УДК 517.9
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.2.08

НАБЛИЖЕНЕ МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ПІД ЧАС НЕЛІНІЙНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

О.А. КАПУСТЯН, О.Г. НАКОНЕЧНИЙ

Анотація. Розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціонала від розв'язку параболічної задачі зі швидкоколивними коефіцієнтами. Вимірюється не сама величина, яка описує досліджуване явище, а спостерігається деяке значення від розв'язку з оператором, що визначає спосіб вимірювання. Проблема ускладняються не лише через швидкоколивні коефіцієнти та невідомі функції, які входять до рівняння та початкових умов, а і через те, що спостереження є нелінійним (має оператор типу суперпозиції). За значення малого параметра $\varepsilon > 0$ існування розв'язку вихідної задачі встановлюється за допомогою традиційного мінімаксного підходу. Перехід до задачі з усередненими параметрами дозволяє звільнитися від нелінійності у спостереженні. Основним результатом роботи є доведення того, що мінімаксна оцінка задачі з усередненими коефіцієнтами є наближеною мінімаксною оцінкою вихідної задачі.

Ключові слова: мінімаксне оцінювання, параболічна задача, швидкоколивні коефіцієнти, усереднена задача, невизначеність, наближена оцінка.

ВСТУП

У теорії керування значне місце посідають *проблеми побудови конструктивних методів моделювання, аналізу та оптимізації систем з неповними даними* як для детермінованих, так і стохастичних систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями або рівняннями з частинними похідними. Основи такої теорії [1–4] започатковано в 70–80-ті роки минулого століття. Теоретичні результати у цьому напрямі стали основою для розроблення ефективних алгоритмів розв'язування задач оцінювання, прогнозування, оптимізації, дослідження стійкості та аналізу систем, що функціонують в умовах невизначеності та неповноти даних. На основі таких теоретичних результатів упроваджено інформаційно-математичні технології у різних предметних галузях, зокрема літально-космічного та гідроакустичного напрямів, оптимального проектування сучасних маніпуляційних роботів, соціально-економічних та інтелектуальних систем.

Незважаючи на актуальність, задача мінімаксного оцінювання для нескінченновимірних систем є недостатньо дослідженою. Принципові труднощі виникають при узагальненні задач оцінювання на випадок рівнянь з частинними похідними. Із цією метою побудовано теорію мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків рівнянь [5–6]. Методами мінімаксної теорії оцінювання розв'язано ряд задач прогнозування розв'язків рівнянь параболічного типу зі швидкоколивними коефіцієнтами за даними вимірювань, зокрема [7]. Спеціальні обмеження кореляційних функцій випадкових процесів, що входять до правих частин та до похибок вимірювань, дозволили отримати параболічні рівняння для мінімаксних прогнозних оцінок.

У працях [8–10] запропоновано й обґрунтовано процедуру побудови наближеного оптимального керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) для широких класів розподілених процесів у мікронеоднорідних середовищах, які досліджувалися раніше у праці [11]. У загальному випадку знайти точну формулу оптимального синтезу для таких задач неможливо. Проте перехід до усереднених параметрів значно спрощує структуру задачі.

У роботі розглядається задача мінімаксного оцінювання функціонала від розв'язку параболічної задачі зі швидкоколивними коефіцієнтами. Вимірюється не сама величина, яка описує досліджуване явище, а спостерігається деяке значення від розв'язку з оператором, що визначає спосіб вимірювання. Проблема ускладняється не лише через швидкоколивні коефіцієнти, а і через те, що спостереження має оператор типу суперпозиції. Тому виправданим є перехід до задачі з усередненими параметрами. Основним результатом роботи є доведення того, що мінімаксна оцінка задачі з усередненими коефіцієнтами є наближеною мінімаксною оцінкою вихідної задачі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У циліндрі $Q_T = (0,T)\times\Omega$, де $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ — обмежена область, розглядається задача

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} = A^\varepsilon y^\varepsilon + f(t,x), \\ y^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ y^\varepsilon|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon = \operatorname{div}(a^\varepsilon(x)\nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, $a\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ — задана матриця.

