

**СВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ МНОЖЕСТВА ВОЗМОЖНЫХ  
СОСТОЯНИЙ НАБЛЮДАЕМОЙ СИСТЕМЫ  
С ПАРАМЕТРАМИ УРАВНЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ  
И РАЗМЕРНОСТЬЮ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ  
СИСТЕМЫ**

**Н.Д. ПАНКРАТОВА, А.В. ШОЛОХОВ**

**Аннотация.** Рассмотрено гарантированное эллипсоидальное оценивание множества возможных состояний линейной системы, при котором минимизируется многомерный объём эллипсоида, аппроксимирующего пересечение априорного эллипсоида, ограничивающего множество возможных состояний системы, и множества измерений, представляющего «гиперслои» в том же пространстве состояний. Сформулирована и доказана теорема о соотношении параметров априорного эллипсоида, параметров уравнения измерений и размерности пространства состояний, улучшающем оценки состояния системы по критерию минимума многомерного объёма апостериорного эллипсоида. На основании теоремы предложено упрощение алгоритма оценивания, которое исключает особый случай, — деление на ноль и принятие дополнительных мер для этого случая. Предложенное упрощение приводит к некоторому ухудшению эллипсоидальной оценки согласно принятого критерия минимизации в общем случае, а в предельном случае сходится к оптимальной оценке. Результаты проиллюстрированы примером оценивания статического состояния системы. Сравнены методы: оптимальный, упрощённый, предложенный в этой работе, и метод наименьших квадратов. Приведены полученные значения: точечная оценка и множественная эллипсоидальная оценка — величины полусей апостериорных эллипсоидов.

**Ключевые слова:** алгоритм гарантированного эллипсоидального оценивания, множество достижимости, «гиперслои», уравнение измерений состояния системы, фазовое пространство состояний системы, верхняя граница оценки состояния системы, метод наименьших квадратов.

**ВВЕДЕНИЕ**

В данной работе продолжены исследования алгоритма гарантированного эллипсоидального оценивания состояния линейной управляемой системы в фазовом пространстве состояний [1, 2], в которой измеряется только одна проекция вектора её состояния. Измерение содержит погрешность. Множество возможных состояний системы минимизируется по объёму. Геометрически результат работы алгоритма — эллипсоидальная аппроксимация пе-

ресечения априорного эллипсоида, которым аппроксимировано множество достижимости линейной управляемой системы [3], и «гиперслоя», представляющего согласно данным измерения множество возможных состояний управляемой системы, ограниченное двумя параллельными гиперплоскостями. Рассматриваются и исследуются соотношения между размерностью пространства состояний системы, параметрами измерительного устройства—уравнения измерений, включая погрешность измерения, и параметрами эллипсоидального множества возможных состояний системы. В результате можно получить верхнюю границу оценки состояния системы при выборе конкретного измерительного устройства, максимальной его погрешности в известных границах возмущающего воздействия на систему. Необходимость в этом часто возникает в практических случаях, когда статистические характеристики возмущения и погрешности измерения определить невозможно, невыгодно из экономических соображений или нет времени на их определение, однако граничные их значения известны из физических или конструктивных особенностей управляемого объекта и измерителя.

Параметры эллипсоида минимального объема, описанного вокруг сферического слоя или сегмента, были найдены для полусферы [4] и для «гиперслоя» [5]. В работе [6] предложен алгоритм эллипсоидальной аппроксимации по критерию минимума объема для общего случая пересечения эллипсоида и «гиперслоя», а в [1] получено условие использования измерения, согласно которому априорный эллипсоид и «гиперслоя» лишь касаются друг друга. Дальнейшие исследования проведем для случая, когда «гиперслоя» пересекает априорный эллипсоид.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть исходный эллипсоид задан в виде

$$x_j \in E_j = \{x_j : (x_j - \tilde{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \tilde{x}_j) \leq 1\}, \quad (1)$$

