambda_{g^1+1}, \lambda_{g^1+2}, ..., \lambda_K\}$ или $\overline{K}_2^2 = \{\lambda_{g^2+1}, \lambda_{g^2+2}, ..., \lambda_K\}$ с большими значениями λ выполняются одновременно два из этих неравенств, то это означает, что соответствующие ограничения выполняются в слабом смысле.

Если $\overline{B}_i^1$ и $\overline{B}_i^2$ не являются нечеткими множествами, а некоторые действительные числа — B_i^1 и B_i^2, то безусловное выполнение ограничений $\overline{Y}_i \geq B_i^1$ и $\overline{Y}_i \leq \overline{B}_i^2$ равносильно выполнению пары неравенств $d^1[\overline{Y}_i(\lambda_0 = 0)] \geq B_i^1$ и $d^2[\overline{Y}_i(\lambda_K = 0)] \leq B_i^2$, а выполнение этой пары ограничений в слабом смысле — выполнение одной из пары условий

$$d^1[\overline{Y}_i(\lambda_k > 0)] \geq B_i^1,\ k = g^1, g^1+1, ..., K;\quad d^2[\overline{Y}_i(\lambda_K = 0)] \leq B_i^2;$$

$$d^1[\overline{Y}_i(\lambda_0 = 0)] \geq B_i^1;\quad d^2[\overline{Y}_i(\lambda_k)] \leq B_i^2,\ k = p, p+1, ..., g^2,$$

где λ_p — сечение с координатами абсцисс $\overline{Y}_i = m_1(\overline{Y}_i) = m_2(\overline{Y}_i)$.

Обозначим:

$$\overline{d}[\overline{Y}_i(\lambda)] = 0{,}5\{d^1[\overline{Y}_i(\lambda)] + d^2[\overline{Y}_i(\lambda)]\},\quad \overline{d}[\overline{B}_i^1(\lambda)] = 0{,}5\{d^1[\overline{B}_i^1(\lambda)] + d^2[\overline{B}_i^1(\lambda)]\};$$

$$\overline{d}[\overline{B}_i^2(\lambda)] = 0{,}5\{d^1[\overline{B}_i^2(\lambda)] + d^2[\overline{B}_i^2(\lambda)]\},\quad \lambda = 0,1,...,k,...,K.$$

Определение 4. В случае, если все условия определения 1 не выполняются, а справедлива система неравенств

$$\overline{d}[B_i^1(\lambda)] \leq \overline{d}[\overline{Y}_i(\lambda)] \leq \overline{d}[B_i^2(\lambda)],\ \lambda = 0,1,...,k,...,K,$$

следует заключить, что i-е ограничение выполняется в слабом смысле.

Определение 5. Выполнение условий $\min\limits_{X \in [H^1, H^2]} \overline{F}$ эквивалентно выполнению ряда условий минимизации множества критериев

$$\min_{X \in [H^1, H^2]} d^1[\overline{F}(\lambda)],\quad \min_{X \in [H^1, H^2]} d^2[\overline{F}(\lambda)],\ \lambda = 0,1,...,k,...,K. \tag{2}$$

Другим детерминированным эквивалентом критерия оптимальности является минимизация координаты абсцисс центра тяжести этого нечеткого множества

$$G(\overline{F}) = \frac{\int\limits_{a(\overline{F})}^{b(\overline{F})} \overline{F} \mu_{\widetilde{F}}(\overline{F})\, dF}{\int\limits_{a(\overline{F})}^{b(\overline{F})} \mu_{\overline{F}}(\overline{F})\, dF}, \tag{3}$$

где $a(\overline{F})$ и $b(\overline{F})$ — граничные значения (абсциссы крайних левой и правой точек) нечеткого множества критерия оптимальности.

Обозначим соответственно через $C(\overline{Y}_i)$ и $C(\overline{B}_i^1)$, $C(\overline{B}_i^2)$ координаты абсцисс центров тяжести соответствующих подмножеств.

