УДК 519.8

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДИСКРЕТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА, Э.В. ТЕРЕЩЕНКО

Предложен полиномиальный двухуровневый алгоритм линейной свертки критериев для задачи покрытия интервально взвешенного графа звездами с максимизируемой целевой функцией весового вида. Проведено обоснование достаточных условий асимптотической точности предложенного алгоритма.

ВВЕДЕНИЕ

Исследуются задачи дискретного программирования, в которых числовые параметры слабо структурированы, так как их значения определяются временными рядами исходных данных основного показателя моделируемого эволюционного процесса или системы. Например, задача землепользования [1] формализуется как экстремальная задача покрытия звездами двудольного графа, в котором веса ребер определяются путем прогнозирования временных рядов урожайности сельскохозяйственных культур. Аналогично, в теоретико-графовой постановке задачи сегментации рынка [2] веса ребер представляют собой прогнозное значение временных рядов спроса на определенный вид продукции. Как показано в работе [3], в процессе прогнозирования временного ряда основного показателя получаемая оценка его значений представляется в виде нечетких множеств или интервальных величин. В результате приходим к решению дискретных экстремальных задач с интервальными или нечеткими данными.

Настоящая работа посвящена проблемам поиска «субоптимальных» решений экстремальной задачи о покрытии графа звездами для случая интервального задания весов ребер. Эта задача относится к NP-трудным [4], для которых, как известно, отсутствуют полиномиальные алгоритмы. Один из подходов, развиваемых в рамках «теории алгоритмов с оценками» [5], при построении приближенных полиномиальных алгоритмов позволяет осуществлять оценку поведения алгоритма в типичном случае, т.е. «почти всегда», что практически более ценно. Теория алгоритмов с оценками использует понятия асимптотической точности, когда алгоритм находит асимптотически оптимальное решение [6], значение целевой функции которого при увеличении размерности задачи стремится (в смысле относительной погрешности) к идеальной точке. Ниже предложен и обоснован полиномиальный (относительно размерности задачи) асимптотически точный алгоритм покрытия звездами полного графа, ребра которого взвешены интервальными весами.

© *В.А. Перепелица, Э.В. Терещенко*, 2006

Теория алгоритмов с оценками предложена в работах Э.Х. Гимади, И.И. Глебова, В.А. Перепелицы в начале 1970-х гг. [5]. Для случая минимизируемых критериев приближенные алгоритмы для экстремальных задач на графах (об остовных деревьях и цепях [7], о совершенных паросочетаниях [8], о покрытии графа цепями и звездами [9, 10], о максимальном независимом множестве вершин [11]), а также для задач ЦЛП [11, 12] в оптимизационной и многокритериальной постановках описаны в работах И.В. Сергиенко, В.А. Емеличева, Н.К. Максишко, М.К. Кравцова [13]. В данной статье проведено обоснование асимптотической точности алгоритма покрытия звездами графа с весами ребер, заданными интервально [14], для случая, когда интервальное значение целевой функции максимизируется. Доказанные в работе [9] теоремы не распространяются на рассматриваемую ниже постановку задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

$G(n,R)$ обозначим множество всех полных n-вершинных графов $G=(V,E)$, у которых каждому ребру $e\in E$ приписан вес $\overline{w}(e)$, представляющий собой интервал из множества интервалов $\overline{\Omega}=\{\overline{w}_r\}$, $\overline{w}_r=[w_r^1,w_r^2]$, $r=\overline{1,R}$, т.е. для ребра $e\in E$ его вес

$$\overline{w}_r(e)=[w_r^1(e),w_r^2(e)],\quad w_r^1(e)=w_r^1,\quad w_r^2(e)=w_r^2. \tag{1}$$

При заданном параметре $h\geq 3$ допустимым решением рассматриваемой задачи покрытия графа G звездами является всякий такой его остовной подграф $x=(V,E_x)$, $E_x\subseteq E$, в котором каждая компонента связности представляет собой h-вершинную звезду; $X=\{x\}$ — множество всех допустимых решений (МДР).