$j \in T_0, \quad j = 1, \dots, k \quad (k < \infty)$  — дискретное время;  $E_j \subset X_j = R^n$  — компактное множество возможных значений исходного состояния;  $\tilde{x}_j$  и  $H_j^T = H_j > 0$  — заданные  $n$ -мерный вектор и  $(n \times n)$ -матрица соответственно. Уравнение измерения

$$y_j = h^T x_j + \xi_j, \quad |\xi_j| \leq c, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $y_j \in R^1$ ;  $h \in R^n, \quad \|h\| = 1$  — параметр измерительного устройства;  $\xi_j \in R^1$  — ограниченная помеха измерений;  $c \geq 0$  — заданная константа в  $R^n$  определяет «гиперслоя»

$$S(y_j, x_j) = S_j = \{x_j : (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}. \quad (3)$$

На основе выражений (1) и (3) строится гарантированная эллипсоидальная оценка

$$E_{j+1} \supset E_j \cap S_j, \quad E_{j+1} = \{x_{j+1} : (x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}) \leq 1\}, \quad (4)$$

меньшая или равная по объему предыдущей (1). Иначе оставляем исходный эллипсоид.

Согласно работе [1] получим аппроксимирующий эллипсоид (4), параметры которого зависят от степени пересечения априорного эллипсоида и «гиперслоя»:

$$\tilde{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau_j e_j^{-1} H_j h_j \sigma_j; \quad (5)$$

$$H_{j+1} = (H_j - \tau_j e_j^{-2} H_j h h^T H_j) \gamma_j^2; \quad (6)$$

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j (\chi_j^2 (1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2); \quad (7)$$

$$\tau_j = (q_j^{-1} + e_j^2)^{-1} e_j^2, \quad 0 \leq \tau_j < 1. \quad (8)$$

Здесь:  $\tilde{x}_j$  — центр априорного эллипсоида;  $\tilde{x}_{j+1}$  — центр аппроксимирующего эллипсоида;  $e_j = \sqrt{h_j^T H_j h_j}$  — «энергетическая норма» [7] матрицы  $H_j$  эллипсоида  $E_j$ ;  $\Delta_j = y_j - h_j^T \tilde{x}_j$  — расстояние от центра априорного эллипсоида  $E_j$  до середины «гиперслоя»  $S_j$  вдоль направления  $h_j$ ;  $\sigma_j = \Delta_j e_j^{-1}$ ;  $\tau_j$  — шаг алгоритма;  $q_j^{-1} \geq c e_j$  — подстроечный параметр, полученный из условия использования измерения (2) в случае, когда «гиперслоем» лишь касается исходного эллипсоида;  $\chi_j = c e_j^{-1}$  — нормированная полуширина «гиперслоя».

Условие информативности измерения  $y_j$  записывается в виде [1]

$$(1 - \tau_j)(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2))^n \leq 1. \quad (9)$$

Чем меньше левая часть при принятом выражении для  $\tau_j$ , тем информативнее  $y_j$ . Требуется найти такие соотношения между параметрами  $\chi_j$ ,  $\sigma_j$  и размерностью пространства состояний  $n$  в алгоритме, чтобы при имеющемся  $y_j$  левая часть неравенства (9) была бы минимальной. Будем искать также значения  $\chi_j$ ,  $\sigma_j$ , при которых (9) превращается в равенство.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Продифференцируем левую часть неравенства (9), приравняем полученный результат к нулю и проведём возможные упрощения:

$$(n+1)\sigma_j^2\tau_j^2 + (\chi_j^2 - (1-2n)\sigma_j^2 - 1)\tau_j + 1 + n(\sigma_j^2 - \chi_j^2) = 0. \quad (10)$$

Решив уравнение (10) и взяв положительный корень, получим оптимальное соотношение для  $\tau_j$ .

