ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

УДК 517.9
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.4.01

ЯКІСНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА СКІНЧЕННОВИМІРНІСТЬ З ТОЧНІСТЮ ДО МАЛОГО ПАРАМЕТРА СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КЛІМАТОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ БУДИКО–СЕЛЛЕРСА

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, П.О. КАСЬЯНОВ, Н.В. ГОРБАНЬ, Л.С. ПАЛІЙЧУК

Анотація. Проведено якісний аналіз поведінки розв'язків кліматологічної моделі енергетичного балансу Будико–Селлерса, розглянутої на рімановому багатовиді без краю. Установлено глобальне існування слабкого розв'язку досліджуваної задачі з довільними початковими даними з фазового простору, вивчено його властивості, регулярність. Знайдено функцію Ляпунова. Доведено теореми існування глобального та траєкторного атракторів для багатозначного півпотоку, породженого всіма слабкими розв'язками задачі. Вивчено властивості атракторів, установлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій задачі. Досліджено характер притягнення розв'язків до глобального та траєкторного атракторів та їх структуру. Отримано скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків задачі.

Ключові слова: кліматологічна модель енергетичного балансу, глобальний атрактор, траєкторний атрактор, скінченновимірність з точністю до малого параметра, багатозначний півпотік, слабкий розв'язок.

ВСТУП

Вивчення клімату та дослідження його змін натепер є однією з найбільш актуальних проблем сучасної науки. Зважаючи на це, дедалі більше інтенсифікуються різнобічні дослідження математичних моделей, що описують динаміку кліматичних процесів у довгостроковому періоді. Значний математичний інтерес становить дослідження кліматологічної моделі енергетичного балансу, в якій невідомою величиною є температура земної поверхні. Моделі такого типу демонструють ефективність зворотного зв'язку термічного режиму та альбедо поверхні. Уперше таку модель опублікував у 1969 р. видатний вчений-кліматолог М.І. Будико [1]. У тому ж році В.Д. Селлерс [2] опублікував дуже схожу модель глобального клімату. Відмінність від моделі, запропонованої М.І. Будико, полягала в параметризації меридіонального потоку тепла, який М.І. Будико виводив з даних спостережень за енергетичним балансом, а В.Д. Селлерс — з міркувань макродифузії. Їх праці були одними з перших і мали ключовий вплив на розвиток та становлення математичного моделювання кліматологічних моделей. Енергобалансові моделі клімату називають моделями Будико–Селлерса. Пізніше ці моделі вивчало багато науковців. Зокрема у працях [3–5] розглядалось питання про розв'язність моделі Будико–Селлерса, вивчалась її чутливість до малих збурень в одному з визначальних параметрів задачі, а також досліджувалася відповідна стаціонарна задача. Доцільно згадати праці [6–10], присвячені якісним дослідженням слабких розв'язків задачі.

Мета роботи — дослідити якісні властивості та встановити скінченновимірність з точністю до малого параметра динаміки розв'язків кліматологічної моделі Будико–Селлерса, розглянутої на багатовиді без краю.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай (M,g) — C^{∞}-компактний зв'язний орієнтований двовимірний рімановий багатовид без краю (наприклад, $M=S^2$ — одинична сфера в $\mathbf{R}^3$). Розглянемо задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+R_e(x,u)\in QS(x)\beta(u),\ (x,t)\in\mathbf{R}_+\times M, \tag{1}$$

де $\Delta u=\operatorname{div}_M(\nabla_M u)$; ∇_M розуміється в сенсі метрики Рімана g. Зазначимо, що включення (1) — це кліматологічна модель енергетичного балансу. Невідома функція $u(x,t)$ у включенні (1) репрезентує середню температуру земної поверхні. У праці [1] енергетичний баланс виражається через варіацію температури, що становить R_a-R_e+D, причому $R_a=QS(x)\beta(u)$, де R_a репрезентує сонячну енергію, яку поглинає Земля; $Q>0$ — сонячна константа (середнє значення за рік і середнє по земній поверхні поглинутого сонячного радіаційного потоку); $S(x)$ — функція інсоляції, задана розподілом сонячного випромінювання, що падає на верхні шари атмосфери; β — функція ко-альбедо, що описує співвідношення між поглиненою та випромінюваною сонячною енергією в точці x земної поверхні. Очевидно, що $\beta(u(x,t))$ залежить від природи земної поверхні. Наприклад, відомо, що на льодовиках значення $\beta(u(x,t))$ є значно меншим, ніж на поверхні океану, адже білий колір льоду відбиває більшу кількість випромінюваної сонячної енергії, тоді як океан завдяки своєму темному кольору та високій теплоємності поглинає більшу кількість випромінюваної сонячної енергії. Тож природно, що $\beta(u(x,t))$ може бути розривною. Доданок R_e виражає енергію, що випромінюється Землею. Як правило, вважається, що R_e — зростаюча за u функція. Доданок D виражає дифузію тепла. З метою спрощення міркувань, не обмежуючи загальності, припускається, що вона стала. Як правило, доданок R_e обирають згідно із законом Ньютона як лінійну функцію від u, $R_e=Bu+C$ (тут B, C — деякі додатні константи) [1], або згідно із законом Стефана–Больцмана $R_e=\sigma u^4$ [2]. У цій роботі розглядаємо $R_e=Bu$, як і у праці [1].