Определение 6. В случае, если все условия определения 1 не выполняются, а справедлива система неравенств $C(\overline{B}_i^1) \leq C(\overline{Y}_i) \leq C(\overline{B}_i^2)$, следует, что i-е ограничение выполняется в слабом смысле.

Различные условия выполнения интервальных ограничений представлены на рис. 2.

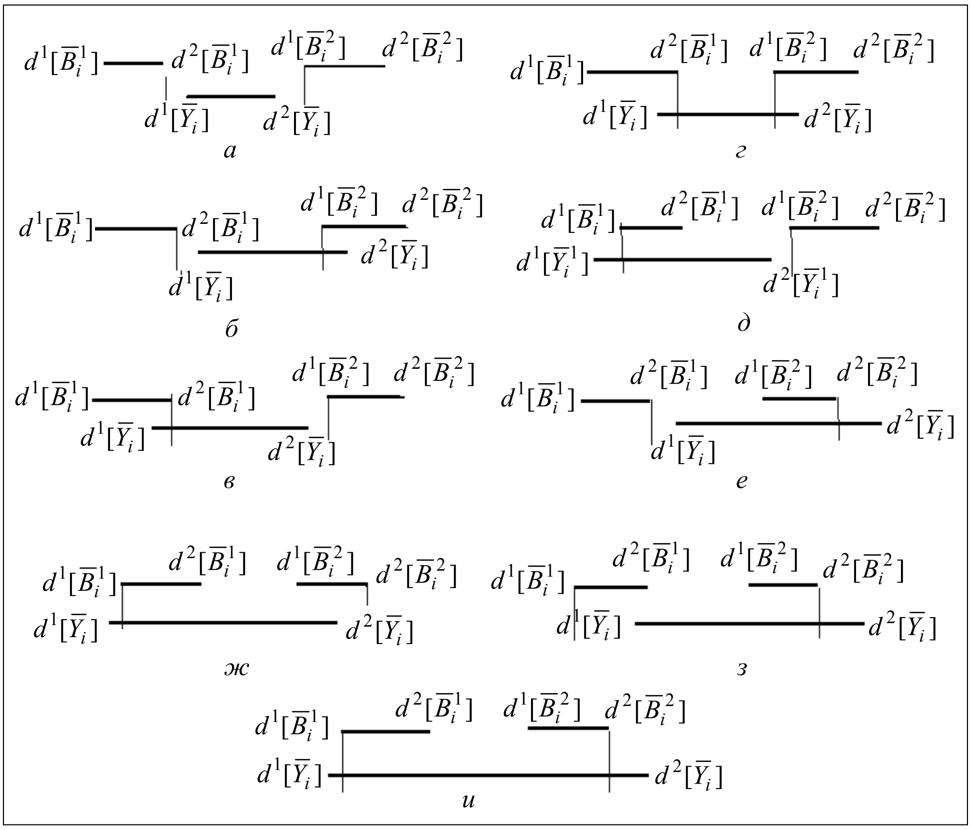

Рис. 2. Различные случаи выполнения и нарушения интервальных ограничений

Строгое (безусловное) выполнение интервальных ограничений иллюстрирует рис. 2, *а*, их нестрогое выполнение — рис. 2, *г*, а на рис. 2, *д* – *е* — ситуации, в которых одно из двухсторонних ограничений нарушено. Ситуация, когда оба из интервальных ограничений нарушены, показана на рис. 2, *и*.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЭКВИВАЛЕНТЫ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В качестве детерминированного эквивалента задачи линейного программирования с двухсторонними ограничениями, в которой переменные задачи — действительные числа, а коэффициенты целевой функции, функций ограничений, а также их граничных значений представлены нечеткими множествами, могут рассматриваться следующие модели. В результате решения задачи значения функций ограничений и критерия оптимальности будут представлены нечеткими множествами. В данных условиях ограничения задачи могут быть сформулированы в форме принадлежности интервала расчетных значений абсцисс нечетких множеств выходных переменных заданным интервалам допустимых значений, а критерий оптимальности — в виде многокритериальной задачи оптимизации значений сумм координат абсцисс функций принадлежности правых и левых частей установленных сечений нечеткого множества критерия оптимальности.