На МДР X определена максимизируемая интервальная целевая функция (ИЦФ)

$$W(x)=\sum_{e\in E_x}\overline{w}(e)\to\max, \tag{2}$$

где при вычислении интервально-значной функции $W(x)=[W(x)^1,W(x)^2]$ осуществляется классическое суммирование [14] интервалов $\overline{w}(e)=$ $=[w^1(x),w^2(x)]\in\overline{\Omega}$:

$$W(x)=\sum_{e\in E_x}[w^1(x),w^2(x)]=(W^1(x),W^2(x)), \tag{3}$$

где

$$W^k(x)=\sum_{e\in E_x}w^k(e),\ k=1,2.$$

В работе [15] обосновывается утверждение о том, что всякая интервальная задача на графах с ИЦФ (2) эквивалентна соответствующей производной от нее двухкритериальной задаче с векторной целевой функцией (ВЦФ)

$$F(x) = (F_1(x),\ F_2(x)), \tag{4}$$

состоящей из двух критериев весового вида MAXSUM

$$F_\upsilon(x) = W^\upsilon(x) = \sum_{e \in E_x} w_\upsilon(e) \to \max, \quad \upsilon = 1, 2, \tag{5}$$

где $w_1(e)$ и $w_2(e)$, $w_1(e) \le w_2(e)$ — пара весов, которой взвешены ребра $e \in E_x$ полного графа G, при условии $w^1(e) = w_1(e),\ w^2(e) = w_2(e)$, т.е. значения критериев (3) и (5) совпадают.

ВЦФ (4), (5) в МДР X определяет паретовское множество (ПМ) $\widetilde{X}$ [16]. Искомым решением рассматриваемой двухкритериальной задачи покрытия графа G h-вершинными звездами является полное множество альтернатив (ПМА) X^0.

Примечание 1. Среди методов отыскания паретовских оптимумов (ПО) $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ многокритериальных задач наиболее распространены алгоритмы линейной свертки критериев (АЛСК) [16]. АЛСК базируются на том, что при положительно определенной N-критериальной ВЦФ элемент $x \in X$, максимизирующий (минимизирующий) линейную свертку критериев (ЛСК),

$$F^\lambda(x) = \sum_{\upsilon=1}^{N} \lambda_\upsilon F_\upsilon(x), \tag{6}$$

является ПО [16]. Здесь вектор $\lambda \in \Lambda_N$, где $\Lambda_N = \{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N);\ \sum_{\upsilon=1}^{N} \lambda_\upsilon = 1,\ \lambda_\upsilon > 0,\ \upsilon = \overline{1, N}\}$.

Примечание 2. В однокритериальной классической постановке задача покрытия графа звездами является NP-трудной [4], т.е. к настоящему времени отсутствуют полиномиальные алгоритмы ее решения. В многокритериальной [7] или интервальной постановке [14] она является труднорешаемой, т. е. нижняя оценка вычислительной сложности нахождения ее ПМА растет экспоненциально от размерности $n = |V|$.

Для интервальной задачи покрытия графа звездами предлагается полиномиальный двухуровневый АЛСК нахождения допустимого решения, в определенном смысле близкого к оптимуму. На нижнем уровне каждому ребру присваивается значение линейной свертки значений границ его весового интервала, а на верхнем — находится допустимое решение с помощью предлагаемого градиентного алгоритма α_1. Для построения ЛСК вида (6) вначале выбирается конечное подмножество $\Lambda_2^0 \subset \Lambda_2$ множества $\Lambda_2 = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2);\ \sum_{\upsilon=1}^{2} \lambda_\upsilon = 1,\ \lambda_\upsilon > 0,\ \upsilon = 1, 2\}$. Далее для каждого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2^0$ строится ЛСК

$$F^\lambda(x) = \lambda_1 W^1(x) + \lambda_2 W^2(x)\ . \tag{7}$$

В силу аддитивной природы критериев (5) ЛСК (7) представляем как целевую функцию (ЦФ) оптимизационной задачи, рещаемой на верхнем уровне

$$F^{\lambda}(x) = \sum_{\upsilon=1}^{2} \lambda_{\upsilon} \sum_{e \in E_x} w^{\upsilon}(e) \to \max . \tag{8}$$