Подобным образом решение получено для  $q_j$  [10]. Подставив его в выражение (8), получим такое же решение (10). Однако это решение имеет

знаменатель  $(n+1)\sigma_j^2$ . Тогда при  $\sigma_j = 0$  возникает особенность — деление на ноль. Во избежание этого вводится ограничение  $\sigma_j > \delta$ , где  $\delta$  — некоторая малая константа. В случае  $\sigma_j \leq \delta$  необходимо перейти к другому выражению для  $\tau_j$  — решению линейного уравнения, полученного из уравнения (10), если положить в нём  $\sigma_j^2 = 0$ . Чтобы избежать этого предлагается выбор выражения для  $\tau_j$  другим путём. Сначала исследуем предельный случай — равенство в выражении (9), которое справедливо при  $\tau_j = 0$ . Подставив в уравнение (10)  $\tau_j = 0$ , получим значения  $\chi_j$ ,  $\sigma_j$ , при которых (9) превращается в равенство:

$$\chi_j^2 - \sigma_j^2 = n^{-1} \text{ или } \sigma_j = \sqrt{\chi_j^2 - n^{-1}}, \text{ либо } \chi_j = \sqrt{n^{-1} + \sigma_j^2}. \quad (11)$$

Таким образом, сформулируем **теорему**:

Пусть  $E_j \cap S_j \neq \emptyset$ . Тогда, для того чтобы измерение  $y_j$  было информативным, т.е. выполнялось условие (9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось  $\sigma_j \leq \sqrt{\chi_j^2 - n^{-1}}$ .

**Следствие.** Если  $\sigma_j = 0$ , т.е. середина «гиперслоя»  $S_j$  с полушириной  $\chi_j$  проходит через центр априорного эллипсоида  $E_j$ , выражающего неопределённость состояния, с матрицей  $H_j$ , то зависимость между  $H_j$ , размерностью пространства состояний  $n$ , полушириной  $\chi_j$  (максимальной величиной погрешности измерения  $c$ ) и параметрами измерительного устройства приобретает вид:  $c \leq \sqrt{n^{-1} h^T H_j h}$ .

Далее сформулируем **лемму о выборе шага**  $\tau_j$ . Пусть  $E_j \cap S_j \neq \emptyset$ . Прологарифмируем выражение (9):  $\ln(1 - \tau_j) + n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq 0$ . Отсюда  $n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq -\ln(1 - \tau_j)$ . При  $0 \leq \tau_j < 1$  на основании известного неравенства [8] имеем  $\ln(1 + \tau_j) \leq \tau_j, \forall \tau_j > -1$ , откуда  $\tau \leq \ln \frac{1}{1 - \tau}$ . Переходим вначале к неравенству  $n \ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) \leq n\tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)$ , а затем к  $n\tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2) \leq \tau_j$ , которое стремиться к равенству быстрее, чем (9). Тогда

$$\tau_j = 1 - \chi_j^2(1 + n\sigma_j^2)^{-1}. \quad (12)$$

Приравняв неравенство (12) к нулю, получим выражения (11).

В работе [6] переопределяются параметры «гиперслоя» — полуширина  $\chi_j$  и расстояние  $\sigma_j$  — до его середины в случае пересечения эллипсоида «гиперслоем» только одной своей границей:  $|\sigma_j| - \chi_j < 1 < |\sigma_j| + \chi_j$ . То есть

выполняется переопределение:  $|\sigma_{j,\text{corr}}| + \chi_{j,\text{corr}} = 1$ . Здесь:  $\sigma_{j,\text{corr}} = (1 + |\sigma_j| - \chi_j)/2$ ;  $\chi_{j,\text{corr}} = (1 - |\sigma_j| + \chi_j)/2$  — переопределённые параметры. Подставив  $\chi_j = \sqrt{n^{-1} + \sigma_j^2}$  из равенства (11) в  $|\sigma_{j,\text{corr}}| + \chi_{j,\text{corr}} = 1$ , получим  $|\sigma_{j,*}| = (n-1)/(2n)$ , откуда  $\chi_{j,\text{lim}} = (n+1)/(2n)$ . При  $\sigma_j = 0$  и  $|\sigma_{j,*}| = (n-1)/(2n)$  покажем на графиках (рис. 1) значения левой части выражения (9) — критерия информативности изменении  $\chi_j$  от малого значения до  $\chi_j = 1/\sqrt{n}$  и  $\chi_{j,\text{lim}} = (n+1)/(2n)$ ,  $n = 2$ .