Нехай для функції $S:M\to\mathbf{R}$ виконуються умови: $S\in L^{\infty}(M)$ та існують такі $S_0,S_1>0$, що $0<S_0\le S(x)\le S_1$. Припустімо також, що β — багатозначне відображення в $\mathbf{R}^2$, для якого існують такі m, $M\in\mathbf{R}$, що для всіх $s\in\mathbf{R}$ і $z\in\beta(s)$.

$$m \le z \le M.$$

Зауважимо, що випадок крайової задачі Неймана в обмеженій ділянці простору $\mathbf{R}$ (на інтервалі $(-1,1)$) досліджувався у працях [7, 8]. Включення (1), задане на рімановому багатовиді без краю (M,g), є більш природним з огляду на практичні застосування [9, 10].

ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ РІМАНОВИХ БАГАТОВИДІВ

Наведемо деякі відомі факти з теорії ріманових багатовидів без краю [11], що будуть використані для отримання основних результатів.

Нехай M_n — локально компактний та локально зв'язний багатовид розмірності n. Нехай Ω — відкрита множина; φ — гомеоморфізм Ω на відкриту множину з $\mathbf{R}^n$.

Означення. Дотичним вектором на $P \in M_n$ називається відображення $X : f \to X(f) \in \mathbf{R}$, визначене на множині диференційовних функцій в околі P, де X задовольняє такі умови:

- якщо λ, $\mu \in \mathbf{R}$, то $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$;
- $X(f) = 0$, якщо f є флет-функцією, тобто $d(f \circ \varphi^{-1})$ є нулем у $\varphi(P)$;
- $X(fg) = f(P)X(g) + g(P)X(f)$.

Означення. Дотичним простором $T_p(M)$ у $P \in M_n$ називається множина дотичних векторів на P. Дотичний простір $T(M)$ — це $\bigcup_{P\in M} T_p(M)$.

Означення. C^∞ рімановим багатовидом називається пара (M_n, g), де M_n — C^∞ диференційовний багатовид; g — C^∞ ріманова метрика. Ріманова метрика — таке двічі коваріантне тензорне поле g (тобто перетин $T^*(M) \otimes T^*(M)$, де $T^*(M) = \bigcup\limits_{P\in M} T_P^*(M)$, $T_P^*(M)$ — дуальний простір до $T_P(M)$), що в кожній точці $P \in M$ g_P — додатно визначена білінійна симетрична форма: $g_P(X,Y) = g_P(Y,X)$, $g_P(X,X) > 0$, якщо $X \ne 0$. Рімановий багатовид M_n — зв'язний C^∞ рімановий багатовид розмірності n.

Означення. Нехай (M_n, g) — гладкий рімановий багатовид розмірності n (гладкий в сенсі C^∞). Для дійсної функції φ, що належить $C^k(M_n)$, $k \ge 0$ ціле, визначимо: $|\nabla^k \varphi|^2 = \nabla^{\alpha_1} \nabla^{\alpha_1} \cdots \nabla^{\alpha_k} \varphi \nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha_2} \cdots \nabla_{\alpha_k} \varphi.$ Зокрема $|\nabla^0 \varphi| = |\varphi|$, $|\nabla^1 \varphi|^2$. $\nabla^k \varphi$ $= |\nabla \varphi|^2 = \nabla^\nu \varphi \nabla_\nu \varphi$ позначає будь-яку k-ту коваріантну похідну φ.

Розглянемо такий векторний простір $\mathbf{E}_k^p$ C^∞ функцій φ, що $|\nabla^l \varphi| \in L_p(M_n)$ для всіх l, $0 \le l \le k$, де k і l — цілі; $p \ge 1$ — дійсне.

Простір Соболєва $H_k^p(M_n)$ є доповненням до $\mathbf{E}_k^p$ відповідно до норми $\|\varphi\|_{H_k^p} = \sum_{l=0}^{k} \|\nabla^l \varphi\|_p$. Простір $\breve{H}_k^p(M_n)$ — замикання $\mathbf{D}(M_n)$ у просторі $H_k^p(M_n)$; $\mathbf{D}(M_n)$ — простір C^∞ функцій з компактним носієм у M_n і $H_0^p = L_p$.

Теорема Кондракова. Нехай $k \geq 0$ — ціле, а α, p і q — дійсні числа. Тоді для компактних ріманових багатовидів M_n та компактних ріманових багатовидів $\overline{W}_n$ з C^1-границею компактними є такі вкладення:

- $H_k^q(M_n) \subset L_p(M_n)$ і $H_k^q(W_n) \subset L_p(W_n)$, якщо $1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0$;
- $H_k^q(M_n) \subset C^\alpha(M_n)$ і $H_k^q(W_n) \subset C^\alpha(\overline{W}_n)$, якщо $k - \alpha > n/q$, $0 \leq \alpha < 1$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У процесі дослідження розглядатимемо такі дійсні гільбертові простори

$$H := L^2(M), \quad V := \{u \in L^2(M): \nabla_M u \in L^2(TM)\}$$

з відповідними нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_V$ та скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_H$, $(\cdot,\cdot)_V$, де TM — дотичне розшарування. Функціональні простори $L^2(M)$ і $L^2(TM)$ визначені стандартно (див., наприклад [11]). Нехай V^* — дуальний простір до функціонального простору V. Зауважимо, що $V \subset H \subset V^*$, причому всі вкладення компактні та щільні (див., наприклад [11, теорема 2.34]).

Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Функція $u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V)$ є *слабким розв'язком* задачі (1) на $[\tau, T]$, якщо існує така вимірна функція $d : M \times (\tau, T) \to \mathbf{R}$, що

$$d(x,t) \in QS(x)\beta(u(x,t)) \text{ для м.в. } (x,t) \in M \times (\tau, T),$$

$$\int_\tau^T \left[\langle -u, \frac{\partial \xi}{\partial t} \rangle - \langle u, \Delta \xi \rangle + \langle R_e(\cdot, t, u), \xi \rangle - \langle d, \xi \rangle \right] dt = 0,$$

для всіх $\xi \in C_0^\infty(M \times (\tau, T))$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спарювання в просторі V.

Нехай $-\infty < \tau < T < +\infty$. Розглянемо більш загальне еволюційне включення:

$$u_t - \Delta u + \partial f_1(x,u) - \partial f_2(x,u) \ni \overline{0} \text{ в } M \times (\tau, T). \tag{1}$$

Припустімо виконання таких умов.

Припущення росту. Існуть такі $c_0 \in L^1(M)$, $c_0(x) \geq 0$ для м. в. $x \in M$ та $c_1 \geq 0$, що $|u_i^*|^2 \leq c_0(x) + c_1 |u|^2$ для м. в. $x \in M$, для всіх $u \in \mathbf{R}$ і $u_i^* \in \partial f_i(x,u)$, $i = 1,2$.

Припущення знака. Існує таке $\lambda < \lambda_1$, де λ_1 — перше власне значення оператора $-\Delta$ в $H_0^1(M)$, і існує таке $c_2 \in L^1(M)$, $c_2(x) \geq 0$ для м. в. $x \in M$, що $(u_1^* - u_2^*)u \ge -\lambda u^2 - c_2(x)$ для м.в. $x \in M$, для всіх $u \in \mathbf{R}$ і $u_i^* \in \partial f_i(x,u)$, $i = 1{,}2$.

Аналогічно визначається слабкий розв'язок $u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V)$ задачі (1) на $[\tau, T]$.

Зауваження 1. За виконання поставлених вище припущень для кожного слабкого розв'язку $u(\cdot)$ задачі (1) на проміжку $[\tau, T]$ існують такі вимірні функції $d_1, d_2 : M \times (\tau, T) \to \mathbf{R}$, що $d_i(x,t) \in \partial f_i(x, u(x,t))$ для м.в. $(x,t) \in M \times (\tau, T)$, $i = 1{,}2$, та $d(x,t) = d_1(x,t) - d_2(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in$ $\in M \times (\tau, T)$ [9, 12].

Зауваження 2. Існування принаймні одного слабкого розв'язку задачі Коші для включення (1) з довільними початковими умовами з простору H за виконання поставлених припущень доведено в праці [13, розділ 2]. Зазначимо також, що кожен слабкий розв'язок задачі (1) на $[\tau, T]$ є *регулярним*, тобто для слабкого розв'язку $u(\cdot)$ задачі (1) на $[\tau, T]$) справедливо, що

$$u(\cdot) \in C([\tau + \varepsilon, T]; V) \cap L^2(\tau + \varepsilon, T; H^2(M) \cap V),\ u_t(\cdot) \in L^2(\tau + \varepsilon, T; H),$$

для кожного $\varepsilon \in (0, T - \tau)$ [14, теорема 1]. Крім того, завдяки автономності задачі кожен слабкий розв'язок можна продовжити до глобального, визначеного на $[0, +\infty)$ [13, с. 62].

Перейдемо до питань існування функції Ляпунова і глобального та траєкторного атракторів. Зауважимо, що ці питання досліджувались у працях [14–23]. Розглянемо сім'ю всіх слабких розв'язків задачі (1), визначених на $[0, +\infty)$, яку позначимо через K_+. Зазначимо, що внаслідок автономності задачі простір K_+ — *трансляційно інваріантний*, тобто $u(\cdot + h) \in K_+$ для всіх $u(\cdot) \in K_+$ та $h \ge 0$. Розглянемо задачу (1) на всій числовій осі. Нехай $u \in L^\infty(\mathbf{R}; H)$ — *повна траєкторія* задачі (1), тобто $\mathbf{\Pi}_+ u_h(\cdot) \in K_+$ для всіх $h \in \mathbf{R}$, де $\mathbf{\Pi}_+$ — оператор звуження на інтервал $[0, +\infty)$; $u_h(s) = u(s + h), s \ge 0$. Позначимо через K сім'ю всіх повних траєкторій задачі (1). Згідно із зауваженням 2 та теоремою 2 для кожної повної траєкторії $u(\cdot)$ задачі (1) виконується

$$\mathbf{\Pi}_{\tau,T} u(\cdot) \in C_{loc}([\tau, T]; V) \cap L^2(\tau, T; H^2(M) \cap V),\ \mathbf{\Pi}_{\tau,T} u_t(\cdot) \in L^2(\tau, T; H)$$