Из примечания 1 следует, что решение, оптимальное по ЦФ (8), является парето-оптимальным по ИЦФ (2), (3) или ВЦФ (4), (5). В результате объединения найденных решений по всевозможным вариантам $\lambda \in \Lambda_2^0$, $\Lambda_2^0 \subset \Lambda_2$ получаем некоторое подмножество паретовского множества $\widetilde{X} = \widetilde{X}(G)$. Из этого подмножества выделяется некоторое подмножество искомого ПМА $X^0 = X^0(G)$. Последнее подмножество можно рассматривать как аппроксимацию искомого ПМА X^0.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Описание алгоритма верхнего уровня α₁ для фиксированного вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_2^0$. Алгоритм α_1 использует процедуру координатного подъема, на вход которого поступают линейные свертки (ЛС) концов интервальных весов $\overline{w}(e) = [w^1(e), w^2(e)] \in \overline{\Omega}$ ребер полного графа $G = (V, E)$

$$w(\lambda, e) = \lambda_1 w^1(e) + \lambda_2 w^2(e), \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 . \tag{9}$$

G^{λ} обозначим данный граф G, в котором интервальные веса заменены на их свертки вида (9).

Работа алгоритма α_1 состоит из двух этапов α_1^1 и α_1^2. Пусть $\frac{n}{h} = \left[\frac{n}{h}\right] = \mu$. На этапе α_1^1 1-взвешенный граф $G^{\lambda} = (V, E)$ разбивается произвольным образом на подграфы $G_i = (V_i, E_i)$ с равномощными множествами вершин $|V_i| = \mu,\ i = \overline{1, h}$. Множество $V_h = \{v_1^h, v_2^h, ..., v_{\mu}^h\}$ рассматривается как множество центров звезд.

Этап α_1^2 состоит из $h-1$ подэтапов $\alpha_1^{2,i}$, $i = \overline{1, h-1}$. Входом подэтапа $\alpha_1^{2,i}$ является двудольный граф $G_i = (V_h, V_i, E_i)$, определяемый подмножеством ребер $E_i \subseteq E$, состоящим из всех таких ребер $e = (v^h, v^i) \in E$, что $v^h \in V_h$, а $v^i \in V_i$. Каждый из подэтапов $\alpha_1^{2,i}$, $i = \overline{1, h-1}$ состоит из шагов $s = \overline{1, \mu}$. Через $e_s = (v_s^h, v_{k_s}^i)$, $v_s^h \in V_h$, $v_{k_s}^i \in V_i$ обозначим ребро, выделенное на шаге s; E_i^s — множество ребер, выделенное на первых s шагах; V_i^s — подмножество вершин $v_k^i \in V_i$, каждая из которых инцидентна некоторому ребру $e \in E_i^s$. Если $s < \mu$, то на шаге $s+1$ выделяется такое ребро

$e_{s+1}=(v_{s+1}^h,v_{k_{s+1}}^i)\in E_i$, $v_{k_{s+1}}^i\in V_i$, которое инцидентно вершине $v_{s+1}^h\in V_h$, и при этом его ЛС $w(\lambda,e_{s+1})$ имеет максимальное значение среди таких ребер $e=(v_{s+1}^h,v_k^i)\in E_i$, каждое из которых не пересекается с каким-либо ребром $e\in E_i^s$.

$$w(\lambda,(v_{s+1}^h,v_{k_{s+1}}^i))=\max_{v_k^i\in V_i^s} w(\lambda,(v_{s+1}^h,v_k^i)), \qquad (10)$$

где $V_i^s=V_i\setminus\{v_{k_1}^i,v_{k_2}^i,...,v_{k_s}^i\}$.

Далее ребро $e_{s+1}=(v_{s+1}^h,v_{k_{s+1}}^i)$ окрашивается, после чего осуществляется реализация следующего шага. После шага $s=\mu$ подэтап $\alpha_1^{2,i}$ завершает свою работу, и следует переход к подэтапу $\alpha_1^{2,i+1}$, $i\le h-1$. После подэтапа $\alpha_1^{2,h-1}$, а вместе с ним и этапа α_1^2, в каждом из двудольных графов $G_i=(V_h,V_i,E_i)$, $i=\overline{1,h-1}$ выделяем множество E_i^{μ} всех окрашенных ребер $e\in E_i$, составляющих совершенное паросочетание в G_i. Далее в данном графе $\mathrm{G}^{\lambda}=(\mathrm{V},\mathrm{E})$ выделяем h-дольный остовной подграф $G_{\alpha_1}^{\lambda}=$ $=(V_1,V_2,...,V_{h-1},V_h,E^{\lambda})$, где $E^{\lambda}=\bigcup_{i=1}^{h-1}E_i^{\mu}$. Так как алгоритм α_1 применен к полному графу, то окрашенные ребра, инцидентные вершине $v_s^h\in V_h$, $1\le s\le\mu$, образуют h-вершинную звезду, т.е. подграф $G_{\alpha_1}^{\lambda}$ представляет собой допустимое решение $x^{\lambda}=(V,E_{x^{\lambda}})\in X$, $E_{x^{\lambda}}=E^{\lambda}$ рассматриваемой задачи на полном 1-взвешенном графе $G=(V,E)$, $E_{x^{\lambda}}=E^{\lambda}$.