Граничные значения на переменные задачи, т.е. значения h_j^1 и h_j^2, могут быть как отрицательными, так и положительными значениями. Обозначим $\tilde{J}^1$ — подмножество переменных задачи, для которых $h_j^1 \geq 0$ и следовательно $h_j^2 > 0$, т.е. $\tilde{J}^1 = \{j \in \tilde{J} \,|\, h_j^1 \geq 0, h_j^2 > 0\}$, а также $\tilde{J}^2 = \{j \in \tilde{J} \,|\, h_j^1 < 0, h_j^2 \geq 0\}$ и $\tilde{J}^3 = \{j \in \tilde{J} \,|\, h_j^1 < 0,\, h_j^2 < 0\}$.

Поскольку значения коэффициентов функции цели и функций ограничений задачи в зависимости от знака переменной вычисляются по различным формулам,

$$D^1[\overline{C}_j] = \begin{cases} d^1[\overline{C}_j], \text{ if } x_j \geq 0, \\ d^2[\overline{C}_j], \text{ if } x_j < 0; \end{cases} \quad D^2[\overline{C}_j] = \begin{cases} d^2[\overline{C}_j], \text{ if } x_j \geq 0, \\ d^1[\overline{C}_j], \text{ if } x_j < 0; \end{cases}$$

$$D^1\left[\overline{A}_{ij}\right] = \begin{cases} d^1[\overline{A}_{ij}], \text{ if } x_j \geq 0, \\ d^2[\overline{A}_{ij}], \text{ if } x_j < 0; \end{cases} \quad D^2[\overline{A}_{ij}] = \begin{cases} d^2[\overline{A}_{ij}], \text{ if } x_j \geq 0, \\ d^1[\overline{A}_{ij}], \text{ if } x_j < 0, \end{cases} \qquad (4)$$

то детерминированный эквивалент задачи нечеткого линейного программирования должен быть представлен не одной задачей, а последовательностью решения некоторого множества задач линейного программирования с различными математическими моделями, учитывающими все возможные комбинации знаков переменных задачи. Если количество переменных подмножества $\tilde{J}^1$ равно m_1, подмножества $\tilde{J}^2$ — m_2 и подмножества $\tilde{J}^3$ — m_3 (где $m_1 + m_2 + m_3 = m$), то необходимо решить 2^{m_2} различных задач этого типа. Так, например, в случае $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ и $m_3 = 1$ необходимо решить $2^2 = 4$ таких задач. Комбинации знаков переменных и коэффициентов этих задач:

1) (+ + + – – –), 2) (+ + + – + –), 3) (+ + + + – –), 4) (+ + + + + –).

Как видно из формул (3) и (4), в каждой из математических моделей этих задач все коэффициенты $D^1[\overline{C}_j(\lambda)]$, $D^2[\overline{C}_j(\lambda)]$, а также $D^1[\overline{A}_{ij}(\lambda)]$, $D^2[\overline{A}_{ij}(\lambda)]$ при переменных подмножества $\tilde{J}^1$ рассчитываются по различным формулам как для положительных значений переменных, так и для подмножества $\tilde{J}^3$ — для отрицательных значений, а для переменных подмножества $\tilde{J}^2$ — в зависимости от знака этой переменной, выбранной в данной конкретной комбинации. Среди всех допустимых решений этих задач выбирается решение с лучшим значением критерия оптимальности:

$$F_k^1 = \min_{X\in[h^1,h^2]} \sum_{j=1}^{n} x_j [D^1(\overline{C}_j(\lambda_k))];$$

$$F_k^2 = \min_{X\in[h^1,h^2]} \sum_{j=1}^{n} x_j [D^2(\overline{C}_j(\lambda_k))], \quad k = 0,1,...,K,$$

