УДК 004.852; 004.942
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.3.06

ІГРОВІ СТРАТЕГІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ. І. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

П.О. КРАВЕЦЬ

Анотація. Розроблено математичну модель стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності. Суть гри полягає у вирівнюванні чистих стратегій гравців для досягнення консенсусного або мажоритарного колективного рішення. Виконано параметризацію ігрової моделі для відокремлення автократичної, анархічної та демократичної ієрархічних структур систем прийняття рішень. Розроблено марковський рекурентний метод розв'язування стохастичної гри на основі стохастичної апроксимації умови доповняльної нежорсткості.

Ключові слова: прийняття рішень, ієрархічна система, умови невизначеності, стохастична гра, математична модель.

ВСТУП

Ієрархічна структура прийняття рішень використовується у багатьох розподілених системах, наприклад, біологічних, інформаційних, штучного інтелекту, економічних, соціальних, у військовому та державному управлінні. Популярність ієрархічної організації обумовлена необхідністю декомпозиції процесу прийняття рішень у зв'язку з інтегральною складністю таких систем — великою розмірністю, наявністю численних горизонтальних та вертикальних зв'язків між елементами, пріоритетністю у прийнятті рішень окремими підсистемами, відсутністю адекватної моделі системи, наявністю декількох синергетичних або конкурентних цілей розвитку підсистем, гетерогенністю складових елементів, неповнотою інформаційного опису об'єктів тощо [1–7].

Ієрархічні системи складаються з активних елементів, інакше — агентів [8, 9], здатних приймати автономні рішення та функціонально пов'язаних між собою за відношенням старшинства. У таких системах виникає потреба у прийнятті скоординованих колективних рішень для досягнення поставлених цілей або для виведення системи на потрібний режим функціонування.

Прийняття скоординованих колективних рішень в ієрархічних системах є актуальною науково-практичною проблемою [10–13]. Загалом її розв'язування спрямоване на оптимізацію техніко-економічних показників функціонування системи: підвищення точності та оперативності прийнятих рішень; синхронізацію керувальних впливів між підсистемами з різною інерційністю вироблення та опрацювання рішень; забезпечення стійкості рішень до впливу зовнішніх факторів; підвищення надійності роботи системи; зменшення витрат часу та ресурсів на організацію керування ієрархічною системою [10].

В ієрархічних системах рішення приймаються здебільшого в умовах цільової, функціональної, комбінаторної або стохастичної невизначеності [2, 14]. У зв'язку з цим виникає потреба у розробленні адаптивних методів прийняття рішень, здатних у процесі самонавчання хоча б частково компенсувати існуючу невизначеність та сформувати стратегії поведінки з очікуваним оптимальним результатом.

Процес ієрархічного прийняття рішень спрямований на досягнення спільної колективної мети усієї системи і окремих, можливо конкурентних, цілей її підсистем. Прийняття збалансованих колективних рішень вивчається теорією ігор [15], а в умовах невизначеності — теорією стохастичних ігор [16–19].

Об'єктом цього дослідження є процеси ігрового прийняття рішень в умовах невизначеності. Предметом дослідження є ігрова модель прийняття рішень в ієрархічно організованих системах. Метою роботи є розв'язування стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічній системі. Наукова новизна роботи полягає у розробленні математичної моделі та застосуванні адаптивного методу розв'язування стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічній системі в умовах невизначеності. Практична цінність виконаного дослідження визначається можливістю застосування отриманих результатів для побудови ефективних організаційних, інформаційних та кібернетичних систем з ієрархічною структурою.

ПРОБЛЕМА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

Функції прийняття рішень в ієрархічних системах розподілені між агентами різних рівнів. Агент середнього рівня, опрацьовуючи рішення агента вищого рівня, виробляє власне рішення і доводить його до відома агентів нижчого рівня, які перебувають у його прямому підпорядкуванні.

В ієрархічній системі наявні вертикальні (між різними рівнями підпорядкування) та горизонтальні (на одному рівні ієрархії) зв'язки між підсистемами. Дії вищих та нижчих рівнів ієрархічної структури є взаємозалежними. Рішення підсистем вищого рівня домінує над діями підсистем нижчого рівня. У межах наданих повноважень рішення окремих агентів середніх рівнів ієрархічної системи є автономними в управлінні підлеглими агентами. Як правило, агенти вищого рівня вирішують стратегічні, а підпорядковані їм агенти — тактичні завдання, що сприяє підвищенню точності та оперативності прийняття рішень [1].