Обоснование асимптотической точности алгоритма α_1. Через G_R обозначим полный вероятностный [17] n-вершинный граф, в котором для какой-либо пары вершин $v',v''\in V$ ребру $e=(v',v'')$ с условной вероятностью p_r присваивается определенный согласно (1) интервальный вес $\overline{w}_r(e)=[w_r^1(e),w_r^2(e)]\in\overline{\Omega}$ $\sum_{r=1}^{R}p_r=1$, $r\in\{1,2,...,R\}$. Применив к G_R алгоритм нижнего уровня, каждому его ребру e согласно (9) присвоим значение ЛС. Взвешенный таким образом граф G_R обозначим G_R^{λ}.

$M^{\lambda}(n,R,\overline{\Omega})$ обозначим множество всех n-вершинных графов $G^{\lambda}=$ $=(V,E)$, у которых при фиксированном $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ каждому ребру $e\in E$ приписано значение ЛС (9). Последовательности $n=1,2,\ldots$ поставим во взаимооднозначное соответствие последовательность множеств $M^{\lambda}(n,R,\overline{\Omega})$

и последовательность чисел $\varepsilon_n \geq 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, а также последовательность вероятностных графов G_R^{λ}.

$x = (V, E_x)$ обозначим допустимое решение, полученное путем применения алгоритма α_1 к графу $G^{\lambda} \in M^{\lambda}(n, R, \overline{\Omega})$. Значение ЦФ (8) для этого решения $\sigma_x = F^{\lambda}(x) = \sum\limits_{e \in E_x} w(\lambda, e)$. Через σ_0 обозначим вес оптимального по ЦФ $F^{\lambda}(x)$ решения $x = (V, E_x)$.

Определение 1. Пусть существует последовательность ε_n, $n = 1,2,...,$ $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, для которой свойство $\sigma_x \geq (1 - \varepsilon_n)\sigma_0$ выполняется для почти всех графов $G^{\lambda} \in M^{\lambda}(n, R, \overline{\Omega})$ или выполняется с вероятностью $P(x) \geq 1 - \delta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ для графа G_R^{λ}. Тогда будем говорить, что α_1 почти всегда приводит к асимптотически точному решению. При этом удовлетворяющее этому определению допустимое решение назовем асимптотически точным [5, 6].

При фиксированном $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ по аналогии с (9) применим к элементам $\overline{w_r}(\lambda) = (w_r^1, w_r^2) \in \overline{\Omega}$ операцию преобразования их в ЛС.

$$w_r(\lambda) = \lambda_1 w_r^1 + \lambda_2 w_r^2, \quad r = \overline{1, R}. \tag{11}$$

Обозначим $Q^{\lambda} = \{w_1, w_2, \ldots, w_r, \ldots, w_R\}$ упорядоченное по возрастанию множество $\{w_r(\lambda)\}$, $r = \overline{1, R}$.

Всякий полный n-вершинный 1-взвешенный граф, ребрам e которого приписаны веса $w(e)$ из множества Q^{λ}, по определению принадлежит множеству $M^{\lambda}(n, R, \overline{\Omega})$, в дальнейшем обозначаемое $M(n, R, Q^{\lambda})$.

$G_R(\Omega^{\lambda})$ обозначим вероятностный n-вершинный полный граф. Всякому его ребру e приписывается вес ЛС $w(e) = w_r \in \Omega^{\lambda}$ с вероятностью p_r согласно распределению вероятностей

$$\{p_1, p_2, ..., p_r, ..., p_R\}, \ \ p_r > 0, \ r = \overline{1, R}, \ \sum_{r=1}^{R} p_r = 1, \ f_r = \sum_{t=1}^{r} p_t, \tag{12}$$

где f_r — интегральная функция распределения; $f_0 = 0$.