Спостерігається функція

$$\nu^\varepsilon(x) = \int_0^T C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x))\cdot \mathrm{y}^\varepsilon(t,x)dt + g(x), \tag{2}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon(t,x,\xi):(0,\mathrm{T})\times\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — задана вимірна функція. Функції $f\in L^2(Q_T)$ і $y_0\in L^2(\Omega)$ із системи (1), а також функція $g\in L^2(\Omega)$ зі спостереження (2) невідомі, проте відомо, що вони належать опуклій замкненій множині G з простору $L^2(\Omega)\times L^2(Q_T)\times L^2(\Omega)$:

$$\{y_0, f, g\} \in G = \{\alpha\|y_0\|^2 + \beta\|f\|^2_{Q_T} + \gamma\|g\|^2 \le 1\}. \tag{3}$$

Тут і надалі $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ — норма і скалярний добуток у $L^2(\Omega)$; $\|\cdot\|_{Q_T}$, $(\cdot,\cdot)_{Q_T}$ — норма і скалярний добуток у $L^2(Q_T)$.

Класична постановка задачі мінімаксного оцінювання [1] полягає в тому, щоб оцінити функціонал

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t,x) y^\varepsilon(t,x)\,dt\,dx, \tag{4}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ — задана функція; y^ε — розв'язок задачі (1), у класі функціоналів від спостереження

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) u(x)\,dx,\ u \in L^2(\Omega), \tag{5}$$

де функція $\hat{u}^\varepsilon$ є розв'язком задачі

$$\sup_{\{y_0, f, g\}\in G} \left(l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) \right)^2 \to \inf. \tag{6}$$

При цьому значення (6)

$$\sigma_\varepsilon := \inf_u J^\varepsilon(u), \tag{7}$$

де

$$J^\varepsilon(u) = \sup_{\{y_0, f, g\}\in G} \left(l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) \right)^2, \tag{8}$$

називається похибкою мінімаксного оцінювання.

Нелінійність C^ε і наявність швидкоколивних коефіцієнтів у A^ε, C^ε змушують шукати наближений розв'язок задачі (1) – (6), використовуючи теорію усереднення [11], [7]. А саме, нехай a^0 — усереднена матриця для $a^\varepsilon(x)$, $A^0 = div(a^0 \nabla)$, $C^0 = C^0(t,x)$ — задана функція з простору $L^\infty(Q_T)$, яка не залежить від фазової змінної y і є усередненою у певному сенсі функцією для $C^\varepsilon(t,x,\xi)$.

Тоді [1] за фіксованого $u \in L^2(\Omega)$ розв'язок задачі (8), якщо $\varepsilon = 0$,

$$\begin{cases} \left(l(y) - \hat{\hat{l}}(y) \right)^2 \to \sup, \\ \{y_0, f, g\} \in G \end{cases} \tag{9}$$

має вигляд

$$y_0 = -\frac{\lambda}{\alpha} z(0),\ \ f = -\frac{\lambda}{\beta} z,\ \ g = -\frac{\lambda}{\gamma} u, \tag{10}$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|z\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1},$$

$$\hat{\hat{l}}(y)=\int_\Omega \nu^0(x)u(x)dx,\ u\in L^2(\Omega)\,, \tag{11}$$

спостереження

$$\nu^0(\mathrm{x})=\int_0^T C^0(t,x)\cdot \mathrm{y}\ \ (t,x)dt+g(x),$$

а z є розв'язком задачі

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t}=A^0 z-l+C^0 u, \\ \mathrm{z}\,|_{\partial\Omega}=0, \\ \mathrm{z}\,|_{t=T}=0. \end{cases} \tag{12}$$

Для значення задачі (9) маємо

$$J^0(u)=\sup_{\{y_0,f,g\}\in G}\left(l(y)-\hat{\hat{l}}(y)\right)^2=\frac{\|z(0)\|^2}{\alpha}+\frac{\|z\|_{Q_T}^2}{\beta}+\frac{\|u\|^2}{\gamma}\ . \tag{13}$$