По оси ординат отсчитываем значение критерия информативности, по оси абсцисс — полуширину «гиперслоя». Сплошной линией показан субоптимальный график (Suboptimal), пунктирной — оптимальный график (Optimal). На рис. 1, а показаны графики при прохождении середины «гиперслоя» через центр априорного эллипсоида:  $\sigma = 0$ , а на рис. 1, б — когда середина «гиперслоя» на расстоянии  $|\sigma_{j,*}| = (n-1)/(2n)$  от центра априорного эллипсоида.

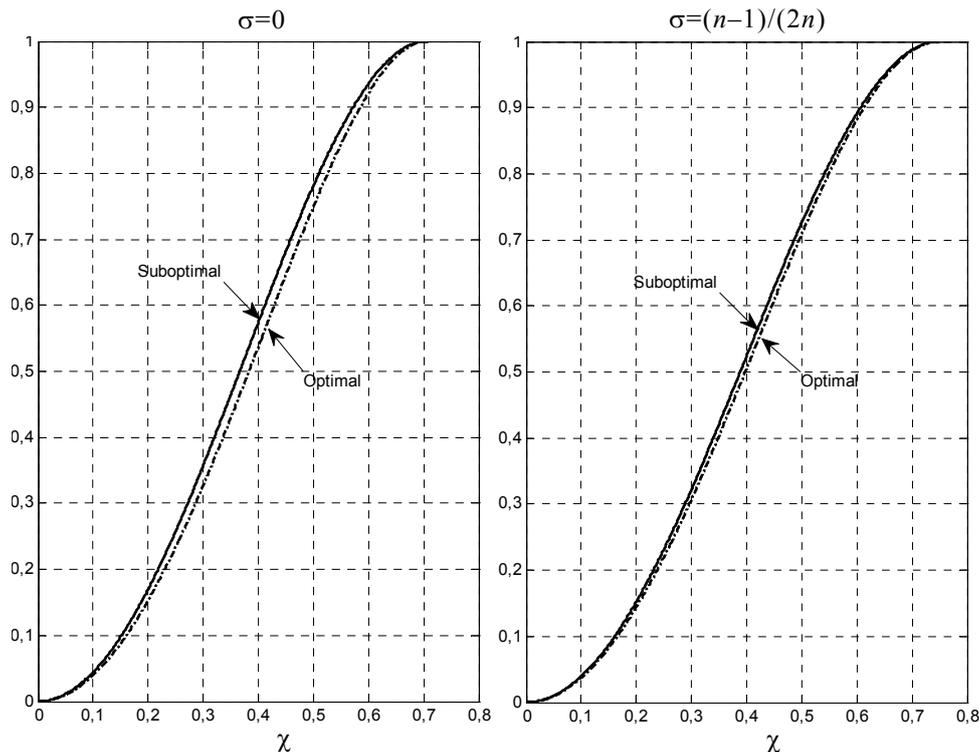


Рис. 1

### ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ НЕПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПО ТРЁМ ЕГО ЦЕЛЕНГАМ, ВЗЯТЫМ ИЗ РАЗНЫХ ТОЧЕК

Для иллюстрации работы алгоритма возьмём пример из работы [9] (рис. 2).

Требуется оценить положение  $(x, y)$  точки  $A$ , лежащей на плоскости, по измерениям углов  $z_i$ , производимым из нескольких точек  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), которые расположены на линии отсчёта  $Ox$  на расстоянии  $l_i$  от начала координат. С положением точек  $A$  и  $B_i$  угловые измерения  $z_i$  связаны нелинейными уравнениями:

$$z_i = \operatorname{arctg} \frac{y}{x - l_i} + v_i, \quad (13)$$

где  $v_i$  — случайная ошибка, допущенная при измерении угла  $z_i$ .

