УДК 51-74/ 519-85
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.4.02

ПОСТРОЕНИЕ ДВУХСТАДИЙНЫХ РАСПИСАНИЙ ОБРАБОТКИ ИЗДЕЛИЙ НА ОДНОЙ МАШИНЕ

Ю.А. ЗАК

Аннотация. Рассмотрены различные постановки, математические модели и свойства задач построения двухстадийных расписаний выполнения работ на одной машине. Критерии оптимальности — выполнение расписаний в кратчайшие сроки и минимизация суммарных потерь, связанных со временем завершения выполнения заданий. Предложены эффективные приближенные методы решения задач, которые проиллюстрированы на числовых примерах.

Ключевые слова: двухстадийные расписания на одной машине, время выполнения, постобработка заданий и переналадка машин, начальное и конечное время выполнения заданий, оптимальные последовательности.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка задачи

Технологический процесс предусматривает изготовление изделий на двух последовательных стадиях обработки. На каждой из этих стадий все изделия обрабатываются в одной и той же последовательности. Рассматриваются три постановки задачи построения расписаний, целью которых является определение оптимальной последовательности, времени начала и времени завершения обработки n изделий.

Задача 1. На каждой стадии производится обработка изделий на одной машине. После изготовления на машине на каждой стадии обработки выполняется постобработка каждого изделия, предусматривающая контроль, испытание, необходимое время пролеживания (например, с охлаждением или нагреванием), оформление необходимой документации, транспортные потери времени, что наряду с необходимым временем на изготовление также требует затрат времени. Изготовление изделий на каждой из двух стадий ведется без прерываний. После изготовления изделия на первой стадии и постобработки изделие поступает на вторую стадию обработки. На каждой стадии обработки может начаться изготовление следующего в последовательности изделия непосредственно после завершения изготовления предыдущего изделия. На двух стадиях обработки изготовление изделий производится в одной и той же последовательности. Необходимо найти последовательность изготовления изделий, минимизирующую время выполнения расписания выполнения всех работ.

Задача 2. В условиях обработки изделий, аналогичных описанным в задаче 1, предусматривается другой вид критерия оптимальности построенного расписания. От времени завершения на второй стадии обработки каждого изделия (после этапа постобработки) T_i зависят некоторые стоимостные потери, которые заданы линейной функцией потерь $f_i = a_i + c_i T_i$, $i = 1,...,n$, где a_i — некоторая постоянная величина потерь при $T_i > 0$. Необходимо построить расписание выполнения всех работ на двух стадиях обработки, минимизирующее суммарные стоимостные потери, связанные с временем завершения обработки всех изделий, $F = \sum_{i=1}^{n}(a_i + c_i T_i)$. Далее будет показано, что значения a_i не влияют на построение оптимальной последовательности выполнения работ, а только позволяют вычислить фактическое значение критерия оптимальности, как в оптимальном, так и в других решениях.

Задача 3. Известно время обработки всех изделий, а также время переналадок машин при переходе от обработки одного из изделий к другому на машинах на каждой из двух стадий обработки. На каждой из этих стадий все изделия обрабатываются в одной и той же последовательности. После завершения обработки некоторого изделия на первой стадии, если машина второй стадии обработки завершила обработку предыдущего, т.е. стоящего перед ним в последовательности изделия, и завершения соответствующего времени переналадки она может начинать обработку этого изделия. Начало обработки следующего изделия на первой стадии также должно включать время переналадки этой машины. Необходимо найти последовательность, т.е. расписание выполнения работ, обеспечивающее завершение изготовления всех изделий на второй стадии в кратчайшие сроки.

Состояние разработок

Задачам построения расписаний выполнения работ на одной машине без учета ограничений на время завершения и частичные последовательности уделялось значительное внимание в монографиях и периодической литературе (см., например, [1–4, 6–15]). Наибольший интерес представляет учет времени переналадок машины при переходе от выполнения одного задания к другому, а также времени, необходимого на постобработку после завершения изготовления изделий на машине. Наиболее частыми критериями оптимальности являются требования выполнения всего комплекса работ в кратчайшие сроки и минимизация суммы штрафов за превышение директивных сроков завершения выполнения работ. Для линейных функций потерь в работах [2, 4, 6] получено оптимальное решение задачи минимизации суммы штрафов, если последовательность выполнения работ упорядочена по убыванию величин $\frac{c_i}{T_i}$. В случае учета переналадок и потерь времени на постобработку задачи минимизации времени выполнения расписания относятся к классу NP-сложных проблем. Эффективные алгоритмы точного решения задачи, учитывающей потери времени на постобработку с помощью Schrage-algorithms и его модификации, впервые были предложены в работе J. Carlier (1982) [10], а в условиях различного вида ограничений — в работах [6–8] и [13–15]. В случае учета потерь времени на переналадки машины, даже при наличии ограничений на сроки выполнения работ, используются алгоритмы, основанные на методах ветвей и границ и динамического программирования [2–4, 6–12]. Эти алгоритмы наиболее часто применяются в настоящее время для получения точных решений практических задач большой размерности в условиях отсутствия дополнительных ограничений. Задачам построения двухстадийных расписаний выполнения работ на одной машине, которые имеют большое практическое значение и ярко выраженную специфику, не уделялось достаточного внимания в литературе. Эффективные методы решения этого класса задач найдут широкое применение в построении календарных планов работы производственных комплексов и в маршрутизации перевозок. Практически важные постановки и пути решения задач построения многостадийных расписаний рассматривались в работе [5].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ

Введем следующие обозначения:

x_i^1 и x_i^2 — соответственно время начала обработки i-го изделия на первой и второй стадиях обработки;

t_i^1 и t_i^2 — соответственно время обработки i-го изделия на машине на первой и второй стадиях обработки;

r_i^1 и r_i^2 — соответственно время постобработки i-го изделия на первой и второй стадиях обработки (необходимое время пролеживания, контроль, испытания, транспортировка и т.п) ;

a_{ij}^1 и a_{ij}^2 — соответственно потери времени на переналадки оборудования на первой и второй стадиях обработки при переходе машины от обработки i-го изделия к j-му, $i, j = 1,...,n$;

θ_i^1 и θ_i^2 — соответственно время завершения обработки i-го изделия на машине на первой и второй стадиях обработки;

$T_i^k = \theta_i^k + r_i^k$, $k = 1,2$, — соответственно время завершения изготовления i-го изделия на первой и второй стадиях обработки;

$\overline{T}^1$, $\overline{T}^2$ — соответственно время выполнения всех работ на первой и второй стадиях обработки;

$\overline{T}$ — время завершения выполнения всех работ двухстадийного расписания.