Тоді задача

$$\sigma_0=\inf_u J^0(u) \tag{14}$$

має єдиний розв'язок $\hat{u}^0$, який характеризується такою системою [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}=A^0 p-\dfrac{1}{\beta}\mathrm{z}, \\ \mathrm{p}\,|_{\partial\Omega}=0, \\ \mathrm{p}\,|_{t=0}=\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{z}(0), \end{cases} \tag{15}$$

$$\hat{u}^0=\gamma\int_0^T C^0(t,x)p(t,x)dt\ , \tag{16}$$

де z є розв'язком задачі (12).

Основна питання, яке досліджується в роботі, — чи буде оцінка

$$\hat{l}(y^\varepsilon)=\int_\Omega \nu^\varepsilon(x)\hat{u}^0(x)dx$$

слугувати наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (1)–(6) за достатньо малих $\varepsilon>0$.

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (1) – (6)

Нехай $a(x)$ — симетрична, періодична матриця така, що $\exists\nu_1>0,\ \nu_2>0$ $\forall x\in\mathbf{R}^n\ \ \forall\eta\in\mathbf{R}^n$:

$$\nu_1 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\eta_i\eta_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 , \qquad (17)$$

$C^{\varepsilon} : (0,T)\times\Omega\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ — функція Каратеодорі така, що $\forall\xi\in\mathbf{R}$, $\forall\varepsilon\in(0,1)$ для майже всіх (м. в.) $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$:

$$\left|C^{\varepsilon}(t,x,\xi)\right| \le C_1(t,x), \qquad (18)$$

де $C_1 \in L^{\infty}(Q_T)$ — задана невід'ємна функція.

Теорема 1. За умов (17), (18) задача (1) – (6) має розв'язок, тобто існує така функція $\hat{u}^{\varepsilon}$, на якій досягається рівність (7).

Доведення. Для фіксованих u, y_0, f, g маємо

$$l(y^{\varepsilon}) - \hat{\hat{l}}(y^{\varepsilon}) = -(g,u) - (z^{\varepsilon}(0), y_0) - (z^{\varepsilon}, f)_{Q_T} ,$$

де z^{ε} — розв'язок задачі

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z^{\varepsilon}}{\partial t} = A^{\varepsilon}z^{\varepsilon} - l + C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon}(t,x))u, \\ z^{\varepsilon}\,|_{\partial\Omega} = 0, \\ z^{\varepsilon}\,|_{t=T} = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Оскільки функції $u\in L^2(\Omega)$ і $C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon})\in L^{\infty}(Q_T)$, то задача (19) має (слабкий) розв'язок z^{ε}.

За фіксованого $u\in L^2(\Omega)$ задача максимізації (8) має вигляд

$$\begin{cases} ((z^{\varepsilon}(0), y_0) + (z^{\varepsilon}, f)_{Q_T} + (g,u))^2 \to \sup, \\ \alpha\|y_0\|^2 + \beta\|f\|_{Q_T}^2 + \gamma\|g\|^2 \le 1. \end{cases} \qquad (20)$$

Оскільки $C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon})$ (а отже, і z^{ε}) залежить від $\{y_0, f\}$, то формули (10)–(13), (15), (16) втрачають сенс.

Таким чином, функціонал $u \mapsto J^{\varepsilon}(u)$ є опуклим, напівнеперервним знизу, і для того, щоб існувала $\hat{u}^{\varepsilon}$ така, що

$$\sigma_{\varepsilon} = \inf_{u} J^{\varepsilon}(u) = J^{\varepsilon}(\hat{u}^{\varepsilon}),$$

згідно з теоремою Вейєрштрасса [3] достатньо довести, що $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J^{\varepsilon}(u) = \infty$.