для всіх $-\infty < \tau < T < +\infty$, де $\mathbf{\Pi}_{\tau,T}$ — оператор звуження на інтервал $[\tau, T]$ (див. [24, с. 18]). Більш того, існує таке $\widetilde{C} > 0$, що для кожного $u(\cdot) \in K$ виконується оцінка

$$\|u(t)\|_V^2 \le \widetilde{C}(1 + \|u(t-1)\|_H^2) \text{ для всіх } t \in \mathbf{R}.$$

Таким чином, кожна обмежена в H повна траєкторія є обмеженою у V.

Повна траєкторія $u(\cdot) \in K$ є стаціонарною, якщо існує такий елемент $z \in H^2(M) \cap V$, що $u(t) = z$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Кожний такий елемент z

називається точкою спокою. Позначимо множину всіх точок спокою через Z.

Нагадаємо [13], що $E: V \to \mathbf{R}$ — функція Ляпунова для K_+, якщо:

а) E неперервна на V;

б) $E(u(t)) \le E(u(s))$ при $u \in K_+$ і $t \ge s > 0$;

в) якщо $E(u(\cdot)) \equiv \mathrm{const}$ для деякого $u \in K$, то u — стаціонарна.

Покладемо:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_M |\nabla u(x)|^2\, dx + J_1(u) - J_2(u), \quad u \in V, \tag{2}$$

де $J_i(u) = \int_M f_i(x, u(x))dx$, $u \in H$, $i = 1,2$.

Із припущення росту випливає, що існують такі $c_3 \in L^1(M)$, $c_3(x) \ge 0$ для м. в. $x \in M$ та $c_4 \ge 0$, що $|f_i(x,u)| \le c_3(x) + c_4|u|^2$ для м. в. $x \in M$ і для всіх $u \in \mathbf{R}$, $i = 1,2$. Таким, чином, $J_i(u) = \int_M f_i(x, u(x))dx$, $u \in H$, $i = 1,2$ визначені коректно.

Теорема 1. За виконання припущень знака та росту відображення $E: V \to \mathbf{R}$ визначене співвідношенням (2) є функцією типу Ляпунова для K_+. Більш того, для кожного $u \in K_+$, для всіх τ і T, $0 < \tau < T < \infty$, справджується енергетична рівність

$$E(u(T)) - E(u(\tau)) = -\int_\tau^T \|u_t(s)\|_H^2\, ds. \tag{3}$$

Доведення. Функція E неперервна в V, отже умова а) з означення функції Ляпунова виконується.

Доведемо умову б) з означення функції Ляпунова. Зафіксуємо довільну функцію $u(\cdot) \in K_+$. Для спрощення запису позначатимемо звуження $u(\cdot)$ на $[\tau, T]$ знову через $u(\cdot)$. Зауважимо, що $u(\cdot) \in C([\tau, T]; V) \cap$ $\cap L^2(\tau, T; H^2(M) \cap V)$ і $u_t(\cdot) \in L^2(\tau, T; H)$ (оскільки $\tau > 0$). Тоді відображення $t \mapsto \|u(t)\|_V^2 = \int_M |\nabla u(x,t)|^2\, dx$ абсолютно неперервне на $[\tau, T]$ і для м. в. $t \in (\tau, T)$ виконується рівність [25, розділ IV]:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_V^2 = -2\int_M \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Delta u(x,t) dx. \tag{4}$$

Нехай $d: M \times (\tau, T) \to \mathbf{R}$ — функція зі співвідношень (2) і (3), а $g_1, g_2 \in L^2(\tau, T; H)$ — із зауваження 1.

Із праці [26, лема 2.1] випливає, що $J_i(u(\cdot))$ — абсолютно неперервні на $[\tau, T]$ і для м. в. $t \in (\tau, T)$ справедлива рівність

$$\frac{d}{dt} J_i(u(t)) = \int_M h_i(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx, \tag{5}$$

для всіх $h_i(\cdot, t) \in \partial J_i(s)|_{s=u(t)}$, $i = 1,2$.

Отже, функція $E(u(\cdot))$ — абсолютно неперервна на $[\tau, T]$ як лінійна комбінація абсолютно неперервних на $[\tau, T]$ функцій. Згідно з рівностями (4) і (5),

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\|u_t(t)\|_H^2$$

для м. в. $t \in (\tau, T)$. Звідси отримуємо рівність (5). Зокрема, $E(u(t)) \le E(u(s))$ за умови $T \ge t \ge s \ge \tau > 0$. Оскільки $u(\cdot) \in K_+$ і $0 < \tau < T < \infty$ — довільні, то пункт б) з означення функції Ляпунова та енергетична рівність (3) виконуються. Для завершення доведення зауважимо, що якщо $E(u(\cdot)) \equiv \mathrm{const}$ для деякого $u \in K$, то згідно з рівністю (3) u — стаціонарна. Теорему доведено.