Тогда для задач 1 и 2 справедливы следующие соотношения:

$$\theta_i^k = x_i^k + t_i^k,\ T_i^k = \theta_i^k + r_i^k,\ \overline{T}^k = \max_{1 \le i \le n} T_i^k,\ k = 1,2;$$

$$x_i^2 = \theta_i^1 + 1;\ \overline{T} = \overline{T}^2 = \max_{1 \le i \le n} T_i^2. \qquad (1)$$

Пусть построена некоторая последовательность обработки изделий, одинаковая для двух стадий обработки $\widetilde{I}=\{i_1,i_2,...,i_{l-1},i_l,...,i_n\}$:

$$x_{i_1}^1=1,\ \theta_{i_1}^1=1+t_{i_1}^1,\ x_{i_2}^1=\theta_{i_1}^1+1;\ x_{i_1}^2=\theta_{i_1}^1+r_{i_1}^1+1;$$

$$\theta_{i_1}^2=x_{i_1}^2+t_{i_1}^2,\ T_{i_1}=\theta_{i_1}^2+r_{i_1}^2;$$

$$x_{i_l}^1=\theta_{i_{l-1}}^1+1,\ \theta_{i_l}^1=x_{i_l}^1+t_{i_l}^1;$$

$$x_{i_l}^2=\max(\theta_{i_l}^1+r_{i_l}^1,\theta_{i_{l-1}}^2)+1,\ \theta_{i_l}^2=x_{i_l}^2+t_{i_l}^2,\ T_{i_l}=\theta_{i_l}^2+r_{i_l}^2,\ l=2,...,n.$$

Критерии оптимальности задач 1 и 2 имеют соответственно вид:

$$T=\min\max_{1\le i\le n}T_i; \tag{2}$$

$$F=\min\sum_{i=1}^{n}c_iT_i.$$

В принятых обозначениях для задачи 3 справедливы соотношения:

$$x_{i_1}^1=1,\ \theta_{i_1}^1=1+t_{i_1}^1,\ x_{i_2}^1=\theta_{i_1}^1+a_{i_1,i_2}^1+1;\ x_{i_1}^2=\theta_{i_1}^1+1,\ T_{i_1}=\theta_{i_1}^2=x_{i_1}^2+t_{i_1}^2;$$

$$x_{i_l}^1=\theta_{i_{l-1}}^1+a_{i_{l-1,l}}^1+1,\ \theta_{i_l}^1=x_{i_l}^1+t_{i_l}^1,\ x_{i_{l+1}}^1=\theta_{i_{l-1}}^1+a_{i_{l,l+1}}^1+1;$$

$$x_{i_l}^2=\max[(\theta_{i_l}^1+1),(\theta_{i_{l-1}}^2+a_{i_{l-1,l}}^2+1)];$$

$$T_{i_l}=\theta_{i_l}^2=x_{i_l}^2+t_{i_l}^2,\ l=2,...,n.$$

Критерий оптимальности задачи 3 — выражение (2).

Построению этого вида расписаний на одной машине посвящены многие публикации в монографиях и периодической литературе (см., например, [1–3]), где предложены эффективные методы построения точных и приближенных решений даже в условиях наличия ограничений на сроки завершения выполнения отдельных работ. Нижняя граница времени выполнения расписания на одной машине может быть вычислена, если все работы расположить в последовательности возрастания сроков завершения выполнения работ

$$T_i^k=\theta_i^k+t_i^k+r_i^k,\ \widetilde{J}^k=\{i=1,...,n\,|\,T_{i_1}^k\le T_{i_2}^k\le...\le T_{i_l}^k\le...\le T_{i_n}^k\},\ k=1,2,$$

допустить прерывание выполнения работ и в каждый момент времени τ^k осуществлять еще невыполненную k-ю работу из последовательности $\widetilde{J}^k$, для которой выполняются условия $\tau^k\le\theta^k$. Автору не известны публикации о задачах построения двухстадийных расписаний в описанной выше постановке.

Для получения достаточно грубой нижней границы рассматриваемого выше двухстадийного расписания выполнения работ можно воспользоваться следующим алгоритмом вычислений.

1. Построим последовательности $\widetilde{J}^1$ и $\widetilde{J}^2$ на каждой стадии обработки.

2. Выберем на первой стадии изделие с индексом i_1 — первое в последовательности $\tilde{J}^1$ с временем завершения изготовления его на этой стадии $T^1_{i_1}$. Определим время завершения последнего изделия в этой последовательности $\tilde{J}^1$, которое обозначим через $T^1_{i_n}$.

3. Корректируем допустимое время начала обработки изделий на второй стадии изготовления: $\overline{\theta}^2_i = \max(\theta^2_i, T^1_{j_1} + 1)$, $i = 1,...,n$.

4. После построения последовательности $\tilde{J}^2$ на второй стадии обработки в новых условиях вычислим нижнюю границу по тому же алгоритму, что и в описанном выше случае построения расписания работ на одной машине. Время выполнения этого расписания обозначим через $\overline{T}^1$.

5. Определим минимальные затраты времени на изготовление и постобработку на второй стадии обработки $d^2 = \min\limits_{1 \le i \le n}(t^2_i + r^2_i)$ и вычислим значение $\overline{T}^2 = T^1_{i_n} + 1 + d^2$.

6. Нижней границей двухстадийного расписания может быть значение $\xi(\overline{T}) = \max(\overline{T}^1, \overline{T}^2)$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Обозначим:

$\tilde{I} = \{i = 1,...,n\}$ — множество всех изделий, подлежащих обработке;

$\tilde{I}^1$, $\tilde{I}^2$ — соответственно подмножество изделий, для которых уже в процессе выполнения алгоритма определено и не определено место в последовательности обработки;

$$\tilde{I}^1 \bigcup \tilde{I}^2 = \tilde{I}, \ \tilde{I}^1 \bigcap \tilde{I}^2 = \varnothing;$$

$s = 1,...,S = n$ — последовательные этапы выбора изделий, включаемых в обработку, т.е. члены последовательности.

В начале процесса положим $\tilde{I}^1 = \tilde{I}^1_s = \varnothing$, $\tilde{I}^2 = \tilde{I}^2_s = \tilde{I} = \{i = 1,...,n\}$.

Алгоритм предусматривает выполнение следующих шагов.

Шаг 1. На s-м этапе выбора для подмножества изделий $\tilde{I}^2_s$ выполняем вычисления параметров θ^1_i и T^1_i, $i \in \tilde{I}^2_s$, в соответствии с выражением (1).