Успішність колективного вироблення рішень в ієрархічних системах забезпечується координацією дій усіх учасників прийняття рішень [9–12]. Координація — це зведення дій агентів до певної відповідності для досягнення узгодженої, упорядкованої роботи всіх ланок системи прийняття рішень. У вузькому розумінні, прийнятому у цій роботі, координація полягає у вирівнюванні чистих стратегій гравців ієрархічної системи у ході проведення динамічної стохастичної гри. Тобто колективне рішення буде вважатися сформованим, якщо його обрали всі (консенсусне рішення) або більша частина учасників системи прийняття рішень (мажоритарне рішення).

Координація може бути централізованою або децентралізованою. У системах з централізованою координацією функції прийняття рішень концентруються на найвищому рівні ієрархії, а у системах з децентралізованою координацією — делегуються на нижчі рівні ієрархії. Ряд дослідників активних розподілених систем вважають, що для ефективного прийняття рішень необхідний баланс між централізованою і децентралізованою координацією, але зі зростанням структурної та функціональної складності розподіленої системи щодо оперативності, надійності та економічної ефективності розв'язування задачі доцільнішими будуть методи децентралізованої координації агентів [12, 13].

Координація необхідна для узгодження індивідуальних цілей і варіантів поведінки агентів, які забезпечують досягнення оптимальних колективних рішень. Колективні рішення є скоординованими, якщо вони задовольняють вимоги вигідності, стійкості та справедливості для всіх учасників прийняття рішень. *Вигідність* колективного рішення полягає в тому, що кожен агент покращує або не погіршує значення своєї функції корисності, а система в цілому покращує якість розв'язування загального завдання. Можливо, діючи самостійно або в інших умовах, агент досягнув би кращих для себе результатів, але система накладає обмеження на значення його виграшу на користь усіх учасників прийняття рішень. Певний компроміс між агентами забезпечує виграш колективу в цілому. *Стійкість* колективного рішення полягає в тому, що відхилення стратегії поведінки одного або групи агентів від оптимального колективного рішення не зможе підвищити значення їх функцій корисності. *Справедливість* колективного рішення полягає у тому, що кожен агент отримує свою частку виграшу, обумовлену значенням його платіжної функції.

На практиці найбільш поширені критерії рівноваги за Нешем, Слейтером, Джофріоном, Байєсом, корельованої рівноваги, оптимальності за Парето.

Методологічні засади колективного прийняття рішень в ієрархічних системах закладені в теорії керування, теорії автоматів, теорії оптимального планування, дослідження операцій, теорії активних систем [20], теорії вибору варіантів рішень [21, 22], теорії ігор [23–29], теорії мультиагентних систем [8, 9, 11], інформаційній теорії ієрархічних систем [5–7].

Основним методом досліджень ієрархічних систем є теоретико-ігрове моделювання [2, 23, 24], яке дозволяє передбачити поведінку агентів та обрати способи управління, які переводять систему в оптимальні стани згідно з обраними критеріями функціонування.

Ігри з прийняття рішень в ієрархічних системах є підкласом ігор на мережах [25], серед яких можна виокремити такі: безкоаліційні або коаліційні; некооперативні та кооперативні; антагоністичні та неантагоністичні; з нульовою сумою та довільною сумою; ігри з природою та багатьох осіб; дискретні та неперервні; одноетапні та повторювальні; нерефлексивні та рефлексивні; з повною та неповною інформованістю гравців; детерміновані або стохастичні; з постійною або змінною структурою; з фіксованими (програмними) або динамічними стратегіями поведінки гравців; з наявною або відсутньою інформованістю гравців про обрані стратегії та результати ходів гри; з неперервним або дискретним часом; з обмеженим або безмежним часом; з повною або локальною залежністю платіжних функції від стратегій гравців; з інтегральною у часі або миттєвою залежністю функцій виграшів від стратегій гравців; зі скалярними або векторними (або інтервальними) платежами; з наявністю або відсутністю обмежень на дії окремих гравців чи підмножин гравців; із синхронним (одночасним) або асинхронним вибором стратегій; ігри в нормальній формі та ігри з правом першого ходу.