либо

$$F^3 = \min_{X\in[h^1,h^2]} \sum_{j=1}^{n} x_j G(\vec{C}_j) \tag{5}$$

в условиях ограничений на переменные (1), а также различных требований выполнения системы ограничений

$$\hat{d}(\overline{B}_i^1(\lambda_k)) \le \sum_{j=1}^{n} x_j [\hat{d}((\overline{A}_{ij}(\lambda_k))] \le \hat{d}((\overline{B}_i^2(\lambda_k)), \quad k = 0,1,...,K; \ i = 1,...,n .$$

Здесь $\hat{d}(\cdot)$ — значения $d^1(\cdot)$ или $d^2(\cdot)$ в зависимости от различных требований выполнения ограничений предусматривают их безусловное или условное (менее строгое) их выполнение.

Множество критериев (4) представим аддитивной сверткой критериев

$$\Phi = \min_{X\in[h^1,h^2]} \sum_{k=0}^{K} \left\{ \eta_k^1 \sum_{j=1}^{n} x_j [D^1(\overline{C}_j(\lambda_k))] + \eta_k^2 \sum_{j=1}^{n} x_j [D^2(\overline{C}_j(\lambda_k))] \right\}, \tag{6}$$

где $\eta_k^1 \ge 0$, $\eta_k^2 \ge 0$ — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям $\sum_{k=0}^{K} (\eta_k^1 + \eta_k^2) = 1$.

Рассмотрим различные виды детерминированных эквивалентов рассматриваемых в работе задач нечеткого линейного программирования.

Задачи 1, 2, 3 (безусловное выполнение системы ограничений). Необходимо решить 2^{m_2} задач линейного программирования, в каждой из которых требуется минимизировать критерий оптимальности (5) или (6), либо критерий

$$\Phi = \min_{X\in[h^1,h^2]} \sum_{k=0}^{K} \beta_k \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{D}[\overline{C}_j(\lambda_k)], \tag{7}$$

где $\overline{D}[\overline{C}_j(\lambda_k)] = 0{,}5\{D^1[\overline{C}_j(\lambda_k)] + D^2[\overline{C}_j(\lambda_k)]\}$, $k = 0,1,...,K$, в условиях системы ограничений для $k = 0,1,...,K$;

$$d^2[\overline{B}_i^1(\lambda_k)] \le \sum_{j=1}^{m} D^p[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)] x_j \le d^1[\overline{B}_i^2(\lambda_k)], \quad p = 1,2, \ i = 1,...,n . \tag{8}$$

Если в задаче используются коэффициенты $D^1[\overline{C}_j(\lambda_k)]$ и $D^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]$, $j = 1,..., m_2$, $i = 1,...,n$, то ограничения на детерминированные значения переменных должны быть в виде $0 \le x_j \le h_j^2$. Коэффициенты $D^2[\overline{C}_j(\lambda_k)]$ и $D^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]$, $i = 1,...,n$, используются для подмножества переменных $\widetilde{J}^3$, т.е. $j = m_2 + 1,...,m$, а также подмножества переменных $\widetilde{J}^2$ при условии, что на все эти переменные будут наложены ограничения $h_j^1 \le x_j < 0$, $j = 1,...,m_2$.

Среди всех допустимых решений этих задач находим решение с наименьшим значением целевой функции. Данное решение и принимается в качестве решения сформулированной задачи нечеткого линейного программирования. В большинстве практических приложений все переменные задачи — положительные действительные числа, т.е. $m_2 = 0$ и $2^{m_2} = 1$, модель детерминированного эквивалента задачи нечеткого линейного программирования однозначна, и необходимо решать только одну из рассматриваемых задач.