Определяем:

$$x^2_i = \max(\theta^1_i + 1, x^2_i), \ \theta^2_i = x^2_i + t^2_i, \ T^2_i = \theta^2_i + r^2_i, \ i \in \tilde{I}^2_s,$$

$$\theta^2_{j_s} = \min_{i \in \tilde{I}^2_s} \theta^2_i. \tag{3}$$

Если существует некоторое подмножество изделий $\tilde{J}^2_s$, удовлетворяющее соотношению (3), т.е. $\tilde{J}^2_s = \{l_s \mid l_s \in \tilde{I}^2_s, \ \theta^2_{l_s} = \theta^2_{j_s}\}$, то среди них выбираем изделие с индексом $p_s \in \tilde{J}^2_s$, для которого справедливо соотношение $\theta^2_{p_s} = \min\limits_{i \in \tilde{J}^2_s} T^2_i$. Если и таких изделий существует целое подмножество

$\widetilde{\Gamma}_s^2 = \{p_s \mid p_s \in \widetilde{J}_s^2, T_{p_s}^2 = \min\limits_{l_s \in \widetilde{J}_s^2} T_{j_s}^2\}$, то из них выбираем изделие с индексом $p_s \in \widetilde{\Gamma}_s^2$, удовлетворяющее соотношению $\theta_{\delta_s}^2 = \min\limits_{i \in \widetilde{K}_s^2} \theta_i^1$. Если существует некоторое подмножество $\delta_s \in \widetilde{K}_s^2$ таких изделий, то среди них выбираем изделие с наименьшим индексом $\bar{j}_s = \{i \mid \bar{j}_s = \min\limits_{i \in \widetilde{K}_s^2}\}$. Обозначим индекс изделия, выбранного на 1-м шаге, как $\bar{j}_s$. Выбираем и включаем это изделие в качестве s-го члена последовательности и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Определяем $s =: (s+1)$, $\widetilde{I}_{s+1}^1 = \widetilde{I}_s^1 \bigcup \bar{j}_s$, $\widetilde{I}_{s+1}^2 = \widetilde{I}_s^2 / \bar{j}_s$. Если $\widetilde{I}_{s+1}^2 \neq \varnothing$ и $\widetilde{I}_{s+1}^1 \neq \widetilde{I}$, переходим к шагу 3, в противном случае — к шагу 4.

Шаг 3. Выполняем вычисления:

$$x_i^1 = \max(\theta_{\bar{j}_s}^1 + 1, x_i^1), \quad x_i^2 = \max(\theta_{\bar{j}_s}^2 + 1, x_i^2);$$

$$T_i^k = \theta_i^k + r_i^k, \ k = 1,2, \ i \in \widetilde{I}_s^2.$$

Переходим к шагу 1.

Шаг 4. Определяем последовательность обработки изделий $\widetilde{\Psi} = \{\bar{j}_s \in \widetilde{I} \mid s = 1,2,...,S = n\}$ и время завершения расписания выполнения всего комплекса работ

$$\overline{T} = \max_{1 \leq s \leq S} T_s^2.$$

Алгоритм завершает свою работу.

Работу алгоритма проиллюстрируем на числовом примере.

Иллюстративный пример 1

Параметры изготовления шести изделий на двух стадиях обработки приведены в табл.1.

Таблица 1. Параметры изготовления шести изделий на двух стадиях обработки

Показатели	**Показатели первого этапа обработки различных изделий**						**Показатели второго этапа обработки различных изделий**					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
x_i	1	4	2	7	10	8	14	6	9	12	15	10
t_i	6	5	3	7	2	4	8	7	5	4	8	6
r_i	2	3	4	1	5	8	1	5	3	1	2	3

Шаг 1. ($s = 1$). Расчет наиболее раннего времени завершения изготовления различных изделий приведен в табл. 2.

Поскольку $\min\limits_{i=1,2,3,4,5,6} \theta_i^2 = \theta_3^2 = 15$, выбираем изделие 3: $x_3^1 = 2$, $\theta_3^1 = 5$, $T_3^1 = 9$;

$$x_3^2 = T_3^1 + 1 = 10, \ \theta_3^2 = 15, \ T_4^2 = 18.$$

Таблица 2. Наиболее раннее время завершения изготовления различных изделий

Показатели	Показатели первого этапа обработки различных изделий						Показатели второго этапа обработки различных изделий					
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
x_i	1	4	2	7	10	8	14	13	10	16	18	19
θ_i	7	9	5	14	12	12	22	20	15	20	26	25
T_i	9	12	9	15	17	18	23	25	18	21	28	28

Шаг 2. ($s=2$). $\widetilde{I}^1=\{3\}$, $\widetilde{I}^2=\{1,2,4,5,6\}$. Значения основных параметров обработки после установки на первое место в последовательности изделия 3 приведены в табл.3

Таблица 3. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{I}^2$

Параметры	Параметры обработки изделий на первом этапе $i=$					Параметры обработки изделий на втором этапе $i=$				
	1	2	4	5	6	1	2	4	5	6
x_i	6	6	7	10	8	15	15	16	16	16
t_i	6	5	7	2	4	8	7	4	8	6
r_i	2	3	1	5	6	2	5	1	2	3
θ_i	12	11	14	12	12	23	22	20	24	22
T_i	14	14	15	17	18	25	27	21	26	25

Поскольку $\min\limits_{i=1,2,4,5,6}\theta_i^2=\theta_4^2=20$, выбираем изделие 4: $x_4^1=7$, $\theta_4^1=14$, $T_4^1=15$;

$$x_4^2=T_4^1+1=16,\ \theta_4^2=20,\ T_4^2=21.$$

Шаг 3. ($s=3$). $\widetilde{I}^1=\{3,4\}$, $\widetilde{I}^2=\{1,2,5,6\}$. Значения основных параметров обработки после установки в этих условиях приведены в табл. 4.

Таблица 4. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{I}^2=\{1,2,5,6\}$

Параметры	Параметры обработки изделий на первом этапе $i=$				Параметры обработки изделий на втором этапе $i=$			
	1	2	5	6	1	2	5	6
x_i	15	15	15	15	24	24	23	26
t_i	6	5	2	4	8	7	8	6
r_i	2	3	5	6	1	5	2	3
θ_i	21	20	17	19	32	31	31	32
T_i	23	23	22	25	33	36	33	35

Поскольку $\min\limits_{i=1,2,4,5,6} \theta_i^2 = \theta_2^2 = \theta_5^2 = 31$, а $\theta_5^1 < \theta_2^1$, выбираем изделие 5: $x_5^1 = 15$, $\theta_5^1 = 17$, $T_5^1 = 22$; $x_5^2 = T_5^1 + 1 = 23$, $\theta_5^2 = 31$, $T_5^2 = 33$.