Необходимо обосновать накладываемые на множество Q^{λ} вероятностные условия, при выполнении которых алгоритм α_1 почти всегда приводит к асимптотически точному решению.

Пусть к некоторой реализации вероятностного n-вершинного графа $G_R(\Omega^{\lambda})$ применен алгоритм α_1, в результате чего получено допустимое решение $x_1 = (V, E_{x_1})$, на котором ЦФ (8) принимает значение $\sigma_1 = F^{\lambda}(x) =$

$= \sum_{e \in E_{x_1}} w(e)$. Через σ_0 обозначим нижнюю оценку значения некоторой ЦФ на оптимальном покрытии x_0 рассматриваемой реализации графа $G_R(\Omega^{\lambda})$. Пусть для величин $w_r \in \Omega$ выполняется указанное выше распределение вероятностей (12). Определим условия, при выполнении которых вероятность получения асимптотически точного решения стремится к 1.

$$P(\sigma_1 \geq (1-\varepsilon_n)\sigma_0) \geq 1-\delta_n, \tag{13}$$

где $\varepsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Согласно равенству $\mu = \frac{n}{h}$ число ребер, составляющих остовные подграфы x_0 и x_1, определяется соотношением

$$\left|E_{x_0}\right| = \left|E_{x_1}\right| = \mu(h-1) = n_0. \tag{14}$$

Далее с учетом определения величин σ_0 и $w_R = \max\limits_{1 \leq r \leq R} w_r$ согласно (14) получаем неравенство $\sigma_0 \leq n_0 w_R$, откуда для выполнения неравенства (13) достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$P(\sigma_1 \geq (1-\varepsilon_n) n_0 w_R) \geq 1-\delta_n. \tag{15}$$

Пусть $\overline{\sigma}_1$ — математическое ожидание величины σ_1; $D(\sigma_1)$ — дисперсия величины σ_1. Допустим, что мы получили нижнюю оценку $\overline{\sigma}_0$ для $\overline{\sigma}_1$: $\overline{\sigma}_1 \geq \overline{\sigma}_0$. Выберем новую величину σ^* так, что выполняется строгое неравенство $\sigma^* < \overline{\sigma}_0$ и оценим вероятность того, что величина σ_1 не превосходит σ^*. При этом установлено $P(\sigma_1 \leq \sigma^*) \leq P(|\sigma_1 - \overline{\sigma}| \geq \overline{\sigma} - \sigma^*)$. Используя неравенство Чебышева, получаем

$$P(\sigma_1 \leq \sigma^*) \leq \frac{D(\sigma_1)}{(\sigma^* - \overline{\sigma}_0)^2}. \tag{16}$$

Величину σ^* определим следующим образом:

$$\sigma^* = \overline{\sigma}_0 \left(1 - \frac{1}{\ln \varphi(n)}\right), \tag{17}$$

где $\varphi(n)$ — произвольная, сколь угодно медленно растущая функция $\varphi(n) \to \infty$ с ростом n. Тогда

$$P(\sigma_1 \leq \sigma^*) \leq \frac{D(\sigma_1)(\ln \varphi(n))^2}{(\overline{\sigma}_0)^2}. \tag{18}$$

Вычислим нижнюю оценку $\overline{\sigma}_1$. На каждом шаге первого подэтапа $\alpha_1^{2,1}$, состоящего из шагов $s = 1,2,\ldots,\mu$, выбирается ребро максимального веса l_m из множества мощностью $m = m(s) = \mu + l - s$, $1 \le s \le \mu$; $\bar{l}_m$ — математическое ожидание величины выделяемого максимума l_m.

$\sigma_1^{2,i}$ обозначим суммарный вес ребер, выделенных и окрашенных в двудольном подграфе $G_i = (V_h, V_i, E_i)$ на подэтапе $\alpha_1^{2,1}$, $1 \le i \le h-1$; $\overline{\sigma_1^{2,i}}$ — математическое ожидание величины $\sigma_1^{2,i}$.

В принятых обозначениях результатом работы шага s подэтапа $\alpha_1^{2,1}$ является выделенное на этом шаге ребро $e_s = (v_s^h, v_{k_s}^i)$, вес которого равен $w(e) \in \Omega^\lambda$.