У працях [13, с. 56 і 14, с. 274] показано, що для всіх $\tau < T$ та для кожного слабкого розв'язку $u(\cdot)$ задачі (1) на $[\tau, T]$ справджується нерівність

$$\|u(t)\|_H^2 \le \|u(s)\|_H^2 e^{-2\varepsilon^*(t-s)} + \frac{a}{\varepsilon^*} \quad \forall \tau \le s \le t \le T, \tag{6}$$

де $\varepsilon^* = \lambda_1 - \lambda$ та $a = \int_M c_2(x)dx$.

Визначимо на $V \cap H^2(M)$ еквівалентну норму $v \to \|\Delta v\|_H$ [27, розділ III]. Перед доведенням результатів збіжності для всіх слабких розв'язків у найсильніших топологіях необхідні деякі додаткові оцінки для слабких розв'язків (1).

Теорема 2. Нехай виконуються умови росту і знака. Тоді існує таке $C > 0$, що для будь-якого $\tau < T$ і для кожного слабкого розв'язку $u(\cdot)$ задачі (1) на $[\tau, T]$

$$(t-\tau)\|u(t)\|_V^2 + \int_\tau^t (s-\tau)\|u(s)\|_{H^2(M)\cap V}^2 ds \le C(1 + \|u(\tau)\|_H^2 + (t-\tau)^2) \quad \forall t \in (\tau, T].$$

Доведення. Доведення теореми 2 подібне до доведення теореми 2 у праці [14] (див. також [8, 7]), проте за інших припущень щодо функції взаємодії. Зауважимо, що доведення цього твердження наведено в праці [9].

Для будь-якого $u_\tau \in H$ покладемо

$$D_{\tau,T}(u_\tau) = \{u(\cdot) \in L^2(\tau, T; V) \mid u(\cdot) \text{ — слабкий розв'язок задачі (1) і } u(\tau) = u_\tau\}.$$

Сформулюємо основні результати щодо збіжності всіх слабких розв'язків задачі (1) в найсильніших топологіях.

Теорема 3. Нехай виконуються умови росту і знака, $\tau < T$, $u_{\tau,n} \to u_\tau$ слабко в H, $u_n(\cdot) \in D_{\tau,T}(u_{\tau,n})$, $n \ge 1$. Тоді існує послідовність $\{n_k\}_{k\ge1}$ і $u(\cdot) \in D_{\tau,T}(u_\tau)$ такі, що

$$\sup_{t\in[\tau+\varepsilon,T]} \left\|u_{n_k}(t) - u(t)\right\|_V \to 0, \tag{7}$$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^T \left\|u_{n_k,t}(t) - u_t(t)\right\|_H^2 dt \to 0, \tag{8}$$

якщо $k \to +\infty$, для всіх $\varepsilon \in (0, T-\tau)$.

Доведення. Із теореми 2 [14, теорема 3], теореми Банаха–Алаоглу діагональним методом Кантора отримуємо, що існує підпослідовність

$\{n_k\}_{k\geq 1}$ і $u(\cdot)\in D_{\tau,T}(u_\tau)$ такі, що виконуються: а) звуження $u_{n_k}(\cdot)$ та $u(\cdot)$ на $[\tau+\varepsilon,T]$ належать $C([\tau+\varepsilon,T];V)\cap L^2(\tau+\varepsilon,T;H^2(M)\cap V)$ та $u_{n_k,t}(\cdot),u_t(\cdot)\in$ $\in L^2(\tau+\varepsilon,T;H)$ і

$$u_{n_k}(\cdot)\to u(\cdot) \text{ слабко в } L^2(\tau+\varepsilon,T;H^2(M)\cap V),$$

$$u_{n_k}(\cdot)\to u(\cdot) \text{ слабко в } C([\tau+\varepsilon,T];V),$$

$$u_{n_k,t}(\cdot)\to u_t(\cdot) \text{ слабко в } L^2(\tau+\varepsilon,T;H), \tag{9}$$

якщо $k\to\infty$, для кожного $\varepsilon\in(0,T-\tau)$, звідки випливає твердження (7). Доведемо нерівність (6). Із теореми 1 випливають енергетичні нерівності:

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T}\|u_t(t)\|_H^2\,dt=E(u(\tau+\varepsilon))-E(u(T)), \tag{10}$$

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T}\left\|u_{n_k,t}(t)\right\|_H^2 dt=E(u_{n_k}(\tau+\varepsilon))-E(u_{n_k}(T)), \tag{11}$$

$k\geq 1$, $\varepsilon\in(0,T-\tau)$. Із неперервності E на V і співвідношення (7) випливає

$$E(u_{n_k}(\tau+\varepsilon))-E(u_{n_k}(T))\to E(u(\tau+\varepsilon))-E(u(T)),\, m\to\infty. \tag{12}$$

Отже, із формул (10)–(12) маємо

$$\int_{\tau+\varepsilon}^{T}\left\|u_{n_k,t}(t)\right\|_H^2 dt\to\int_{\tau+\varepsilon}^{T}\|u_t(t)\|_H^2\,dt, \tag{13}$$

якщо $k\to\infty$, для кожного $\varepsilon\in(0,T-\tau)$. Оскільки $L^2(\tau+\varepsilon;T)$ — гільбертів простір, то зі співвідношень (9) і (13) випливає (8).