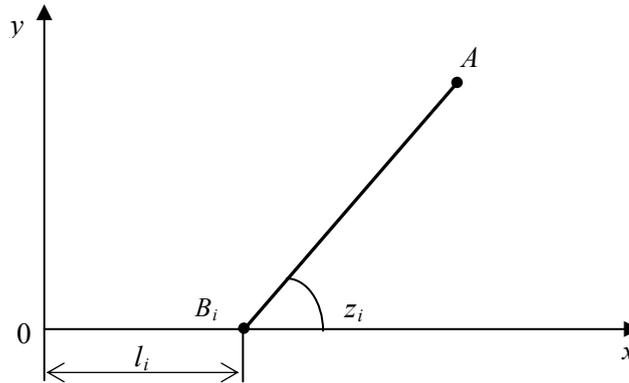


Рис. 2

Предположим, что  $|z_i| \leq c$ , где  $c$  — известная константа. Линеаризуем выражение (13) в окрестности априорной оценки положения  $(x, y)$ , которую обозначим как  $(\bar{x}, \bar{y})$ :  $dz = h_i[x_i - \bar{x}, y_i - \bar{y}]^T + v_i$ ,  $dz = z_i - \bar{z}_i$ ,  $h_i = [h_{1,i}, h_{2,i}]$ ,

$\bar{z}_i = \operatorname{arctg} \frac{\bar{y}}{\bar{x} - l_i}$ ,  $h_{1,i} = \left( \frac{\partial z_i}{\partial x} \right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$ ,  $h_{2,i} = \left( \frac{\partial z_i}{\partial y} \right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$ . Пусть  $k = 3$  и заданы дан-

ные:  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 152,5\text{м}$ ,  $l_3 = 305\text{м}$ ;  $z_1 = 30,1^\circ$ ,  $z_2 = 45,0^\circ$ ,  $z_3 = 73,6^\circ$ ;

$R = E[v_i v_j] = \operatorname{diag}(r_{ii})$ :  $r_{11} = 0,01$ ,  $r_{22} = 0,01$ ,  $r_{33} = 0,04$ , где размерность  $r_{ii}$

— градус<sup>2</sup>; начальная точечная оценка  $\bar{x}_0 = 369\text{м}$ ,  $\bar{y}_0 = 213,5\text{м}$ ; матрица

гарантированного эллипса начального состояния  $H_0 = 9 \begin{bmatrix} 1,045 & 0,967 \\ 0,967 & 1,183 \end{bmatrix}$  и

максимальное значение погрешности измерения  $v_i^2 = r_{33} = 0,04$ . Получим оценку методом наименьших квадратов (МНК) по трём измерениям, как в работе [9], и методом гарантированного оценивания. Используем выражение для шага  $\tau_j$  (12) и выражение для подстроечного параметра  $q_j$  из работы [6], подставив его в выражение (8) и получив  $\tau_j$  либо, что то же самое, решив уравнение (10) и взяв его положительный корень. Процесс получения оценки (4) по формулам (5)–(8) изображен на рис. 3.