Если ни одна из сформулированных 2^{m_2} детерминированных задач не имеет допустимых решений, то решений исходной задачи в условиях безусловного выполнения всей системы ограничений не существует. В этом случае могут быть рассмотрены различные постановки задач, предусматривающие выполнение системы ограничений в слабом смысле.

Задачи 4, 5, 6 (условное выполнение системы ограничений). Необходимо решить 2^{m_2} задач линейного программирования, в каждой из которых требуется минимизировать критерий оптимальности (5) или (6), либо (7) в условиях системы ограничений

$$d^1[\overline{B}_i^1(\lambda_k)] \le \sum_{j=1}^{m} \overline{D}[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]x_j \le d^2[\overline{B}_i^2(\lambda_k)],\ k = 0,1,...,K,\ p = 1,2,\ i = 1,...,n, \quad (9)$$

$\overline{D}[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)] = 0{,}5\{D^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)] + D^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]\}$, а значения $D^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]$ и $D^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]$ вычисляются по формулам

$$D^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)] = \begin{cases} d^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)], & \text{if } x_j \ge 0, \\ d^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)], & \text{if } x_j < 0; \end{cases} \quad D^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)] = \begin{cases} d^2[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)], & \text{if } x_j \ge 0, \\ d^1[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)], & \text{if } x_j < 0. \end{cases}$$

При этом ограничения на переменные x_j, $j = 1,...,m$, устанавливаются аналогично описанным в задачах 1–3.

Кроме того, могут рассматриваться более слабые, чем в задачах 1–3, условия, которые определяют менее строгое выполнение системы ограничений:

$$d^1[\overline{B}_i^1(\lambda_k)] \le \sum_{j=1}^{m} D^p[[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]_{ij}(\lambda_k)]x_j \le d^2[\overline{B}_i^2(\lambda_k)],\ p = 1,2,\ \ i = 1,...,n.$$

Задачи 7, 8, 9 (выполнение системы ограничений в слабом смысле). Необходимо решить 2^{m_2} задач линейного программирования, в каждой из которых требуется минимизировать критерий оптимальности (5) или (6), либо (7) в условиях системы ограничений

$$G(\overline{B}_i^1) \le \sum_{j=1}^{m} \overline{G}(\overline{A}_{ij})x_j \le G(\overline{B}_i^2),\ i = 1,...,n.$$

Задачи 10, 11, 12 (выполнение системы ограничений в слабом смысле). Необходимо решить 2^{m_2} задач линейного программирования, в каждой из которых требуется минимизировать критерий оптимальности (5) или (6), либо (7) в условиях системы ограничений (9) для значений $k = k_1 > 0$, $k_1 + 1,\dots,K$, а для значений $k = 0,1,2,\dots,(k_1 - 1)$ — выполнение только одной из пары ограничений

$$d^1[\overline{B}_i^1(\lambda_k)] \le \sum_{j=1}^{m} D^p[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]x_j ,$$

либо

$$\sum_{j=1}^{m} D^p[\overline{A}_{ij}(\lambda_k)]x_j \le d^2[\overline{B}_i^2(\lambda_k)] ,\ k = 0,1,2,\dots,(k_1 - 1) ,\ i = 1,\dots,n .$$

То есть для сечений с малым значением функций принадлежности не требуется строгого выполнения двухсторонних ограничений, а ставится требование выполнения только одного из них, а в некоторых случаях допускается, что не будет выполнено ни одно из них. Выбор значений $k = k_1$, а также степени важности одного из пары ограничений является субъективным, зависит от специфики прикладной задачи и решения ЛПР.