Математическое ожидание

$$\overline{l_m} = \sum_{r=1}^{R} w_{r+1}\big(P(l_m \le w_{r+1}) - P(l_m \le w_r)\big) = w_R - \sum_{r=1}^{R-2}(w_{r+1} - w_r)P(l_m \le w_r), \tag{19}$$

где

$$P(l_m \le w_r) = f_r^{\,m}. \tag{20}$$

По определению графа $G_R(\Omega^\lambda)$ вычисляемые согласно (5) элементы l_m независимы. Отсюда с учетом соотношения $m = m(s) = \mu + l - s$ и равенств (19), (20) вычисляем математическое ожидание

$$\overline{\sigma_1^{2,1}} = \sum_{m=1}^{\mu} \overline{l_m} = \sum_{m=1}^{\mu} (w_R - \sum_{r=1}^{R-2} P(l_m \le w_r)) =$$

$$= \mu w_R - \sum_{r=1}^{R-2} \sum_{m=1}^{\mu} (w_{r+1} - w_r)(f_r)^m \ge \mu w_R - \sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r}.$$

Математическое ожидание веса покрытия x_1 представляет собой сумму математических ожиданий результатов работы подэтапов $\alpha_1^{2,i}$, $i = \overline{1, h-1}$.

$$\bar{\sigma}_1 = \sum_{i=1}^{h-1} \overline{\sigma_1^{2,i}}. \tag{21}$$

Тогда оценка для представленной выше величины $\bar{\sigma}_0$ будет иметь вид

$$\bar{\sigma}_0 = (h-1)\mu w_R - (h-1)\sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r}. \tag{22}$$

На основании (17) и (22) вычислим значение

$$\sigma^* = ((h-1)\mu w_R - (h-1)\sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r})(1 - \frac{1}{\ln \varphi}).$$

Последнее выражение для расчета σ^* можем преобразовать в терминах ЛС (9)

$$\sigma^* = \left((h-1)\mu w_R - (h-1)\sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r} \right)\left(1 - \frac{1}{\ln \varphi}\right) =$$

$$= \mu(\lambda_1 w_R{}^1 + \lambda_2 w_R{}^2)(h-1)(1-\varepsilon^*), \qquad (23)$$

где

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\mu w_R}\left(1 - \frac{1}{\ln \varphi}\right)\sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r} + \frac{1}{\ln \varphi}.$$

С учетом (13) и упорядочения элементов $w_r \in \Omega^\lambda$ для оптимального значения σ_0 справедлива верхняя оценка $\sigma_0 \le \mu w_R(h-1)$. Тогда можем сформулировать следующее

Утверждение 1. Для того чтобы имело место стремление $\dfrac{\sigma^*}{\mu w_R(h-1)} \to$ $\to 1$ при $n \to \infty$, достаточно выполнить неравенство

$$\sum_{r=1}^{R-2} \frac{\lambda_1(w_{r+1}^1 - w_r^1) + \lambda_2(w_{r+1}^2 - w_r^2)}{1 - f_r} \le \frac{\mu(\lambda_1 w_R{}^1 + \lambda_2 w_R{}^2)}{\varphi}.$$

Аналогично вычислим верхнюю оценку для дисперсии

$$D(\sigma_1) \le 2(w_R - w_1)(h-1)\sum_{r=1}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r}. \qquad (24)$$

С учетом (22), (24), (18) $\mu = \dfrac{n}{h}$ получим при $n \to \infty$.

$$P(\sigma_1 \le \sigma^*) \le \frac{2(w_R - w_1)(h-1)\ln^2 \varphi \displaystyle\sum_{r=1}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r}}{\mu^2 w_R{}^2 (h-1)^2} \le$$

$$\le \frac{2(w_R - w_1)\ln^2 \varphi \dfrac{\mu w_R}{\varphi}}{\mu^2 w_R^2 (h-1)} \le \frac{3\ln^2 \varphi}{n\varphi} \to 0.$$

Теорема 1. Если распределение вероятностей (12) для весов ребер графа $G_R(\Omega^\lambda)$ удовлетворяет неравенству $\displaystyle\sum_{r=1}^{R-2} \frac{\lambda_1(w_{r+1}^1 - w_r^1) + \lambda_2(w_{r+1}^2 - w_r^2)}{1 - f_r} \le$ $\le \dfrac{\mu(\lambda_1 w_R{}^1 + \lambda_2 w_R{}^2)}{\varphi}$, то с вероятностью $P \ge 1 - \delta_n$, $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$ решение x_1, полученное с помощью алгоритма α_1, является асимптотически точным. Вычислительная сложность этого алгоритма $\tau(\alpha_1) \le O(n^2)$.