Шаг 4. ($s = 4$). $\widetilde{I}^1 = \{3, 4.5\}$, $\widetilde{I}^2 = \{1, 2, 6\}$. Значения основных параметров обработки после установки изделия 5 приведены в табл. 5.

Таблица 5. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{I}^2 = \{1, 2, 6\}$

Параметры	**Параметры обработки изделий на первом этапе $i =$**			**Параметры обработки изделий на втором этапе $i =$**		
	1	2	6	1	2	6
t_i	18	18	18	32	32	32
t_i	6	5	4	8	7	6
r_i	2	3	6	1	5	3
θ_i	24	23	22	40	39	38
T_i	26	26	28	41	44	41

Поскольку $\min\limits_{i=1,2,6} \theta_i^2 = \theta_6^2 = 38$, выбираем изделие 6: $x_6^1 = 18$, $\theta_6^1 = 22$, $T_6^1 = 28$; $x_6^2 = \min(T_5^2, \theta_6^1) = \min(28, 32) = 32$, $\theta_6^2 = 38$, $T_6^2 = 41$.

Шаг 5. ($s = 5$). $\widetilde{I}^1 = \{3, 4, 5, 6\}$, $\widetilde{I}^2 = \{1, 2\}$. Значения основных параметров обработки после установки изделия 6 приведены в табл. 6.

Таблица 6. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{I}^2 = \{1, 2\}$

Параметры	**Параметры обработки изделий на втором этапе $i =$**		**Параметры обработки изделий на втором этапе $i =$**	
	1	2	1	2
t_i	23	23	39	39
t_i	6	5	8	7
r_i	2	3	1	5
θ_i	29	28	47	46
T_i	31	31	48	53

Поскольку $\min\limits_{i=1,2} \theta_i^2 = \theta_2^2 = 46$, выбираем изделие 2: $x_2^1 = 23$, $\theta_2^1 = 28$, $T_2^1 = 31$; $x_2^2 = (\theta_6^2 + 1) = 39$, $\theta_2^2 = 46$, $T_2^2 = 53$.

Шаг 6. $s = 6$. Выбираем изделие 1: $x_1^1 = 29$, $\theta_1^1 = 37$, $T_1^1 = 38$; $x_1^2 = (\theta_2^2 + 1) = 47$, $\theta_1^2 = 55$, $T_1^2 = 56$.

$$\overline{T} = \min_{i=1,2,3,4,5,6} T_i^2 = T_1^2 = 56.$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

Используем все обозначения алгоритма решения задачи 1, и в начале процесса положим $\widetilde{I}^1 = \widetilde{I}_s^1 = \varnothing$, $\widetilde{I}^2 = \widetilde{I}_s^2 = \widetilde{I} = \{i = 1,...,n\}$. Определим минимальные значения времени завершения изготовления изделий на двух стадиях обработки с учетом затрат времени на постобработку:

$$\theta_i^1 = x_i^1 + t_i^1,\ T_i^1 = \theta_i^1 + r_i^1;\ \ x_i^2 = \min(T_i^1 + 1, x_i^2);$$

$$\theta_i^2 = x_i^2 + t_i^2,\ T_i^2 = \theta_i^2 + r_i^2;\ i = 1,...,n. \tag{4}$$

В начале процесса на каждом s-м шаге вычислений, $s = 1,...,S$, упорядочим множество всех изделий по возрастанию значений $\dfrac{T_i^2}{c_i}$:

$$\widetilde{J}_s^2 = \left\{ i_1, i_2, ..., i_{l-1}, i_l, ..., i_{n^s} \mid \frac{T_{l-1}^2}{c_{l-1}} \le \frac{T_l^2}{c_l}, l = 2,...,n_s \right\},\ s = 1,...,S,$$

где для $s = 1$ $n_s = n$, $\widetilde{I}_s^1 = \widetilde{J}_s^1 = \varnothing$, $\widetilde{I}_s^2 = \widetilde{J}_s^2 = \{i = 1,...,n\}$.

На каждом s-м шаге алгоритма для множества изделий $\widetilde{I}_s^2 = \{i_p, i_{p+1}, ..., i_\mu, ..., i_{n_s}\}$, где $n_s = n - (s-1)$, вычисляем значения следующих параметров:

$$x_\mu^1 = \max(\bar{x}_\mu^1, \theta_{n_{s-1}}^1 + 1),\ \theta_\mu^1 = x_\mu^1 + t_\mu^1,\ T_\mu^1 = \theta_\mu^1 + r_\mu^1 + t_\mu^1;$$

$$x_\mu^2 = \max(T_\mu^2 + 1, \bar{x}_\mu^2),\ \theta_\mu^2 = x_\mu^2 + t_\mu^2,\ T_\mu^2 = \theta_\mu^2 + r_\mu^2,\ \mu \in \widetilde{I}_2^s.$$

Строим последовательность $\widetilde{J}_s^2$ в соответствии с выражением (4): $\widetilde{J}_s^2 = \{i_{\mu_1}, i_{\mu_2} ...., i_{\mu_s}\}$.

Устанавливаем изделие с индексом i_{μ_s} на последнее место в последовательности $\widetilde{J}_s^1$. Полагаем $\widetilde{I}_s^1 = \widetilde{I}_s^1 \cup i_{\mu_s}$, $\widetilde{J}_s^1 = \widetilde{J}_s^1 \cup i_{\mu_s}$; $\widetilde{I}_s^2 = (\widetilde{I}_s^2 / i_{\mu_s})$, $\widetilde{J}_s^2 = (\widetilde{J}_s^2 / i_{\mu_s})$. Если $\widetilde{I}_s^1 = \widetilde{I}$, $\widetilde{I}_s^2 = \varnothing$ и определена последовательность изготовления всех изделий $\widetilde{J}_s^2 = \left\{ j_1, j_2, ..., j_{l-1}, j_l, ..., j_{n^s} \mid \dfrac{T_{l-1}^2}{c_{l-1}} \le \dfrac{T_l^2}{c_l}, l = 2,...,n_s \right\}$, то вычисляем значение критерия оптимальности — величины суммарных потерь по формуле $F = \sum_{l=1}^{n} (a_i + c_l T_l)$. На этом алгоритм завершает работу.

В противном случае, если $\widetilde{I}_s^1 \ne \widetilde{I}$, $\widetilde{I}_s^2 \ne \varnothing$, полагаем $\widetilde{I}_{s+1}^1 = \widetilde{I}_s^1$, $\widetilde{I}_{s+1}^2 = \widetilde{I}_s^2$, $s := (s+1)$ и вновь выполняем следующий шаг алгоритма.

Иллюстративный пример 2

Параметры изготовления пяти изделий на двух стадиях обработки приведены в табл. 7.