Теорія ігор у нормальній формі оформилась у самостійну математичну дисципліну в першій половині XX ст. після виходу фундаментальних праць Дж. фон Неймана та О. Моргенштерна. Вивчення ієрархічних ігор з правом першого ходу започатковано у працях Ю.Б. Гермейєра та його послідовників.

На відміну від гри у нормальній формі, яка характеризується одночасністю вибору дій усіма гравцями та незалежністю вибору одного гравця від вибору інших, в ієрархічних іграх виділяють центрального гравця, який робить перший хід, та гравців, які вибирають свої дії на основі відомого їм рішення центру.

Розв’язком гри є ситуація рівноваги, від якої невигідно відмовлятися ні центру, ні агентам нижчих рівнів. Колективний розв’язок ієрархічної гри з правом першого ходу описується рівновагою за Штакельбергом [23, 28], яка реалізовується, якщо агент вибирає дію, максимізуючи свій виграш за відомої йому на момент прийняття рішення дії центру, а центр, знаючи про таку поведінку агента, вибором власної дії максимізує свій виграш, вважаючи заданою реакцію агента на свої дії. Максимізуючи свій виграш, центр сподівається на доброзичливість агента, тобто на те, що агент з множини рівнозначних для нього дій вибере сприятливу для центру дію. У літературних джерелах з цієї проблеми в основному подаються результати дослідження детермінованих ієрархічних ігор в умовах повної інформації. Для таких ігор характерне використання максимального гарантованого результату як основної концепції розв’язування гри [23, 24].

У реальних умовах процес прийняття рішень в ієрархічних системах містить елементи невизначеностей, викликаних нечітко сформульованими цілями, семантичною неоднозначністю мовних повідомлень, спотвореннями передавання потоків інформації між елементами системи, комбінаторною складністю системи, внутрішньою стохастичністю, пов’язаною із незалежним вибором агентами можливих варіантів дій, неконтрольованими зовнішніми впливами. Невизначеність прийняття рішень в ієрархічній системі може бути зумовлена тим, що проблема прийняття рішень на верхньому рівні менш структурована та формалізована; підсистемі вищого рівня можуть бути не повністю відомі цілі та обмеження підсистем нижчих рівнів; керівники та підрозділи нижчих рівнів, як правило, ознайомлені тільки зі своїм функціональним завданням і не завжди знають про загальні цілі системи; можуть бути спотворення та втрата інформації у разі її передавання між рівнями ієрархії; невідповідність періодів планування рішень – періоди прийняття рішень для агентів верхнього рівня більші, ніж для агентів нижчих рівнів; невідповідність періодів імплементації рішень – керовані підсистеми є більш інерційними щодо реалізації рішень порівняно з підсистемами верхніх рівнів; наявність непередбачених, наприклад, ресурсних обмежень на процеси функціонування підсистем; зростання кількості рівнів ієрархії та кількості варіантів можливих рішень призводить до зростання ентропії ієрархічної системи; агенти верхнього рівня ієрархії мають у підпорядкуванні більші підсистеми з великою кількістю станів функціонування, перехід у які не можна спрогнозувати апріорі [1, 14, 24].

Для ігрового розв'язування задачі прийняття рішень в умовах параметричної невизначеності необхідно використати адаптивні стратегії, які компенсують невизначеність платежів їх стохастичною ідентифікацією у ході гри за рахунок самонавчання агентів [22]. Стохастичні ігри були винайдені Л. С. Шеплі на початку 50-х років XX ст. Ігрові задачі адаптивного вибору варіантів рішень започатковано у працях В. І. Варшавського, М. Л. Цетліна з теорії колективної поведінки автоматів у випадкових середовищах. Стохастичні ігри (ігри з природою, двох та багатьох осіб) у змішаних стратегіях на основі методу стохастичної апроксимації, проекції градієнта та регуляризації вивчено у працях Я.З. Ципкіна, А.В. Назіна, А.С. Позняка. Різноманітні математичні моделі стохастичних систем на основі методів стохастичної оптимізації та рекурентного оцінювання запропоновано і розвинуто у працях наукової школи академіка НАНУ В. С. Королюка.