Для цього зафіксуємо $u\in L^2(\Omega)$ і набір $\{y_0, f, g\}\in G$. Їм відповідають розв'язок $y^{\varepsilon}(t,x)$ задачі (1) і розв'язок $z^{\varepsilon}(t,x)$ задачі (19) з правою частиною $C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon}(t,x))\cdot u(x)$. Розглянемо задачу (1) – (6) із фіксованою функцією $C^{\varepsilon}(t,x) := C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon}(t,x))$. Згідно з міркуваннями, наведеними під час аналізу усередненої задачі (9) – (16), розв'язок задачі (20) має вигляд

$$\bar{y}_0^{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{\alpha} z^{\varepsilon}(0), \;\; \bar{f}^{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{\beta} z^{\varepsilon}, \;\; \bar{g}^{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{\gamma} u,$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z^{\varepsilon}(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|z^{\varepsilon}\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1}.$$

Розглянемо відображення $\Psi : G \to G$, $\Psi(y_0, f, g) = \{\bar{y}_0^{\varepsilon}, \bar{f}^{\varepsilon}, \bar{g}^{\varepsilon}\}$.

Нехай

$$\{y_0^k, f^k, g^k\} \to \{y_0, f, g\} \in G \text{ слабко в } L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega).$$

Звідси для розв'язку y_k^{ε} задачі (1) з умовами f^k, y_0^k згідно з працею [12] маємо

$$y_k^{\varepsilon} \to y^{\varepsilon} \text{ в } L^2(\mathrm{Q}_T),$$

де $y^{\varepsilon} = y^{\varepsilon}(t,x)$ — розв'язок задачі (1) з умовами f, y_0.

Тоді з умови (18) і теореми Лебега отримаємо

$$C^{\varepsilon}(t,x,y_k^{\varepsilon}(t,x)) \to C^{\varepsilon}(t,x,y^{\varepsilon}(t,x)) \text{ у } L^2(Q_T). \tag{21}$$

Отже, для z_k^{ε} — розв'язку задачі (19) з y_k^{ε} згідно з працею [12] маємо

$$z_k^{\varepsilon} \to z^{\varepsilon} \text{ в } C([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{22}$$

де $z^{\varepsilon} = z^{\varepsilon}(t,x)$ — розв'язок задачі (19) з y^{ε}.

Зі збіжностей (21), (22) випливає, що Ψ — неперервне відображення і $\Psi(G)$ — компакт. Отже, за теоремою Шаудера Ψ має нерухому точку, тобто $\exists \{\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}\} \in G$:

$$\{\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}\} = \Psi(\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}).$$

Нехай $\hat{y}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (1), який відповідає $\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}$, $\hat{z}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (19), який відповідає $\hat{y}^{\varepsilon}$. Тоді на підставі (13)

$$\frac{\|\hat{z}^{\varepsilon}(0)\|^2}{\alpha} + \frac{\|\hat{z}^{\varepsilon}\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \le J^{\varepsilon}(u). \tag{23}$$

Отже, $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J^{\varepsilon}(u) = \infty$ і теорему доведено.

НАБЛИЖЕНА МІНІМАКСНА ОЦІНКА ДЛЯ ЗАДАЧІ (1) – (6)

Нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^{\varepsilon}(x)$ [11], $C^0 \in L^{\infty}(Q_T)$ така, що

$$\forall r > 0 \;\; C^{\varepsilon}(t,x,\xi) \to \mathrm{C}^0(t,x), \;\; \varepsilon \to 0 \text{ у } L^2(Q_T) \text{ рівномірно по } |\xi| \le r. \tag{24}$$

Уведемо функціонал

$$\hat{l}(y^{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \nu^{\varepsilon}(x)\hat{u}^{0}(x)dx, \tag{25}$$

де $\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ визначається з усередненої задачі (9) – (16), і величину

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon} = J^{\varepsilon}(\hat{u}^0) = \sup_{\{y_0, f, g\}\in G} ((l, y^{\varepsilon})_{Q_T} - (\nu^{\varepsilon}, \hat{u}^0))^2, \qquad 26)$$

де y^{ε} — розв'язок задачі (1), спостереження ν^{ε} має вигляд (2).