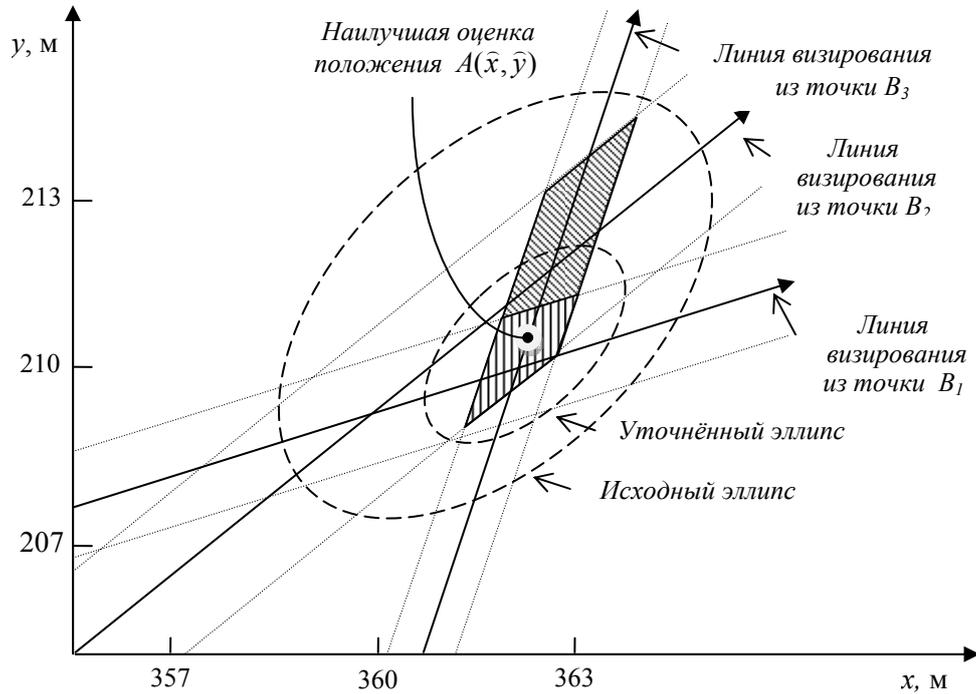


Рис. 3

Результаты оценивания приведены в табл. 1.

**Таблица 1**

Метод	Параметры		
	$\hat{x}_3, \text{м}$	$\hat{y}_3, \text{м}$	Корни из собственных чисел матрицы (полуоси эллипса) $H_3, \text{м}$
МНК [9]	370,5	214,1	$1\sigma = 39\% : 1,451 ; 0,392$
Г.О. (12)	368,7	213,2	3,999 ; 0,744
Г.О. [6]	368,8	214,0	2,236 ; 0,726

Повернув исходный эллипсоид на  $90^\circ$  против часовой стрелки (на рис. 3 не показано), снова выполним вычисления, результаты которых приведены в табл. 2.

**Таблица 2**

Метод	Параметры		
	$\hat{x}_3, \text{м}$	$\hat{y}_3, \text{м}$	Корни из собственных чисел матрицы (полуоси эллипса) $H_3$
МНК [9]	354	227,44	$1\sigma = 39\% : 0,38 ; 1,443$
Г.О. (12)	368,7	213,66	0,777 ; 2,559
Г.О. [6]	368,34	214,0	1,007 ; 1,545

## ВЫВОДЫ

Несмотря на меньшие значения суммы квадратов полуосей эллипсоидов, полученных с помощью МНК по сравнению с эллипсоидами, полученными с помощью метода гарантированного оценивания согласно формуле (12) и работе [6], оценка МНК существенно зависит от исходного предположения о начальной точечной оценке. Гарантированное оценивание такой зависимости оценки от исходных предположений не показало, что свидетельствует о большей надёжности метода. Применение предложенного в работе выражения для субоптимального шага в алгоритме эллипсоидального оценивания не влечёт заметного ухудшения качества оценивания, но оказывается более простым, чем выражение для оптимального шага.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бакан Г.М.* К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы / Г.М. Бакан, А.В. Шолохов // Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 16–25.
2. *Шолохов А.В.* К эллипсоидальному оцениванию состояния линейной динамической системы по скалярному наблюдателю / А.В. Шолохов // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2008. — № 3. — С. 78–87.
3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф.Л. Черноусько. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
4. *Юдин Д.Б.* Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач / Д.Б. Юдин, А.С.Немировский // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12. — Вып. 2. — С. 357–369.
5. *Шор Н.З.* Об одном семействе алгоритмов для решения задач выпуклого программирования / Н.З. Шор, В.И. Гершович // Кибернетика. — 1979. — №4. — С. 62–67.
6. *Волосов В.В.* Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем / В.В. Волосов // Автоматика. — 1991. — № 3. — С. 24–32.
7. *Воеводин В.В.* Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
8. *Абрамович М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамович, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
9. *Брайсон А.* Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Х. Ю-ши. — М.: Мир, 1972. — 544 с.

Поступила 16.11.2018