Таблица 7. Параметры обработки изделий

Пока-затели	Показатели первого этапа обработки различных изделий					Показатели второго этапа обработки различных изделий				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
x_i	1	4	2	7	10	14	6	9	12	15
t_i	6	5	3	7	2	8	7	5	4	8
r_i	2	3	4	1	5	1	5	3	1	2
α_i	–	–	–	–	–	0,5	1,0	1,2	0,5	1,0

Шаг 1. ($s=1$). Вычислим минимальные значения времени завершения изготовления изделий на двух стадиях обработки с учетом затрат времени на постобработку, которые сведем в табл. 8.

Таблица 8. Граничные значения времени обработки изделий

Изделия	Граничные значения параметров на каждой стадии обработки						$\frac{T_i^2}{c_i}$
	Первая стадия			Вторая стадия			
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	
1	1	7	9	14	22	23	46
2	4	9	12	13	20	25	25
3	2	5	14	10	15	18	15
4	7	14	15	16	20	21	42
5	10	12	17	18	26	28	28

Последовательность выполнения заданий $\widetilde{J}=\{3,2,5,4,1\}$.

Поскольку $\min\limits_{1\le i\le 5}\frac{c_i}{T_i}=\frac{c_3}{T_3}=15$, выбираем изделие 3: $x_3^1=2$, $\theta_3^1=5$, $T_3^1=9$; $x_3^2=10$, $\theta_3^2=15$, $T_3^2=18$; $C_3=33{,}6$. Это изделие ставим на 1-е место в $\widetilde{J}^1$; $\widetilde{J}^1=\{3\}$, $\widetilde{J}^2=\{1,2,4,5\}$.

Шаг 2. ($s=2$). После установки изделия 3 вычисленные значения параметров приведены в табл. 9.

Таблица 9. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{J}^2=\{1,2,4,5\}$.

Изделия	Граничные значения параметров на каждой стадии обработки						$\frac{T_i^2}{c_i}$
	Первая стадия			Вторая стадия			
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	
1	6	12	14	16	24	25	50
2	6	11	14	16	23	28	28
4	7	14	15	16	20	21	42
5	10	12	17	18	26	28	28

Последовательность выполнения заданий $\widetilde{J}=\{2,5,4,1\}$. Поскольку $\min\limits_{1=1,2,4,5}\dfrac{T_i}{c_i}=\dfrac{T_5}{c_5}=28$, выбираем изделие 5: $x_5^1=10$, $\theta_5^1=12$, $T_5^1=17$; $x_5^2=18$, $\theta_5^2=26$, $T_3^2=28$; $C_5=28$; $\widetilde{J}^1=\{3,5\}$, $\widetilde{J}^2=\{1,2,4\}$.

Шаг 3. ($s=3$). После установки изделия 5 вычисленные значения параметров приведены в табл. 10.

Таблица 10. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{J}^2=\{1,2,4\}$

Изделия	Граничные значения параметров на каждой стадии обработки						$\dfrac{T_i^2}{c_i}$
	Первая стадия			Вторая стадия			
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	
1	13	19	21	27	35	36	72
2	13	18	21	27	34	39	39
4	13	20	21	27	31	32	64

Последовательность выполнения заданий $\widetilde{J}=\{2,4,1\}$. Поскольку $\min\limits_{1=1,2,4}\dfrac{T_i}{c_i}=\dfrac{T_2}{c_2}=39$, выбираем изделие 2: $x_2^1=13$, $\theta_2^1=18$, $T_2^1=20$; $x_2^2=27$, $\theta_5^2=34$, $T_3^2=39$; $C_2=39$.

Шаг 4. ($s=4$). Значения параметров для изделия 2 приведены в табл. 11.

Таблица 11. Основные параметры обработки подмножества изделий $\widetilde{J}^2=\{1,4\}$

Изделия	Граничные значения параметров на каждой стадии обработки						$\dfrac{T_i^2}{c_i}$
	Первая стадия			Вторая стадия			
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	
1	19	25	27	35	43	44	88
4	19	26	27	35	39	40	80

Последовательность выполнения заданий $\widetilde{J}^1=\{4,1\}$. Поскольку $\min\limits_{1=1,4}\dfrac{T_i}{c_i}=\dfrac{T_4}{c_4}=80$, выбираем изделие 4: $x_4^1=19$, $\theta_4^1=26$, $T_4^1=27$; $x_4^2=35$, $\theta_4^2=39$, $T_3^2=40$; $C_4=20$. Значения параметров для оставшегося изделия 1 приведены в табл. 12.

Таблица 12. Значения параметров на последнем шаге

Изделия	Граничные значения параметров на каждой стадии обработки						$\dfrac{T_i^2}{c_i}$
	Первая стадия			Вторая стадия			
	x_i^1	θ_i^1	T_i^1	x_i^2	θ_i^2	T_i^2	
1	27	33	35	40	48	49	24,5

Шаг 5. ($s=5$). Выбираем изделие 1: $x_1^1=27$, $\theta_1^1=33$, $T_1^1=35$; $x_1^2=40$, $\theta_1^2=48$, $T_1^2=49$; $C_4=24{,}5$.

Последовательность выполнения заданий $\widetilde{J}=\{3,2,5,4,1\}$. Суммарные затраты при этом составят $\sum_{i=1}^{5} C_i = 24{,}5+39+33{,}6+20+28=145{,}1$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 3

Найдем минимальное время переналадок машин на каждой стадии обработки при переходе от изготовления i-й детали к j-й:

$$\beta_{ij}^k = \min_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} a_{ij}^k,\quad k=1,2,\quad i=1,\dots,n.$$

Определим нижнюю границу длины расписания. Время завершения изготовления всех изделий на каждой стадии обработки не может быть меньше величины

$$D^k=\sum_{i=1}^{n}(t_i^k+\beta_i^k)-\max_{1\le i\le 5}\max_{1\le j\le n} a_{ij}^k,\ k=1,2.$$