Как и в задачах 1–3, во всех задачах 4–12, предусматривающих выполнение всей системы ограничений в слабом смысле, в случае получения допустимого решения некоторых из сформулированных задач в качестве решения задачи нечеткого линейного программирования в условиях условного выполнения системы ограничений принимается допустимое решение детерминированной задачи с наилучшим значением критерия оптимальности. Если ни одна из сформулированных задач не имеет допустимого решения, то в сформулированной постановке решения исходной задачи нечеткого линейного программирования не существует.

Следует отметить, что для большинства практических приложений значения переменных задачи могут быть только положительными действительными числами, т.е. $h_j^2 \ge h_j^1 \ge 0$, $j = 1,\dots,m$. В этом случае $m_2 = 0$ и необходимо решать только одну из каждого вида детерминированных задач 1–12.

Обозначим соответственно $\widetilde{\Omega}_0$ и $\widetilde{\Omega}_l$, $l = 1,\dots,L$, множества значений переменных задачи, удовлетворяющих системе неравенств, обеспечивающих безусловное и различного вида нестрогое (условное) выполнение ограничений для нечетких множеств сформулированной задачи; $\overline{F}_0^3$, $\overline{\Phi}_0$ и $\overline{F}_l^3$, $\overline{\Phi}_l$, $l = 1,\dots,L$, — соответственно минимальные значения критериев оптимальности в решении этих задач.

Утверждение. 1. Так как $\widetilde{\Omega}_0 \subseteq \widetilde{\Omega}_l$, то $\overline{\Phi}_l \le \overline{\Phi}_0$, $\overline{F}_l^3 \le \overline{F}_0^3$, $l = 1,\dots,L$.

2. Если $\widetilde{\Omega}_\xi \subseteq \widetilde{\Omega}_l$, то $\overline{\Phi}_l \le \overline{\Phi}_\xi$, $\overline{F}_l^3 \le \overline{F}_\xi^3$, $l,\xi = 1,\dots,L$.

Предлагается следующий процесс решения сформулированной проблемы. Формулируется детерминированный эквивалент, предусматривающий безусловное выполнение всех ограничений задачи в виде задач 1–3 при условии выполнения системы неравенств в виде (8). Если какая-то из сформулированных 2^{m_2} задач имеет допустимое решение, то на этом процесс поиска решений завершается. В противном случае формулируем различные виды детерминированных эквивалентов, предусматривающих нестрогое (условное) выполнение всех ограничений в виде задач 1–3 при условии выполнения системы неравенств в виде (9), либо в форме задач 4–12. При этом в соответствии с решением экспертного совета и ЛПР на каждом из последующих этапов определяется и увеличивается то подмножество неравенств и (или) сечений, для которых могут быть ослаблены требования выполнения ограничений. Этот процесс продолжается до тех пор, пока на некотором этапе не будет получено допустимое решение одной из сформулированных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована задача нечеткого линейного программирования с двухсторонними ограничениями детерминированных значений переменных и линейными функциями, в которой левые и правые граничные значения линейных функций, коэффициенты ограничений и критерия оптимальности суть нечеткие множества, преставленные fuzzy-интервалами с LR -функциями принадлежности общего вида.

Предложены правила ранжирования и оценки доминирования для нечетких множеств, установлены условия безусловного (строгого) и условного (нестрогого) выполнения ограничений для нечетких множеств с функциями принадлежности, представленных LR fuzzy-интервалами.

Предложены различные детерминированные эквиваленты сформулированных задач нечеткого линейного программирования в условиях, когда переменные задачи могут принимать как положительные, так и отрицательные значения в виде решения 2^{m_2} детерминированных задач линейного программирования, предусматривающие различные требования к строгости выполнения всей системы ограничений. Каждая из этих 2^{m_2} задач содержит существенно большее количество ограничений, но может быть решена симплексным методом линейного программирования. Если переменные задачи могут принимать только неотрицательные значения, то каждый детерминированный эквивалент представлен только одной задачей.