Визначимо дійсний банахів простір W і норму в ньому:

$$W(M_1,M_2)=\{u(\cdot)\in C([M_1,M_2];V): u_t(\cdot)\in L^2(M_1,M_2;H)\}\,;$$

$$\|u(\cdot)\|_{W(M_1,M_2)}=\|u(\cdot)\|_{C([M_1,M_2];V)}+\|u_t(\cdot)\|_{L^2(M_1,M_2;H)},$$

де $u(\cdot)\in W(M_1,M_2)$, $-\infty<M_1<M_2<+\infty$. Зауважимо, що існування функції типу Ляпунова дозволяє отримати результат щодо збіжності в сильній топології простору $W(\tau+\varepsilon,T)$ для всіх слабких розв'язків задачі (1) на $[\tau,T]$, де $-\infty<\tau<T<+\infty$.

Визначимо багатозначне відображення $G:\mathbf{R}_+\times H\to 2^H\setminus\varnothing$ таким чином:

$$G(t,u_0)=\{u(t)\,|\,u(\cdot)\in K_+, u(0)=u_0\}.$$

Теорема 4. Нехай виконуються умови росту і знака. Тоді багатозначне відображення G є строгим багатозначним півпотоком.

Доведення. Доведення повторює міркування, наведене у праці [13, лема 2.7]. Нехай $\{T(h)\}_{h\geq 0}$ — трансляційна півгрупа, що діє на K_+, тобто $T(h)u(\cdot)=u(\cdot+h)$, $h\geq 0$, $u(\cdot)\in K_+$. На K_+ розглянемо топологію, індуковану з простору Фреше $C_{loc}(\mathbf{R}_+;H)$. Зауважимо, що $f_n(\cdot)\to f(\cdot)$

у $C_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+;H)$ тоді і тільки тоді, коли $\forall M>0\ \mathbf{\Pi}_{0,M} f_n(\cdot)\to\mathbf{\Pi}_{0,M} f(\cdot)$ в $C([0,M];H)$.

Наступна теорема містить результати про нові структурні властивості та регулярності глобального і траєкторного атракторів усіх слабких розв'язків задачі (1).

Теорема 5. Нехай виконуються умови росту і знака. Тоді справедливе твердження:

- строгий багатозначний півпотік $G:\mathbf{R}_+\times H\to 2^H\setminus\varnothing$ має інваріантний глобальний атрактор $\mathbf{A}$;
- існує траєкторний атрактор $\mathbf{U}\subset K_+$ у просторі K_+;
- виконуються рівності:

$$\mathbf{U}=\mathbf{\Pi}_+K=\{u(\cdot)\in K_+\mid u(t)\in\mathbf{A}\ \forall t\in\mathbf{R}_+\}=\{u(\cdot)\in K_+\mid u(0)\in\mathbf{A}\};$$

- $\mathbf{A}$ — компактна підмножина V;
- для кожної обмеженої в H множини B виконується $dist_V(G(t,B),\mathbf{A})\to 0$, $t\to\infty$;
- $\mathbf{U}$ — обмежена підмножина $L^\infty(\mathbf{R}_+;V)$ і $\mathbf{\Pi}_{0,M}\mathbf{U}$ — компакт у $W(0,M)$ для кожного $M>0$;
- для будь-якої обмеженої в $L^\infty(\mathbf{R}_+;H)$ множини $B\subset K_+$ і будь-якого $M\ge 0$ виконується

$$dist_{W(0,M)}(\mathbf{\Pi}_{0,M}T(t)B,\mathbf{\Pi}_{0,M}\mathbf{U})\to 0,\ \ t\to+\infty;$$

- K — обмежена підмножина $L^\infty(\mathbf{R};V)$ і $\mathbf{\Pi}_{0,M}\mathbf{U}$ — компакт у $W(0,M)$ для $M>0$;
- для кожного $u\in K$ граничні множини

$$\alpha(u)=\{z\in V\,|\,u(t_j)\to z \text{ у } V \text{ для деякої послідовності } t_j\to-\infty\}$$

$$\omega(u)=\{z\in V\,|\,u(t_j)\to z \text{ у } V \text{ для деякої послідовності } t_j\to-+\infty\}$$

є зв'язними підмножинами Z, на яких E — стала. Якщо Z повністю незв'язна (зокрема, якщо Z — зліченна), границі у V

$$z_-=\lim_{t\to-\infty}u(t),\quad z_+=\lim_{t\to+\infty}u(t)$$

існують і z_-, z_+ — точки спокою; більш того, $u(t)$ прямує у V до точки спокою, якщо $t\to+\infty$, для кожного $u\in K_+$.

Доведення. Доведення є прямим наслідком теорем 1, 2, 3, [7, теорема 3.5]. Крім того, останнє твердження випливає з теореми 1 і [28, теорема 2.7].

Для доведення скінченновимірності з точністю до малого параметра розв'язків задачі потрібні дві допоміжні леми.