Минимальное время начала работы машины на второй стадии обработки не может быть меньше величины $d^1=\min_{1\le i\le 5}(t_i^1+\beta_i^1)$, а минимальное время работы на второй стадии обработки $d^2=\min_{1\le i\le 5} t_i^2$. Если $D^1>D^2$, то длина расписания не может быть меньше величины $\xi(T^1)=D^1+d^2$, а в случае $D^1\le D^2$ — значения $\xi(T^2)=D^2+d^1$. Следовательно, нижняя граница длины двухстадийного расписания не может быть меньше величины

$$\xi(T)=\max\{\xi(T^1),\xi(T^2)\}.$$

Рассмотрим алгоритм приближенного решения задачи 3 — построение оптимального по времени завершения выполнения двухстадийного расписания на одной машине. Пусть определена некоторая последовательность обработки деталей $\widetilde{I}=\{i_1,i_2,\dots,i_{l-1},i_l,i_{l+1},\dots,i_n\}$. Пусть построена некоторая связанная подпоследовательность $\widetilde{I}^s\subset\widetilde{I}$ последовательности $\widetilde{I}$, т.е. $\widetilde{I}^s=\{i_l,i_{l+1},\dots,i_s\}$ или $\widetilde{I}^p=\{i_p,\dots,i_l\}$, где $s\le n$, $p\ge 1$. В начале вычислений полагаем $\widetilde{I}^s=\varnothing$. В процессе построения алгоритма на каждом шаге индекс нового включаемого изделия устанавливается либо в начале, либо в конце строящейся последовательности. Если изделие устанавливается в начале этой подпоследовательности, то параметры обработки вычисляются следующим образом:

$$x_{l-1}^1=1,\ \theta_{l-1}^1=1+t_{l-1}^1,\ x_{l-1}^2=\theta_{l-1}^1+1,\ \theta_{l-1}^2=x_{l-1}^2+t_{l-1}^2,\ T_{l-1}=\theta_{l-1}^2. \quad (5)$$

Производится пересчет всех параметров ранее построенной подпоследовательности:

$$x_l^1 = \theta_{l-1}^1 + a_{l-1,l}^1 + 1,\ \ \theta_l^1 = x_l^1 + t_l^1;$$

$$x_l^2 = \max(\theta_l^1, \theta_{l-1}^2 + a_{l-1,l}^2) + 1;$$

$$\theta_l^2 = x_l^2 + t_l^2,\ \ T_l = \theta_l^2,\ \ l = l, l+1, \ldots, s. \tag{6}$$

В случае установки изделия в конце этой подпоследовательности параметры обработки x_r^k, θ_r^k, T_r, $k = 1,2$, $r = p, p+1, \ldots, l$ остаются без изменения, а параметры выбранного изделия вычисляются следующим образом:

$$x_{l+1}^1 = \theta_l^1 + a_{l,l+1,l}^1 + 1,\ \ \theta_{l+1}^1 = x_{l+1}^1 + t_{l+1}^1,$$

$$x_{l+1}^2 = \max(\theta_{l+1}^1, \theta_l^2 + a_{l,l+1,l}^2) + 1,\ \ \theta_{l+1}^2 = x_{l+1}^2 + t_{l+1}^2,$$

$$T_2 = \theta_{l+1}^2. \tag{7}$$

Определим минимальные элементы строк в матрицах времен переналадок на каждой из двух ступеней обработки, а также матрицы суммарного времени переналадок $\overline{A} = \left|\overline{a}_{ij}\right|$, где $\overline{a}_{ij} = a_{ij}^1 + a_{ij}^2$, $i, j = 1,2,\ldots,n$:

$$\beta_i^k = \min_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} a_{ij}^k,\ k = 1,2;\ \hat{\beta}_i = \min_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} \overline{a}_{ij},\ \ i = 1,2,\ldots,n.$$

Выполним приведение 1 этих матриц переналадок, вычислив значения

$$b_{ij}^k = a_{ij}^k - \beta_i^k,\ k = 1,2;\ \overline{b}_{ij} = \overline{b}_{ij} - \hat{\beta}_i^k\ \ i, j = 1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Для столбцов, у которых $\min\limits_{\substack{1\le i\le n\\ j\ne i}} b_{ij}^k > 0$ и $\min\limits_{\substack{1\le i\le n\\ j\ne i}} \overline{b}_{ij} > 0$, вычислим значения

$$\delta_j^k = \min_{\substack{1\le i\le n\\ j\ne i}} b_{ij}^k,\ k = 1,2;\ \overline{\delta}_j = \min_{\substack{1\le i\le n\\ j\ne i}} \overline{b}_{ij},\ \ i = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

и выполним приведение 2 двух этих матриц переналадок:

$$w_{ij}^k = b_{ij}^k - \delta_j^k,\ k = 1,2,\ \overline{w}_{ij} = \min_{\substack{1\le i\le n\\ j\ne i}} \overline{b}_{ij} - \overline{\delta}_j\ \ \ i, j = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

В результате выполненных преобразований в матрице времени суммарных переналадок $\overline{W} = \left|\overline{w}_{ij}\right|$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, в каждой строке и в каждом столбце содержится, по крайней мере, по одному нулю. В процессе вычислений на каждом s-м шаге алгоритма матрица $\overline{W}$ преобразуется вычеркиванием одной строки и одного столбца и приобретает вид $\overline{W}^s = \left|\overline{w}_{ij}^s\right|$ На шаге 1 алгоритма, когда в матрице $\overline{W}^s$ есть все n строк и n столбцов, вычислим оценки всех нулевых элементов, обозначив подмножество этих элементов на каждом 1-м ($s=1$) шаге алгоритма решения задачи $\widetilde{J}_0^s = \widetilde{J}_0^1$:

$$\lambda_{ij}^s = \left\{ \min_{\substack{1\le v\le n \\ v\ne j}} \overline{w}_{ij}^s + \min_{\substack{1\le p\le n \\ p\ne i}} \overline{w}_{ij}^s \,|\, \overline{w}_{ij}^s = 0 \right\},\ \lambda_{ij}^s \in \widetilde{J}_0^s . \qquad (11)$$

Определим нулевой элемент с максимальной оценкой $\overline{\lambda}_{lp}^s = \max_{\lambda_{ij}^s \in \widetilde{J}_0^s} \lambda_{ij}^s$. Этот элемент определяет выбор перехода после обработки изделия 1 к p-му.

Шаг 1. Выполнив преобразование матрицы $\overline{A}^1$ и вычисления (8)–(11), выбираем пару изделий и переход (l,p), определяем подпоследовательность $\widetilde{I}^2 = \{l,p\}$, в матрице $\overline{W}^1$ вычеркиваем l-ю строку и p-й столбец, элемент на пересечении p-й строки и l-го столбца полагаем равным $\overline{w}_{pl}^1 = \infty$. Вновь полученную матрицу обозначим через $\overline{W}^2$. Вычисляем:

$$x_l^1 = 1,\ \theta_l^1 = 1 + t_l^1,\ x_l^2 = \theta_l^1 + 1,\ \theta_l^2 = x_l^2 + t_l^2,\ T_l = \theta_l^2;$$

$$x_p^1 = \theta_l^1 + a_{lp}^1 + 1,\ \theta_p^1 = x_p^1 + t_p^1,\ x_p^2 = \max(\theta_l^2 + t_{lp}^2, \theta_p^1) + 1;$$

$$\theta_l^2 = x_p^2 + t_p^2,\ T_p = \theta_p^2 .$$

Переходим к s-му шагу, $s = 2,\dots,(n-1)$.