В случае отсутствия решения задачи, обеспечивающего безусловное выполнение всей системы fuzzy-ограничений, последовательное ослабление требований к выполнению отдельных неравенств и формулирование различного вида детерминированных эквивалентов, обеспечивающих нестрогое выполнение ограничений для нечетких множеств (fuzzy-множеств), происходит на основе субъективных соображений ЛПР в соответствии со спецификой решаемой задачи.

В подавляющем большинстве практических задач принятия решений все действительные значения переменных задачи могут принимать только положительные значения. Следовательно, $m_2 = 0$ и $2^{m_2} = 1$, и в зависимости от требования к строгости выполнения ограничений необходимо решать не несколько, а только одну задачу каждого класса. Однако для некоторых задач управления промышленными объектами возможны и отрицательные значения управляющих переменных (например, если они заданы в отклонениях от стандартной величины), для которых предлагаемые математические модели и алгоритмы найдут приктические приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шаталова А.Ю.* Нечеткое линейное программирование в задачах оптимального финансирования инвестиционных проектов, максимизирующей получаемый предприятием доход / А.Ю. Шаталова, К.А. Лебедев // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2015. — № 9–1. — С. 35–38;
2. *Шведов А.С.* Нечеткое математическое программирование: краткий обзор / А.С. Шведов // Проблемы управления. — М., № 3, 2017. — С. 2–10.
3. *Zimmermann H-J.* Fuzzy programming and linear programming with several objective functions / H-J. Zimmermann // Fuzzy Sets and Systems. — 1978. — Vol. 1. — P. 45–57.
4. *Rommelfanger H.J.* Fuzzy-Optimierungsmodelle in praktischen Anwendungen // Multi-Criteria und Fuzzy-Systeme in Theorie und Praxis. — Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden 2003. — P. 95–113.
5. *Rommelfanger H.J.* Entscheiden bei Unschärfe. Fuzzy Decision Support System / H.J. Rommelfanger. — Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, Second edition 1994.
6. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах / Ю.П. Зайченко. — К.: Слово, 2008. — 344 с.
7. *Sakawa M.* Fuzzy Sets and multiobjektive optimization / M. Sakawa. — N-Y: Plenum Press, 1993. — 380 p.
8. *Maleki H.R.* Linear programming with fuzzy variables / H.R. Maleki, M. Tata, M. Mashinchi // Fuzzy Sets and Systems. — 2000. — Vol. 109. — P. 21–33.
9. *Mahdavi-Amiri N.* Duality in fuzzy number linear programming by use of a certain linear ranking function / N. Mahdavi-Amiri, S.H. Nasseri // Applied Mathematics and Computation. — 2006. — Vol. 180. — P. 206–216.
10. *Delgado M.* A general model for fuzzy linear programming / M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila // Fuzzy sets and System. — Vol. 29. — 1989. — P. 21–29.
11. *Bellman R.E.* Decision-Making in Fuzzy Environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // Management Science. — 1970. —Vol. 17. — N 4. — P.141–160.
12. *Беллман Р.* Принятие решений в расплывчатых условиях / Р. Беллман, Л. Заде // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.: Мир, 1976. — С. 172–215.
13. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский // М.: Радио и связь, 1981. — 286 с.
14. *Згуровский М.З.* Модели принятия решений в нечетких условиях / М.З. Згуровский, Ю.П. Зайченко. — К.: Наук. думка. — 211 с.
15. *Зак Ю.А.* Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных / Ю.А. Зак. — М.: URSS, 2013. — 352 с.
16. *Зак Ю.А.* Четкий эквивалент задачи Fuzzy-линейного пограммирования / Ю.А. Зак // Проблемы управления и информатики. — К., 2011. — № 1. — С. 87–101.
17. *Зак Ю.А.* Многокритериальные задачи математического программирования с размытыми ограничениями. Математические модели схем компромисса. Выбор решений из конечного множества альтернатив // Кибернетика и системный анализ. — К., 2010. — № 5. — С. 80–89.

Поступила 01.09.2017