Последнее утверждение теоремы 1 очевидно, так как, согласно определению, каждое ребро данного графа алгоритм α_1 просматривает не более одного раза, в силу чего $\tau(\alpha_1) \le O(|E|)$, где $|E| \le O(n^2)$.

СРАВНЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ

В целях сравнения полученных в настоящей работе результатов с известными ранее [5, 6, 10] рассмотрим частный случай расположения интервалов $\overline{w}_r(e) \in \Omega$ на числовой оси. Пусть интервалы $\overline{w}_r = [w_r^1, w_r^2]$, $r = \overline{1, R}$ имеют длину, равную 2. Центры интервалов — это возрастающая последовательность целых чисел с шагом 1. Границы интервалов — целые числа. Распределение вероятностей — равновероятное, т.е. $p_r = \dfrac{1}{R}$, $r = \overline{1, R}$. Значит, справедливо следующее

Утверждение 2. Для почти всех графов $G \in M(n, R, \Omega)$ решение x_1 является асимптотически точным, если выполняется неравенство $R \ln R \le \le \dfrac{n(\lambda_1 w_R^{\,1} + \lambda_2 w_R^{\,2})}{h\varphi}$.

Доказательство. Действительно, пусть $M^0(n, R, \Omega^\lambda)$ — множество всех графов $G \in M(n, R, \Omega)$, для каждого из которых в контексте определения 1 справедливо неравенство $\sigma_1 \ge (1 - \varepsilon_n)\sigma^0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Таким образом, в случае равномерного распределения вероятность P получения асимптотически точного решения x_1 равна $P = \dfrac{\left|M^0(n, R, \Omega^\lambda)\right|}{\left|M(n, R, \Omega)\right|}$. Поэтому достаточно показать, что при выполнении условий этого утверждения для равномерного распределения имеют место равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon^* = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(\sigma_1 \le \sigma^*) = 0$, где величины $\varepsilon^* = \varepsilon^*(n)$, $\sigma^* = \sigma^*(n)$ определяются выражениями (18), (23). Из них вытекает следующее обоснование асимптотической точности решения x_1, получаемого на выходе алгоритма α_1:

$$\varepsilon^* = \frac{1}{\mu w_R}\left(1 - \frac{1}{\ln\varphi}\right)\sum_{r}^{R-2} \frac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r} + \frac{1}{\ln\varphi} =$$

$$= \frac{h}{n\, w_R}\left(1 - \frac{1}{\ln\varphi}\right)\sum_{r=1}^{R-2} \frac{R}{R - r} + \frac{1}{\ln\varphi} \le$$

$$\le \left(1 - \frac{1}{\ln\varphi}\right)\frac{R h}{n(\lambda_1 w_R^{\,1} + \lambda_2 w_R^{\,2})}\left(\int\limits_{r=1}^{R-2} \frac{1}{R - r}\right) + \frac{1}{\ln\varphi} \le$$

$$\le \left(1 - \frac{1}{\ln\varphi}\right)\frac{R h \ln R}{n(\lambda_1 w_R^{\,1} + \lambda_2 w_R^{\,2})} + \frac{1}{\ln\varphi} \to 0,$$

$$P(\sigma_1 \le \sigma^*) \le \frac{2(w_R - w_1)(h-1)\ln^2\varphi \sum\limits_{r=1}^{R-2} \dfrac{w_{r+1} - w_r}{1 - f_r}}{\mu^2 w_R^{\,2}(h-1)^2} \le$$

$$\le \frac{2(w_R - w_1)\ln^2\varphi \sum_{r=1}^{R-2} \frac{R}{R-r}}{\mu^2 {w_R}^2 (h-1)} \le$$

$$\le \frac{3}{n\varphi}\ln^2\varphi \to 0 \text{ при } n\to\infty \text{ и } R\ln R \le \frac{n(\lambda_1 {w_R}^1 + \lambda_2 {w_R}^2)}{h\varphi} = \frac{n w_R}{h\varphi},$$

$$\ln R \le \frac{n}{h\varphi}. \tag{25}$$

Утверждение 2 доказано.