Шаг 2. Если $s=(n-1)$, то полагаем $\overline{W}^{s+1} := \overline{W}^s$ и переходим к шагу n. В противном случае переобразовываем матрицу $\overline{W}^s$ так, чтобы в каждой строке и каждом столбце матрицы было, по крайней мере, по одному нулевому элементу. Пусть в последовательности $\widetilde{I}^s$ на первом месте стоит элемент r, а на последнем месте — элемент u. Среди нулевых элементов u-й строки и r-го столбца находим элементы с максимальной оценкой. Пусть это будут соответственно элементы $\overline{\lambda}_{uq}^s$ и $\overline{\lambda}_{gr}^s$.

Если $\overline{\lambda}_{uq}^s < \overline{\lambda}_{gr}^s$, то на первое место в $\widetilde{I}^s$ устанавливаем изделие с индексом, соответствующим g, т.е. после изготовления g-го изделия на двух стадиях обработки изготовляем изделие с индексом r, пересчитываем все параметры обработки изделий в соответствии с выражениями (5), (6).

Если $\overline{\lambda}_{uq}^s \ge \overline{\lambda}_{gr}^s$, то на последнее место в $\widetilde{I}^s$ устанавливаем изделие с индексом, соответствующим q, т.е. после изготовления u-го изделия изготавливаем изделие с индексом q, пересчитываем все параметры обработки изделий в соответствии с выражениями (7). Полагаем $s := (s+1)$, $\widetilde{I}^{s+1} = \widetilde{I}^s$ и снова выполняем этот же шаг для $(s+1)$.

Шаг n. На этом шаге матрица $\overline{W}^s$ включает только два столбца и две строки (пусть это будут строки с индексами l и p и столбцы g и q) и содержит только два нулевых элемента. Пусть это будут элементы $\overline{\lambda}^s_{\mathrm{lg}} = 0$ и $\overline{\lambda}^s_{pq} = 0$, тогда $\overline{\lambda}^s_{pg} = \overline{\lambda}^s_{lq} = \infty$, или $\overline{\lambda}^s_{lq} = 0$ и $\overline{\lambda}^s_{pg} = 0$, тогда $\overline{\lambda}^s_{\mathrm{lg}} = \overline{\lambda}^s_{pq} = \infty$. В первом случае устанавливаем на первое место в последовательности $\widetilde{I}^s$ изделие с индексом g и пересчитываем все параметры обработки изделий по формулам (5), (6). На последнее n-е место в $\widetilde{I}^s$ устанавливаем изделие с индексом q и пересчитываем все параметры обработки изделий по формулам (7). Время выполнения всего комплекса работ на двух стадиях обработки равно $T = T_q$. Во втором случае устанавливаем на первое место в последовательности $\widetilde{I}^s$ изделие с индексом q и производим пересчет всех параметров обработки изделий по формулам (5), (6). На последнее n-е место в последовательности устанавливаем изделие с индексом g и пересчитываем все параметры обработки изделий по формулам (7). Время выполнения всего комплекса работ на двух стадиях обработки $T = T_g$. На этом алгоритм завершает свою работу.

Иллюстративный пример 3

Исходные данные для иллюстративного примера приведены в табл. 13.

Таблица 13. Основные параметры обработки изделий

Индексы изделий $i =$	**Показатели первого этапа обработки различных изделий**						**Показатели второго этапа обработки различных изделий**					
	Время обработки t_i^1	Время переналадок a_{ij}^1					Время обработки t_i^2	Время переналадок a_{ij}^2				
		1	2	3	4	5		1	2	3	4	5
1	10	∞	2	3	4	1	21	∞	5	6	3	7
2	12	5	∞	2	3	2	15	4	∞	7	3	5
3	8	4	3	∞	5	3	25	2	6	∞	4	6
4	15	3	2	1	∞	6	18	7	4	5	∞	4
5	11	6	2	3	4	∞	27	2	6	6	7	∞

Результаты приведения матриц содержатся в табл. 14.

Таблица 14. Приведенные матрицы переналадок

i	**Приведенные матрицы переналадок первого этапа обработки**						**Приведенные матрицы переналадок второго этапа обработки**					
	1	2	3	4	5	$\vec{\beta}_i^1$	1	2	3	4	5	$\vec{\beta}_i^2$
1	∞	1	2	2	0	1+1	∞	2	2	0	4	3
2	2	∞	0	0	0	2	1	∞	3	0	2	3
3	0	0	∞	1	0	3	0	4	∞	2	4	2+1
4	1	1	0	∞	5	1+1	3	0	0	∞	0	4
5	3	0	1	1	∞	2	0	4	3	5	∞	2

Нижняя граница времени выполнения расписания:

$$\xi(T^1) = \sum_{i=1}^{5}(t_i^1 + \beta_i^1) - \max_{1\le i\le 5}\max_{1\le j\le n} a_{ij}^1 + \min_{1\le i\le 5} t_i^2 = (56+9) - 6 + 15 = 74\,;$$

$$\xi(T^2) = \min_{1\le i\le 5}(t_i^1 + \beta_i^1) + \sum_{i=1}^{5}(t_i^2 + \beta_i^2) - \max_{1\le i\le 5}\max_{1\le j\le 5} a_{ij}^2 =$$

$$= (10+1) + (106+14) - 7 = 124\,;$$

$$\xi(T) = \max(\xi(T^1),\ \xi(T^2) = \max(74{,}124) = 124\,.$$

Выполнив предварительные расчеты, получим табл. 15.

Таблица 15. Результаты предварительных расчетов

i	**Суммарное время переналадок двух стадий обработки** $(a_{ij}^1 + a_{ij}^2)$					**Приведенное суммарное время переналадок двух стадий обработки**					**Сумма приводящих констант**
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1	∞	7	9	7	8	∞	0 (0)	2	0 (0)	0 (0)	7
2	9	∞	9	6	7	3	∞	3	0 (0)	0 (0)	6
3	6	9	∞	9	9	0 (2)	3	∞	3	2	6
4	10	6	6	∞	10	4	0 (0)	0 (1)	∞	3	6
5	8	8	9	11	∞	0	0 (0)	1	3	∞	8+1

Выбираем последовательность $((3 \to 1))$: $x_3^1 = 1$, $\theta_3^1 = 1+8 = 9$, $x_1^1 = 9+4+1 = 14$; $x_3^2 = 9+1 = 10$; $\theta_3^2 = 10+25 = 35$; $T_3 = 35$; $x_1^2 = 35 + {}$ ${}+ 2+1 = 38$.