У фахових літературних джерелах з цієї проблеми в основному досліджуються повнозв'язні стохастичні ігри [16, 22]. Ігри з локальними зв'язками між гравцями – ігри на неповнозв'язних графах, деревах, актуальні для моделювання процесів прийняття рішень в умовах невизначеності в організаційних та ергатичних (людино-машинних) системах потребують різностороннього та поглибленого вивчення.

ПОСТАНОВКА ІГРОВОЇ ЗАДАЧІ

Ідеалізовану структуру ієрархічної системи прийняття рішень можна зобразити у вигляді дерева, вузли якого позначають агентів прийняття рішень, а орієнтовані зв'язки між ними — залежність від стратегій рішень сусідніх агентів. Будемо вважати, що всі рішення вищого рівня є рекомендаційними і не обмежують свободу вибору агентів нижчого рівня. Завдяки цьому поточні рішення агентів нижчого рівня можуть відрізнятися від рішень агентів вищого рівня. Агент з найвищим рангом (корінь дерева) приймає рішення на основі власних стратегій та стратегій агентів безпосереднього нижчого рівня. Рішення агентів середнього рівня залежать від власних стратегій та стратегій агентів вищого і нижчого рівнів. Формування рішень агентами найнижчого рівня (листя дерева) визначається власними стратегіями та стратегіями агентів безпосереднього вищого рівня.

Нехай D — організована у вигляді дерева множина гравців ($|D| \geq 2$ — кількість гравців), які здійснюють незалежний вибір варіантів рішень з множини $U^i = \{u^i(1), u^i(2), ..., u^i(N_i)\}$ чистих стратегій $\forall i \in D$ у дискретні моменти часу $n = 1, 2, ...$.

Після завершення вибору варіантів рішень $u_n^i = u^i \in U^i$ усіма гравцями кожен з них отримує комплексний штраф за недотримання рекомендаційних рішень. Штраф гравця середнього рівня визначається недотриманням керівного рішення свого безпосереднього начальника та невиконанням його власного рішення підлеглими гравцями:

$$\xi_n^i(u_n^{D_i}) = |D_i|^{-1}\left(\lambda |u_n^i - u_n^k| + (1-\lambda)\sum_{j \in D_i \setminus \{k\}} |u_n^i - u_n^j|\right) + \mu_n \quad \forall i \in D, \qquad (1)$$

де $D_i \subset D$ — множина сусідніх гравців, стратегії яких визначають втрати i-го гравця; $u_n^{D_i} \in U^{D_i} = \underset{j \in D_i}{\times} U^j$ — колективна стратегія множини гравців D_i; $u_n^i \in R^1$ — числовий еквівалент варіанта рішення; k — гравець вищого рівня (керівник); i — гравець середнього рівня; j — гравець нижчого рівня; $\lambda \in [0,1]$ — ваговий коефіцієнт (для кореневого гравця $\lambda = 0$, а для гравців найнижчого рівня $\lambda = 1$); $\mu_n \sim Normal(0,d)$ — нормально-розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням та дисперсією $d \geq 0$ або значення білого гауссівського шуму, який моделює вплив завад на канали зв'язку між ігровими агентами.

Зроблено припущення, що випадкові програші $\{\xi_n^i\}$ гравців є незалежними $\forall u_n \in U$, $\forall i \in D$, $n = 1,2,...$, мають постійне математичне сподівання $E\{\xi_n^i(u^{D_i})\} = v(u^{D_i}) = \text{const}$ та обмежений другий момент $\sup_n E\{[\xi_n^i(u^{D_i})]^2\} = \sigma^2(u^{D_i}) < \infty$. Стохастичні характеристики випадкових програшів не відомі гравцям апріорі.

Середні програші гравців після n кроків гри набудуть значення:

$$\Xi_n^i(\{u_n^{D_i}\}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \xi_t^i \quad \forall i \in D. \qquad (2)$$

Метою ієрархічної системи є вироблення узгодженого колективного рішення, яке мінімізує функції середніх програшів гравців (2):

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, \Xi_n^i \to \min_{\{u_n^i\}} \forall i \in D. \qquad (3)$$

Отже, ігрова задача вибору варіантів рішень полягає у тому, що на основі спостереження поточних програшів $\{\xi_n^i\}$ у моменти часу $n = 1,2,...$ гравці повинні навчитися вибирати чисті стратегії $\{u_n^i\}$ так, щоб забезпечити виконання системи цілей (3).