Нехай X — банахів простір; $P(X)$ — сім'я непорожніх підмножин X; C — обмежена підмножина X. Міра Куратовського некомпактності $k(C)$ множини C визначається як $k(C)=\inf\{\delta>0: C$ має скінченне відкрите покриття множин діаметром $<\delta\}$. Багатозначний півпотік $G:\mathbf{R}^+\times X\to$

$\to 2^X \setminus \varnothing$ є ω-гранично компактним, якщо для кожної обмеженої множини $C \subset X$ $k(\bigcup_{t\geq\tau} G(t,C)) \to 0$, $\tau \to \infty$.

Лема 1. Якщо багатозначний півпотік G у повному метричному просторі X — асимптотично компактний, то він є ω-гранично компактним [20, лема 2.4].

Лема 2. Нехай G — багатозначний півпотік у рівномірно опуклому банаховому просторі X. Якщо багатозначний півпотік G — ω-гранично компактний, то він задовольняє таку властивість: для кожної обмеженої множини $C \subset X$ та $\varepsilon > 0$ існує момент часу $t_0(C,\varepsilon)$ і скінченновимірний підпростір E в просторі X такий, що для деякого обмеженого проектора $P: X \to E$ множина $P\left(\bigcup_{t\geq t_0} G(t,C)\right)$ обмежена в просторі X і

$$(I-P)\left(\bigcup_{t\geq t_0} G(t,C)\right) \subset C_\varepsilon(\bar{0}),$$

де I — тотожне відображення в просторі X [20, лема 2.6].

Зауважимо, що твердження леми 2 фактично означає скінченновимірність багатозначного півпотоку G з точністю до малого параметра ε. Перейдемо до формулювання основної теореми.

Теорема 6. За виконання поставлених умов на параметри задачі (1) багатозначний півпотік G, породжений розв'язками задачі (1), є скінченновимірним з точністю до довільного заданого параметра ε, тобто для кожної обмеженої множини $C \subset H$ та $\varepsilon > 0$ існують такі $t_0(C,\varepsilon)$, скінченновимірний підпростір E в H та обмежений проектор $P: H \to E$, що множина $P\left(\bigcup_{t\geq t_0} G(t,C)\right)$ обмежена в H та $(I-P)\left(\bigcup_{t\geq t_0} G(t,C)\right) \subset$ $\subset C_\varepsilon(\bar{0})$.

Доведення. Грунтуючись на властивостях слабкої та сильної збіжності слабких розв'язків, асимптотичній компактності багатозначного півпотоку G, беручи до уваги леми 1, 2 та враховуючи сепарабельність гільбертового простору H, отримуємо необхідне твердження.

Наслідок. За виконання основних припущень на параметри задачі (1) твердження теорем 1, 3, 4, 5, 6 справедливі для всіх слабких розв'язків задачі (1).

Отже, для кліматологічної моделі Будико–Селлерса енергетичного балансу, розглянутої на рімановому багатовиді без краю, вирішено поставлені завдання, а саме: установлено існування розв'язку поставленої задачі з довільними початковими даними з фазового простору, вивчено його властивості, регулярність (зауваження 2, теорема 2); знайдено функцію Ляпунова (теорема 1); установлено характер залежності розв'язків від початкових даних (теорема 3); доведено існування глобального (теорема 5) і траєкторного (теорема 5) атракторів, вивчено їх властивості (теорема 5), установлено взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій задачі (теорема 5), досліджено характер притягнення розв'язків до глобального та траєкторного атракторів (теорема 5) і з'ясовано їх структуру (теорема 5), установлено скінченновимірність розв'язків з точністю до малого параметра (теорема 6).

ВИСНОВКИ

У ході дослідження на основі ідей, методів та підходів нелінійного та багатозначного аналізу, теорії нелінійних еволюційних рівнянь та включень, теорії глобальних і траєкторних атракторів багатозначних півпотоків для кліматологічної моделі Будико–Селлерса енергетичного балансу, що містить у собі нелінійне еволюційне включення параболічного типу, розглянутої на рімановому багатовиді без краю, отримано такі результати: установлено існування розв'язку поставленої задачі з довільними початковими даними з фазового простору, вивчено його властивості, регулярність; знайдено функцію Ляпунова; вивчено характер залежності розв'язків від початкових даних; доведено існування глобального та траєкторного атракторів, установлено їх топологічні властивості та взаємозв'язок між ними та простором повних траєкторій задачі, досліджено характер притягнення розв'язків до глобального та траєкторного атракторів і з'ясовано їх структуру; установлено скінченновимірність розв'язків з точністю до малого параметра. Отримані результати будуть корисними і зможуть знайти своє застосування в подальших теоретичних та прикладних дослідженнях проблем клімату.