Выбираем последовательность $((4 \to 3)$, т.е $((4 \to 3 \to 1)$:

$$x_4^1 = 1,\ \theta_4^1 = 1+15 = 16,\ x_3^1 = 16+1+1 = 18;\ \theta_3^1 = 18+8 = 26\,;$$

$$x_1^1 = 26+4+1 = 31,\ \theta_1^1 = 31+10 = 41\,;$$

$$x_4^2 = 16+1 = 17\,;\ \theta_4^2 = 17+18 = 35\,;\ T_4 = 35\,;$$

$$x_3^2 = 35+5+1 = 41,\ \theta_3^2 = 41+25 = 61\,;\ T_3 = 61\,;$$

$$x_1^2 = 61+2+1 = 64,\ \theta_1^2 = 64+10 = 74\,;\ T_1 = 74\,.$$

Выбираем последовательности $(5 \to 4)$ и $((1 \to 2)$, $(5 \to 4 \to 3 \to$ $\to 1 \to 2)$:

$$x_5^1 = 1,\ \theta_5^1 = 11+1 = 12\,;\ x_4^1 = 12+4+1 = 17,\ \theta_4^1 = 17+15 = 32\,;$$

$$x_3^1 = 32+5+1 = 38,\ \theta_3^1 = 38+8 = 46\,;\ x_1^1 = 46+2+1 = 49\,;$$

$$\theta_1^1 = 49+10 = 59\,;\ x_2^1 = 59+5+1 = 65,\ \theta_2^1 = 65+2 = 77\,;$$

$$x_5^2 = 12 + 1 = 13\,,\ \theta_5^2 = 13 + 27 = 40\,;\ T_5 = 40\,;$$

$$x_4^2 = 40 + 7 + 1 = 48\,,\ \theta_4^2 = 48 + 18 = 66\,;\ T_4 = 66\,;$$

$$x_3^2 = 66 + 5 + 1 = 72\,,\ \theta_3^1 = 72 + 8 = 80\,;\ T_3 = 80\,;$$

$$x_1^2 = 80 + 2 + 1 = 83\,,\ \theta_1^2 = 83 + 21 = 104\,;\ T_1 = 104\,;$$

$$x_2^2 = 104 + 6 + 1 = 111\,,\ \theta_2^2 = 111 + 15 = 126\,;\ T_1 = 126\,;$$

$$T = \max(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = 126\,.$$

Полученное решение достаточно близко к нижней границе значения критерия оптимальности, равного 124.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Эффективность предложенных в работе эвристических алгоритмов получения приближенных решений задач построения расписаний проверялась проведением вычислительных экспериментов. Проведено 70–120 расчетов по каждой задаче. Решались задачи, предусматривающие обработку 10–50 изделий. Все параметры исходных данных задач 1–3 варьировались в пределах $t_i^k \in [2-15]$, $r_i^k \in [1-7]$, $c_i \in [3-20]$, $a_{ij}^k \in [1-5]$ с выбором соответствующих значений каждого из параметров согласно равномерному закону распределения с математическим ожиданием и дисперсией, равными среднему значению соответствующих интервалов. В большинстве случаев полученное значение критерия оптимальности не превосходило значения его нижней границы более чем на 5–10%, что позволяет сделать вывод о возможности использования этих алгоритмов в практических приложениях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены три различные постановки, математические модели задач построения двухстадийных расписаний последовательного выполнения работ на одной машине. Две постановки предусматривают потери времени на постобработку после завершения выполнения работ на каждой машине. В качестве критериев оптимальности приняты выполнение расписаний в кратчайшие сроки, а также минимизация суммарных потерь, связанных со временем завершения выполнения заданий. Предложены алгоритмы определения нижней границы критерия оптимальности и приближенные методы решения каждой из сформулированных задач, которые проиллюстрированы на числовых примерах. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что полученное значения критерия приближенного решения не превосходит значения нижней границы более чем на 5–10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конвей Р.В.* Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. — М.: Физматгиз, Наука, 1975. — 359 с.
2. *Танаев В.С.* Введение в теорию расписаний / В.С. Танаев, В.В. Шкурба. — М.: Физматгиз, Наука, 1975. — 256 с.
3. *Танаев В.С.* Теория расписаний. Одностадийные системы / В.С. Танаев, В.С. Гордон, Я.М. Шафранский. — М.: Физматгиз, Наука, 1984. — 382 с.
4. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора / А.А. Лазарев, Е.Р. Графов. — М.: РАН Вычислит. центр им. А.А. Дородницына, 2004. — 150 с.
5. *Хоботов Е.Н.* О некоторых моделях и методах решения задач планирования в дискретных производствах / Е.Н. Хоботов // Автоматика и телемеханика, 2007. — № 12. — С. 85–100.
6. *Зак Ю.А.* Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок / Ю.А. Зак. — М.: URSS, 2012. — 394 с.
7. *Зак Ю.А.* Свойства допустимых и оптимальных последовательностей выполнения работ на одной машине / Ю.А. Зак // Проблемы управления. — 2012. — № 5. — С. 54–61.
8. *Зак Ю.А.* Построение допустимых и оптимальных расписаний выполнения работ на одной машине / Ю.А. Зак // Кибернетика и системный анализ. — К., 2012. — № 1. — С. 62–82.
9. *Domschke W.* Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte / W. Domschke, A. Scholl, S. Voß. — Berlin: Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 456 p.
10. *Carlier J.* The one-machine sequencing problem / J. Carlier // European Journal of Operational Research. — 1982. — N 11. — P. 42–47.
11. *Brucker P.* Scheduling Algorithms / P. Brucker // Springer-Verlag. — Berlin, Heidelberg und New York, 1998. — 377 p.
12. *Lawler E.L.* Sequencing and Scheduling: Algorithms and complexity / E.L. Lawler, J.K. Lenstra, Kann Rinnooy et al. // Logistic of Production and Inventory, S.C. Graves et.al (Hrsg). — 1993. — Amsterdam–London. — P. 445–522.
13. *Blazewicz J.* Scheduling under resource constraints: deterministic models / J. Blazewicz, W. Cellary, R. Slowinski // Annals of Operations Research. —1986. — N 7. — Baltzer, Basel. — P. 329–341.
14. *Згуровский М.З.* Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: моногр. / М.З. Згуровский, А.А. Павлов. — К.: Наук. думка, 2010. — 573 с.
15. *Павлов А.А.* Новый подход к решению задачи «Минимизация суммарного взвешенного опоздания при выполнении независимых заданий с директивными сроками одним прибором / А.А. Павлов, Е.Б. Мисюра // Системні дослідження та інформаційні технології. — К., 2002. — № 2. — С. 7–23.

Поступила 11.09.2018