Залежно від методу формування послідовностей стратегій $\{u_n^i\} \forall i \in D$ розв'язки ігрової задачі повинні задовольняти хоча б одну з умов колективної оптимальності, наприклад, Неша, Парето або іншу [27, 28].

ВИДИ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Параметр $\lambda \in [0,1]$ у виразі (1) визначає переважання одноосібного чи групового способу вироблення рішення. Залежно від цього визначимо такі різновиди ієрархічних систем прийняття рішень:

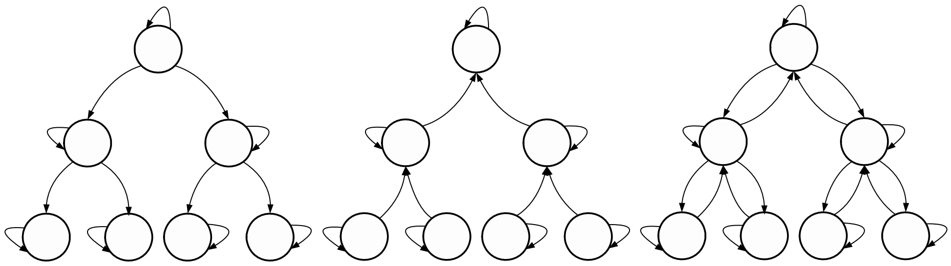
$\lambda = 1$ — автократична система;

$\lambda = 0$ — анархічна система;

$0 < \lambda < 1$ — демократична система.

Слід зазначити, що прийняті в цій роботі назви ієрархічних систем є умовними і повною мірою не відображають їх соціально-політичне або інше відоме трактування.

Приклади деревоподібних структур відповідних ієрархічних систем зображено на рисунку. Вузли мультиграфів позначають гравців, а орієнтовані дуги — вплив стратегій на формування втрат (програшів) гравців.



а *б* *в*

Структури ієрархічних систем прийняття рішень: *а* — автократичної; *б* — анархічної; *в* — демократичної

В *автократичній системі* прийняття рішень втрати гравців середнього та найнижчого рівнів визначаються лише власними стратегіями та стратегіями гравців вищого рівня (рисунок, *а*). Втрати кореневого гравця визначаються тільки власними стратегіями або додатково стратегіями сусідніх гравців (в автократичних системах з колегіальним центром).

Структура прийняття рішень в автократичній системі є вертикально-ієрархічною. Потік інформації спрямований згори вниз. Рішення приймає керівник найвищого рівня. Можливість прийняття рішень на нижчих рівнях є обмеженою. Прийняті на верхніх рівнях ієрархії рішення надходять на нижчі рівні як директиви, які не підлягають обговоренню і обов'язкові до виконання.

Системи з авторитарним управлінням ефективні у надзвичайних та кризових ситуаціях. Позитивними аспектами в організації автократичної системи є оперативність прийняття рішень, висока виконавча дисципліна та висока мобільність. Негативний аспект — низька ініціатива низових ланок.

В *анархічній системі* прийняття рішень втрати гравців найвищого та середнього рівнів визначаються стратегіями гравців нижчого рівня та власними стратегіями (рисунок, *б*). Втрати гравців найнижчого рівня визначаються лише власними стратегіями, або додатково стратегіями інших гравців найнижчого рівня (в анархічних системах з узгодженням рішень).

Ідеально анархічна організація заперечує наявність ієрархії. В анархічній спільноті в основному наявні горизонтальні зв'язки. Рішення приймається шляхом широкого обговорення завдань на найнижчому рівні. Вертикальні зв'язки можуть формуватися делегуванням мінімальних повноважень на вищий рівень для узгодження рішення між окремими самоорганізованими спільнотами. У таких анархічних системах потік інформації спрямований знизу вгору.

Процес вироблення рішення в анархічній системі може займати тривалий час. Така система може бути дієвою у разі виокремлення у ній окремих спільнот, здатних до самоорганізації та самоконтролю.