Среди известных результатов о достаточных условиях асмптотической точности градиентных алгоритмов можно привести следующий [5, 6].

Если множество $\Omega = \{1,2,...,R\}$ и $R \le \dfrac{h}{\varphi + \ln n}$, то для почти всех графов $G \in M(n, R, \Omega)$ алгоритм градиентного типа находит асимптотически точное решение задачи коммивояжера с минимизируемой ЦФ. Отметим, что при таком определении Ω достаточное условие утверждения 2 принимает вид (25). Таким образом, область достаточных условий асимтотической точности в случае максимизируемой ЦФ экспоненциально превосходит область достаточных условий асимптотической точности минимизируемых критериев.

В работе [10] для максимизируемой ЦФ получены достаточные условия асимптотической точности алгоритма координатного подъема для задачи о цепях в виде $\ln R \le \dfrac{n}{\varphi} - 1$. Отсюда следует, что представленные в утверждении 2 достаточные условия асимптотической точности градиентного алгоритма для задачи с интервальными данными фактически совпадают с достаточными условиями асимптотической точности алгоритма для задачи с детерминированными данными в случае, когда параметр h является константой или ограниченной растущей функцией от n.

ВЫВОДЫ

Полученные результаты относятся к классу задач дискретного программирования в условиях неопределенности данных. Исследуемая авторами проблема оценки эффективности градиентных алгоритмов для экстремальных задач на интервально взвешенном графе, по-видимому, ранее не рассматривалась. Теорема 1 устанавливает принципиальную возможность обоснования асимптотической точности алгоритмов градиентного подъема (спуска) для дискретных задач с интервальными данными. Представляет интерес исследование других задач дискретной оптимизации с интервальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максишко Н.К., Перепелица В.А., Заховалко Т.В.* Теоретико-графовая эколого-экономическая модель задачи землепользования // Вісн. Східноукр. нац. ун-ту ім. В. Даля. — 2002. — № 2 (48), — С. 92–100.
2. *Перепелица В.А., Терещенко Э.В.* Теоретико-графовая модель сегментации рынка // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Зб. наук. пр. — Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. — С. 153–159.
3. *Максишко Н.К., Перепелица В.А.* Моделирование управления риском на базе прогнозной модели // Экономическая кибернетика. — 2004. — № 1–2 (25–26). — С. 85–89.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
5. *Гимади Э.Х., Глебов И.И., Перепелица В.А.* Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1975. — Вып. 31. — С. 35–42.
6. *Перепелица В.А.* Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах//Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1973. — Вып. 26. — С. 291–314.
7. *Емеличев В.А., Перепелица В.А.* Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. — 1994. — Вып. 1,6. — С. 3–33.
8. *Сергиенко И.В., Перепелица В.А.* К проблеме нахождения множеств альтернатив в дискретных многокритериальных задачах // Кибернетика. — 1987. — № 5. — С. 85–93.
9. *Емеличев В.А., Перепелица В.А., Шунгаров Х.Д.* Асимптотический подход к многокритериальной задаче покрытия графа звездами// ДАН БССР. — 1986. — **XXXI**, № 5. — С. 430–433.
10. *Максишко Н.К.* Анализ эффективности алгоритма координатного подъема для задачи о цепях // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн.науки. — 1990. — № 7. — С. 77–80.
11. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. – Киев: Наук. думка, 2003. — 260 с.
12. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1988. — 472 с.
13. *Кравцов М.К., Дичковская С.А.* Асимптотический подход к решению многокритериальной трехиндексной планарной проблемы выбора // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 3. — С. 24–29.
14. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 356 с.
15. *Perepelitsa V.A., Kozina G.L.* Interval Discrete Models and Multiobjectivity. Complexity Estimates // Interval Computations. — 1993. — № 1. — P. 51–59.
16. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
17. *Коршунов А.Д.* Основные свойства случайных графов с большим числом вершин и ребер // Успехи матем. наук. — 1985. — **40**, № 1(241). — С. 123–164.

Поступила 12.07.2005