Результати досліджень частково підтримані грантом Президента України GP/F75/127-2018.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Budyko M.I.* The effects of solar radiation variations on the climate of the Earth / M.I. Budyko // Tellus. — 1969. — **21**. — P. 611–619.
2. *Sellers W.D.* A global climatic model based on the energy balance of the Earth-atmosphere system / W.D. Sellers // J. Appl. Meteorol. — 1969. — **8**. — P. 392–400.
3. *Di′az H.* On a stochastic parabolic PDE arising in climatology / H. Di′az, J.I. Di′az // Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat. — 2002. — Vol. 96. — P. 123–128.
4. *Di′az J.I.* On the multiplicity of equilibrium solutions to a nonlinear diffusion equation on a manifold arising in climatology / J.I. Di′az, J. Herna′ndez, L. Tello // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — **216**. — P. 593–613.
5. *Di′az J.I.* Some results about multiplicity and bifurcation of stationary solutions of a reaction diffusion climatological model / J.I. Di′az, J. Herna′ndez, L. Tello // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. — 2002. — **96**. — P. 357–366.
6. *Gluzman M.O.* Lyapunov type functions for classes of autonomous parabolic feedback control problems and applications / M.O. Gluzman, N.V. Gorban, P.O. Kasyanov // Applied Mathematics Letters. — 2015. — **39**. — P. 19–21.
7. *Gluzman M.O.* Lyapunov functions for weak solutions of reaction-diffusion equations with discontinuous interaction functions and its applications / M.O. Gluzman, N.V. Gorban, P.O. Kasyanov // Nonautonomous Dyn. Syst. — 2015. — doi:10.1515/msds-2015-0001.
8. *Gluzman M.O.* Lyapunov Functions for Differential Inclusions and Applications in Physics, Biology, and Climatology / M.O. Gluzman, N.V. Gorban, P.O. Kasyanov // Continuous and Distributed Systems II. Theory and Applications. — Berlin: Springer, 2015. — P. 233–243.
9. *Gorban N.V.* Long-time behavior of state functions for climate energy balance model / N.V. Gorban, M.O. Gluzman, P.O. Kasyanov et al. // DCDS-B. — 2017. — **22**(5). — P. 1887–1897.
10. *Gorban N.V.* Long-Time Behavior of State Functions for Budyko Models / N.V. Gorban, M.O. Gluzman, P.O. Kasyanov et al. // Advances in Dynamical

Systems and Control. Series studies in systems. Decis. Control. — 2016. — **69**. — P. 351–359.
11. *Aubin T.* Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations / T. Aubin. — Berlin: Springer, 1980. — 204 p.
12. *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis / F.H. Clarke. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1983. — 308 p.
13. *Zgurovsky M.Z.* Evolution inclusions and variation Inequalities for Earth data processing III / M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, O.V. Kapustyan et al. — Berlin: Springer, 2012. — 330 p.
14. *Kasyanov P.O.* Regularity of Weak Solutions and Their Attractors for a Parabolic Feedback Control Problem / P.O. Kasyanov, L. Toscano, N.V. Zadoianchuk // Set-Valued and Variational Analysis. — 2013. — **21**(2). — P. 271–282.
15. *Kasyanov P.O.* Long-time behavior of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional “reaction-displacemen” law / P.O. Kasyanov, L. Toscano, N.V. Zadoianchuk // Abstract and Applied Analysis. — 2012. — DOI: 10.1155/2012/450984.
16. *Zgurovsky M.Z.* Long-time behavior of solutions for quasilinear hyperbolic hemivariational inequalities with application to piezoelectricity problem / M.Z. Zgurovsky, P.O. Kasyanov, N.V. Zadoianchuk // Applied Mathematics Letters. — 2012. — **25**(10). — P. 1569–1574.
17. *Zadoianchuk N.V.* Dynamics of solutions of a class of second-order autonomous evolution inclusions / N.V. Zadoianchuk, P.O. Kasyanov // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — **48**(3). — P. 414–420.
18. *Arrieta J.M.* Dynamics of a reaction–diffusion equation with a discontinuous nonlinearity / J.M. Arrieta, A. Rodríguez-Bernal, J. Valero // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2006. — **16**. — P. 2695–2984.
19. *Valero J.* Attractors of Parabolic Equations Without Uniqueness / J. Valero // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2001. — **13**(4). — P. 711–744.
20. *Kalita P.* Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties / P. Kalita, G. Łukaszewicz // Nonlinear Analysis. — 2014. — **101**. — P. 124–143.
21. *Kalita P.* Attractors for Navier–Stokes flows with multivalued and nonmonotone subdifferential boundary conditions / P. Kalita, G. Łukaszewicz // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2014. — **19**. — P. 75–88.
22. *Gorban N.V.* On Global Attractors for Autonomous Damped Wave Equation with Discontinuous Nonlinearity / N.V. Gorban, O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov et al. // Continuous and Distributed Systems. Theory and Applications. — Berlin: Springer, 2014. — P. 221–237.
23. *Kapustyan O.V.* Pullback attractors for a class of extremal solutions of the 3D Navier-Stokes equations / O.V. Kapustyan, P.O. Kasyanov, J. Valero // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2011. — **373**. — P. 537–545.
24. *Chepyzhov V.V.* Trajectory and global attractors for 3D Navier-Stokes system / V.V. Chepyzhov, M.I. Vishik // Mathematical Notes. — 2002. — **71**. — P. 177–193.
25. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас; пер. В.Г. Задорожний, А.И. Перов; ред. В.И. Соболев. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
26. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces / V. Barbu. — Leyden: Noordhoff, 1974. — 351 p.
27. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam. — N.Y.: Springer, 1988. — 500 p.
28. *Ball J.M.* Global attractors for damped semilinear wave equations / J.M. Ball // Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2004. — **10**. — P. 31–52.

Надійшла 19.11.2018