У *демократичній системі* прийняття рішень утрати гравців середнього рівня визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців як вищого рівня, так і нижчого (рисунок, *в*). Утрати кореневого гравця визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців нижчого рівня. Утрати гравців найнижчого рівня визначаються власними стратегіями та стратегіями гравців вищого рівня.

Демократична система ґрунтується на колегіальному прийнятті рішень керівниками всіх рівнів з можливим урахуванням думок підлеглих делегуванням (у разі потреби) їм частини повноважень та залученням вузьких спеціалістів для вироблення рішення. Потоки інформації спрямовані в обох напрямках — згори вниз та знизу вгору. Від вищого до нижчих рівнів спрямовано потік керівних рішень. Зустрічний потік інформації породжений делегуванням представницьких повноважень низових рівнів до вищих рівнів ієрархії.

Демократична організація системи стимулює підлеглих до прийняття самостійних рішень, але може призвести до низької виконавчої дисципліни та невисокої мобільності у прийнятті рішень в екстремальних умовах.

Виділимо такі види демократичних систем, параметризованих коефіцієнтом $\lambda \in (0,1)$, з комбінованими властивостями анархічних та автократичних систем прийняття рішень:

$0{,}5 < \lambda < 1$ — автократично-центрична демократична система (демократура, жорстка демократія);

$0 < \lambda < 0{,}5$ — анархічно-центрична демократична система (ліберальна, м’яка демократія);

$\lambda = 0{,}5$ — нейтральна демократична система (збалансована, чиста демократія).

В *автократично-центричних* системах переважають процеси прийняття рішень на вищих рівнях ієрархії. Керівник найвищого рівня приймає самостійні рішення, ураховуючи думку керівників низових підрозділів У таких системах переважає потік інформації згори вниз.

В *анархічно-центричних* системах основні процеси прийняття рішень здійснюються на нижчих рівнях ієрархії. Керівник найвищого рівня уникає прийняття самостійних рішень, перекладає прийняття рішень та відповідальність за них на керівників низових підрозділів. У таких системах переважає потік інформації знизу вгору. Часто такий стиль керівництва дезорієнтує роботу всієї системи. У ліберальній системі можуть самоорганізовуватись групи ініціативних працівників «за інтересами», рішення яких доводяться до відома керівництва.

За значенням коефіцієнта λ система *нейтральної демократії* перебуває посередині між автократичною та анархічною системами. На прийняття рішень працівниками середньої ланки чиниться збалансований вплив згори від керівника та знизу від співробітників нижчої ланки.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

Необхідні для розв'язування сформульованої ігрової задачі послідовності варіантів рішень $\{u_n^i\}$ отримаємо за допомогою динамічних векторів змішаних стратегій $p_n^i \quad \forall i \in D$, елементи яких є умовними ймовірностями вибору чистих стратегій:

$$p_n^i(j) = P\{u_n^i = u^i(j) \big| u_t^i, \xi_t^i \; (t = 1,2,...,n-1)\}, \; j = 1..N_i ,$$

де $\{u_t^i \; (t = 1, 2,..., n-1)\}$ — передісторія стратегій, вибраних гравцем з номером i; $\{\xi_t^i \; (t = 1, 2,..., n-1)\}$ — передісторія отриманих за це програшів.

Змішані стратегії $p_n^i \in S^{N_i}$ гравців набувають значень на одиничних симплексах:

$$S^{N_i} = \left\{ p \mid p \in R_+^{N_i}, \sum_{j=1}^{N_i} p(j) = 1 \right\},$$

де $R_+^{N_i}$ — простір невід'ємних дійсних чисел, що має N_i вимірів.

Поточні варіанти рішень $u_n^i \quad \forall i \in D$ будемо вибирати випадково на основі дискретного розподілу чистих стратегій гравців з імовірностями $p_n^i(u_n^i)$:

$$u_n^i = \left\{ u^i(j) \mid j = \arg\min_j \sum_{k=1}^{j} p_n^i(k) > \omega \; (j = 1..N_i) \right\}, \tag{4}$$

де $\omega \in [0,1]$ — випадкова величина з рівномірним розподілом.