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 2. Оцінка (25) є наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (1) – (6), а похибки (7) і (26) близькими за достатньо малих $\varepsilon > 0$, тобто $\forall \eta > 0 \;\; \exists \varepsilon_0 > 0 \;\; \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$|\sigma_{\varepsilon} - \hat{\sigma}_{\varepsilon}| < \eta .$$

Доведення. За теоремою 1

$$\sigma_{\varepsilon} = \inf_{u} J^{\varepsilon}(u) = J^{\varepsilon}(\hat{u}^{\varepsilon}) .$$

Тоді

$$J^{\varepsilon}(\hat{u}^{\varepsilon}) \le J^{\varepsilon}(0) = \sup_{\{y_0, f, g\}\in G} (l, y^{\varepsilon})^2_{Q_T} , \tag{27}$$

де y^{ε} — розв'язок задачі (1). Для $\forall \{y_0, f, g\} \in G$ через умову (16) для м. в. t виконується нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 + \nu_1 \left\|\nabla y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 \le \left\|f(t)\right\| \cdot \left\|y^{\varepsilon}(t)\right\| .$$

Звідси з нерівності Пуанкаре виводимо, що

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \sup_{\{y_0, f, g\}\in G} \left\|y^{\varepsilon}\right\|_{Q_T} \le C , \tag{28}$$

де константа $C > 0$ не залежить від ε .

З нерівностей (27), (28) і (23) виводимо, що $\{\hat{u}^{\varepsilon}\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ обмежена в $L^2(\Omega)$, отже, за підпослідовністю для деякої функції $v \in L^2(\Omega)$

$$\hat{u}^{\varepsilon} \to v \text{ слабко в } L^2(\Omega) , \;\; \varepsilon \to 0 .$$

Доведемо, що $v = \hat{u}^0$, де $\hat{u}^0$ — функція, на якій оцінка $\hat{\hat{l}}(y)$ вигляду (11) є мінімаксною оцінкою усередненої задачі.

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, $\hat{u}^{\varepsilon_k} := \hat{u}^k$. Тоді з огляду на нерівність (23)

$$\sigma_{\varepsilon_k} = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \ge \frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha} + \frac{\left\|\hat{z}^k\right\|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma} ,$$

де трійка $\{\hat{y}_0^k, \hat{f}^k, \hat{g}^k\} \in G$ є нерухомою точкою відображення Ψ_k з теореми 1, збудованого за функцією $\hat{u}^k$.

Тоді за підпослідовністю

$$\{\hat{y}_0^k, \hat{f}^k, \hat{g}^k\} \to \{\hat{y}_0, \hat{f}, \hat{g}\} \text{ слабко в } L^2(\Omega)\times L^2(Q_T)\times L^2(\Omega),$$

а $\hat{z}^k$ є розв'язком задачі (19) з $\hat{y}^k$ і $\hat{u}^k$, $\hat{y}^k$ — розв'язок задачі (1), якщо $\varepsilon = \varepsilon_k$ з умовами $\hat{f}^k$, $\hat{y}_0^k$. Тоді із праці [4] випливає

$$\hat{y}^k \to \hat{y} \text{ в } L^2(\mathrm{Q}_T), \tag{29}$$

де $\hat{y}$ — розв'язок задачі (1) з умовами $\hat{f}$, $\hat{y}_0$ і $\varepsilon = 0$.

Доведемо, що виконується збіжність

$$C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t,x)v \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{30}$$

Зі збіжності (24) випливає, що $\forall r > 0$:

$$\alpha_k(r) := \sup_{|\xi|\le r} \int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x)\right|^2 dt\,dx \to 0,\ k\to\infty.$$

Покладемо

$$Q_T(k,r) = \{(t,x) \mid \left|\hat{y}^k(t,x)\right| \le r\}.$$

Згідно з нерівністю Чебишова і збіжністю (29) отримаємо

$$\mu\big(Q_T \setminus Q_T(k,r)\big) \le \frac{1}{r}\int_{Q_T} \left|\hat{y}^k(t,x)\right| dt\,dx \le \frac{C}{r},$$

де константа $C > 0$ не залежить від k, r.