Побудову методу розв'язування стохастичної гри виконаємо на основі детермінованої матричної гри з матрицями програшів $[v(u^{D_i})]$. Платіжна функція детермінованої матричної гри є полілінійною функцією середніх програшів:

$$V^i(p^{D_i}) = \sum_{u^{D_i} \in U^{D_i}} v^i(u^{D_i}) \prod_{j \in D_i ; u^j \in u^{D_i}} p^j(u^j) .$$

Відомо, що розв'язки гри за Нешем у змішаних стратегіях задовольняють умову доповняльної нежорсткості [29]:

$$\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i}) - e^{N_i} V^i(p^{D_i}) = 0 \quad \forall i \in D,$$

де $p^{D_i} \in S^{D_i} = \prod_{j \in D_i} S^{N_j}$ — задані на опуклих симплексах S^{D_i} комбіновані змішані стратегії гравців з локальних множин D_i; $\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i})$ — градієнт полілінійної функції середніх програшів.

Щоб додатково врахувати розв'язки за Нешем у чистих стратегіях, виконаємо покомпонентне зважування умови доповняльної нежорсткості елементами векторів змішаних стратегій:

$$\mathrm{diag}(p^i)(\nabla_{p^i} V^i(p^{D_i}) - e^{N_i} V^i(p^{D_i})) = 0 \quad \forall i \in D, \tag{5}$$

де $\mathrm{diag}(p^i)$ — квадратна діагональна матриця порядку N_i, побудована з елементів вектора p^i.

Пошук розв'язків ігрової задачі в умовах невизначеності будемо виконувати у класі рекурентних марковських методів [22]:

$$p^i_{n+1} = \pi^{N_i}_{n+1}\{p^i_n - \gamma_n R_n(u^i_n, p^i_n, x^i_n)\} \in S^{N_i} \quad \forall i \in D, \tag{6}$$

де $\pi^{N_i}_{n+1}$ — перетворення, яке забезпечує належність вектора p^i_{n+1} до одиничного симплексу S^{N_i}; $\gamma_n > 0$ — довжина кроку методу; $R_n() \in R^{N_i}$ — вектор руху методу.

Вектор руху ігрового методу визначимо так, щоб у середньому він задовольняв модифіковану умову доповняльної нежорсткості (5):

$$M\{R_n \mid p^i_n = p^i\} = \mathrm{diag}(p^i)[\nabla_{p^i} V^i - e^{N_i} V^i] = E\{\xi^i_n [e(u^i_n) - p^i_n] \mid p^i_n = p^i\}, \tag{7}$$

де $p^i \in S^{N_i}$; $E\{\}$ — функція математичного сподівання; $e^{N_i} = (1_j \mid j = 1..N_i)$ — вектор, всі компоненти якого дорівнюють 1; $e(u^i_n)$ — одиничний вектор-індикатор вибору чистої стратегії $u^i_n \in U^i$.

Ураховуючи вирази (6) та (7), методом стохастичної апроксимації [30] отримаємо таке рекурентне перетворення векторів змішаних стратегій у часі:

$$p^i_{n+1} = \pi^{N_i}_{\varepsilon_{n+1}}\{p^i_n - \gamma_n \xi^i_n [e(u^i_n) - p^i_n]\}, \tag{8}$$

де $\pi^{N_i}_{\varepsilon_{n+1}}$ — проектор на одиничний ε-симплекс $S^{N_i}_{\varepsilon_{n+1}} \subseteq S^{N_i}$; $\gamma_n > 0$ — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює величину кроку методу; $\varepsilon_n > 0$ — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює швидкість розширення ε-симплексу; $\xi^i_n \in R^1$ — поточний програш гравця.

Оператор проектування на одиничний ε_n-симплекс використано для покращення статистичних характеристик зібраних даних про середовище прийняття рішень, а параметр ε_n — як додатковий елемент керування збіжністю рекурентного методу. Цей оператор визначається такими умовами:

$$\left\| p^i - \pi^{N_i}_{\varepsilon}(q) \right\| \le \| p - q \| \quad \forall p \in S^{N_i}_{\varepsilon} \quad \forall q \in R^{N_i},$$

де $\pi^{N_i}_{\varepsilon}(q) \in S^{N_i}_{\varepsilon}$. Проектор $\pi^{N_i}_{\varepsilon}(q)$ переводить точку $q \in R^{N_i}$ у найближчу до неї точку ε -симплексу $S^{N_i}_{\varepsilon}$ [22].