Тоді

$$\int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x)\right|^2 dt\,dx =$$

$$= \int_{Q_T(k,r)} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x)\right|^2 dt\,dx +$$

$$+ \int_{Q_T\setminus Q_T(k,r)} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x)\right|^2 dt\,dx \le \alpha_k(r) + 2\|C_1\|^2_{L^\infty(Q_T)}\frac{C}{r}, \tag{31}$$

де функцію C_1 взято з умови (18).

Нерівність (31) означає, що

$$C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k) \to C^0(t,x) \text{ у } L^2(Q_T).$$

Тоді згідно з нерівністю Гельдера

$$\int_{Q_T} \left| C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x)\right| \left|\hat{u}^k(x)\right| dt\,dx \to 0,\ k\to\infty.$$

Отже, за підпослідовністю

$$(C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x))u^k(x) \to 0,\ k\to\infty \text{ для м. в. } (t,x).$$

Із леми Ліонса [5]

$$(C^{\varepsilon_k}(t,x,\hat{y}^k)-C^0(t,x))\hat{u}^k \to 0,\ k\to\infty \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{32}$$

Оскільки

$$C^0(t,x)(\hat{u}^k - v)\to 0,\ k\to\infty \text{ слабко в } L^2(Q_T), \tag{33}$$

то зі збіжностей (32), (33) отримуємо збіжність (30).

Тоді

$$\hat{z}^k \to \hat{z} \text{ у } C([0,T];L^2(\Omega)),$$

де $\hat{z}$ — розв'язок задачі (19) при $\varepsilon=0$ і з правою частиною $C^0(t,x)v$.

Таким чином,

$$\varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \ge \varliminf_{k\to\infty}\left(\frac{\left\|\hat{z}^k(0)\right\|^2}{\alpha}+\frac{\left\|\hat{z}^k\right\|^2_{Q_T}}{\beta}+\frac{\left\|\hat{u}^k\right\|^2}{\gamma}\right)\ge$$

$$\ge\frac{\left\|\hat{z}(0)\right\|^2}{\alpha}+\frac{\left\|\hat{z}\right\|^2_{Q_T}}{\beta}+\frac{\left\|v\right\|^2}{\gamma}=J^0(v).$$

З іншого боку, оскільки $\hat{u}^k$ така, що

$$\inf_u J^{\varepsilon_k}(u)=J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k),$$

то $\forall u\in L^2(\Omega)$:

$$J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k)\le J^{\varepsilon_k}(u)=((\bar{z}^k(0),\bar{y}_0^k)+(\bar{z}^k,\bar{f}^k)_{Q_T}+(\bar{g}^k,u))^2,$$

де $\{\bar{y}_0^k,\bar{f}^k,\bar{g}^k\}$ — розв'язок задачі (20) з функцією u; $\bar{z}^k$ — розв'язок задачі (19) при $\varepsilon=\varepsilon_k$ і з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t,x,\bar{y}^k)\cdot u$, $\bar{y}^k$ — розв'язок задачі (1) при $\varepsilon=\varepsilon_k$ з відповідними умовами $\bar{y}_0^k,\bar{f}^k$.

Аналогічно до попередніх міркувань (31) – (33), але з фіксованою функцією u, отримуємо, що

$$\{\bar{y}_0^k,\bar{f}^k,\bar{g}^k\}\to\{\bar{y}_0,\bar{f},\bar{g}\} \text{ слабко в } L^2(\Omega)\times L^2(Q_T)\times L^2(\Omega),$$

$$\bar{y}^k\to\bar{y} \text{ в } L^2(\mathrm{Q}_T),$$

$$\bar{z}^k\to\bar{z} \text{ у } C([0,T];L^2(\Omega)),$$

де $\bar{z}$ — розв'язок задачі (19) при $\varepsilon=0$ і з правою частиною $C^0(t,x)u$; $\bar{y}$ — розв'язок задачі (1) при $\varepsilon=0$ з відповідними умовами $\bar{y}_0,\bar{f}$.

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(u)=((\bar{z}(0),\bar{y}_0)+(\bar{z},\bar{f})_{Q_T}+(\bar{g},u))^2. \tag{34}$$

Покажемо, що права частина (34) — це $J^0(u)$. Дійсно, $\forall\{y_0, f, g\} \in G$:

$$J^{\varepsilon_k}(u) \geq ((z^k(0), y_0) + (z^k, \bar{f})_{Q_T} + (g, u))^2, \tag{35}$$

де z^k — розв'язок задачі (19) з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, y^k) \cdot u$, y^k — розв'язок задачі (1) з умовами y_0, f.

Аналогічно до міркувань (31) – (33) можна перейти до границі в нерівності (35) і з довільності $\{y_0, f, g\}$ отримати, що

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(u) = J^0(u). \tag{36}$$

Таким чином, $\forall u \in L^2(\Omega)$:

$$J^0(v) \leq \varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \leq J^0(u). \tag{37}$$

Із виразу (37) отримуємо, що $v = \hat{u}^0$ і

$$\sigma_\varepsilon \to \sigma_0 = J^0(\hat{u}^0), \ \varepsilon \to 0.$$

Залишилося показати, що

$$\hat{\sigma}_\varepsilon \to \sigma_0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{38}$$

Нехай $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Тоді

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon_k} = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = ((\tilde{z}_k(0), \tilde{y}_0^k) + (\tilde{z}_k, \tilde{f}^k)_{Q_T} + (\tilde{g}^k, \hat{u}^0))^2,$$

де $\tilde{z}_k$ – розв'язок задачі (19) з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, \tilde{y}_k) \cdot \hat{u}^0$, $\tilde{y}_k$ — розв'язок задачі (1) з умовами $\tilde{y}_0^k$, $\tilde{f}^k$; $\{\tilde{y}_0^k, \tilde{f}^k, \tilde{g}^k\}$ — розв'язок задачі (20) з функціями $\tilde{z}_k$, $\hat{u}^0$.

Тоді з виразу (36)

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = J^0(\hat{u}^0),$$

що і доводить (38). Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Наконечный А.Г.* Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах / А.Г. Наконечный // К.: КГУ, 1985. — 83 с.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 414 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач // Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

5. *Nakonechnyi A.G.* Minimax prediction estimation of solutions of initial-boundary-value problems for parabolic equations with discontinuous coefficients based on imperfect data / A.G. Nakonechnyi, Yu.K. Podlipenko, Yu.A. Zaitsev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2000. November 2000, Vol. 36, Issue 6. P. 845–854.
6. *Podlipenko Y.* Mixed variational approach to finding guaranteed estimates for solutions and right-hand sides of the second-order linear elliptic equations under incomplete data / Y. Podlipenko, Y. Shestopalov // Minimax Theory and its Applications. — 2016.
7. *Kapustyan E.A.* The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary value problem / E.A. Kapustyan, A.G. Nakonechnyj // Journal of Automation and Information Sciences. — 2002. — Vol. 34(5–8). — P. 52–63.
8. *Kapustyan E.A.* Optimal bounded control synthesis for a parabolic boundary-value problem with fast oscillatory coefficients / E.A. Kapustyan, A.G. Nakonechnyj // Journal of Automation and Information Sciences. — 1999. - Vol. 31, Issue 12, P. 33-44**.**
9. *Kapustyan O.V.* Approximate bounded synthesis for one weakly nonlinear boundary-value problem / O.V. Kapustyan, O.A. Kapustyan, A.V. Sukretna // Nonlinear Oscillations. — 2009. — Vol. 12, N 3. — P. 297–304.
10. *Kapustian O.A.* Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional / O.A. Kapustian, V.V. Sobchuk // Statistics, Optimization and Information Computing. — 2018. — Vol. 6, N 2. P. 233–239.
11. *Жиков В.В.* Усреднение дифференциальных операторов / В.В. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. — М.: ФизМатЛит, 1993. — 464 с.
12. *Denkiwski Z.* Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations / Z. Denkiwski, S. Mortola // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1993. —Vol. 78. — P. 365–391.

Надійшла 05.04.2019