Стохастична гра розпочинається з ненавчених векторів змішаних стратегій зі значеннями елементів $p^i_0(j) = 1/N_i$, де $j = 1..N_i$. У наступні моменти часу динаміка векторів змішаних стратегій визначається марковським рекурентним методом (8).

Збіжність змішаних стратегій (8) до оптимальних за Нешем значень (з імовірністю 1 та у середньоквадратичному) визначається з фундаментальних умов стохастичної апроксимації [22, 30], які можуть бути уточнені експериментальним дослідженням.

За умови незалежності випадкових виграшів $\{\xi_n^i\}$, незалежності вибору чистих стратегій $\{u_n^i\}$ $\forall i \in D$ та виконання умов $\gamma_n > 0$, $\gamma_{n+1} < \gamma_n$, $\sum_{n\to\infty} \gamma_n = \infty$, $\varepsilon_n \in (0, \min_{i\in D} N_i^{-1})$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ метод (8) забезпечує виконання умови доповняльної нежорсткості (5) у знакододатному середовищі $v_{\min}^i > 0$ $\forall i \in D$ з імовірністю 1, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} (|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| + \gamma_n^2) < \infty$, та у середньоквадратичному, якщо $\lim_{n\to\infty} (|\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}| \gamma_n^{-1} + \gamma_n) = 0$. Результати отримано на основі рекурентного оцінювання згори похибки виконання умови доповняльної нежорсткості, усередненої за передісторією подій на момент часу n [17].

Порядок зменшення параметрів γ_n та ε_n впливатиме на швидкість збіжності стохастичної гри. Ці параметри можуть бути обчислені так:

$$\gamma_n = \gamma n^{-\alpha}, \ \varepsilon_n = \varepsilon n^{-\beta},$$

де $\gamma > 0$; $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$; $\beta > 0$.

Стохастична гра складається з таких повторюваних кроків. У моменти часу $n = 1,2,...$ кожен гравець $i \in D$ на основі власної змішаної стратегії p_n^i вибирає чисту стратегію u_n^i (4), за що до моменту часу $n+1$ отримує поточний програш ξ_n^i (1), після чого обчислює змішану стратегію p_{n+1}^i згідно з методом (8). Динамічна перебудова змішаних стратегій на основі опрацювання поточних програшів за обмежувальної дії умов стохастичної апроксимації забезпечує адаптивний вибір чистих стратегій, який з плином часу зумовить отримання рівноважних за Нешем розв'язків.

ВИСНОВКИ

У роботі сформульовано актуальне науково-прикладне завдання координації рішень в ієрархічних системах та отримано такі результати:

1. Виконано аналіз проблеми прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності, що дозволило запропонувати стохастичні ігрові стратегії для її розв'язування.

2. Запроваджено коефіцієнт залежності платіжних функцій гравців від впливу елементів вищого та нижчого рівнів ієрархічної системи, що дало змогу класифікувати ієрархічні системи з метою вивчення балансу одноосібного та групового впливу гравців у процесі вироблення варіантів рішень.

3. Розроблено математичну модель та запропоновано метод розв'язування стохастичної гри, які забезпечують узгоджене прийняття рішень в ієрархічних системах за рахунок вирівнювання стратегій гравців на основі збирання поточної інформації та її адаптивного опрацювання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Шарапов О.Д.* Економічна кібернетика: навч. посіб. / О.Д. Шарапов, В.Д. Дербенцев, Д.Є. Семьонов. — К.: КНЕУ, 2004. — 231 с.
2. *Теорія* і практика прийняття управлінських рішень / А.С. Крупник, К.О. Линьов, Є.М. Нужний, О.М. Рудик. — К.: Видавничий дім «Простір», 2007. — 119 с.
3. *Дубовой В.М.* Моделі прийняття рішень в управлінні розподіленими динамічними системами: моногр. / В.М. Дубовой, О.О. Ковалюк. — Вінниця: УНІВЕРСУМ, 2008. — 185 с.
4. *Бідюк П.І.* Проектування комп'ютерних інформаційних систем підтримки прийняття рішень: навч. посіб. / П.І. Бідюк, Л.О. Коршевнюк. — К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2010. — 340 с.
5. *Панкратова Н.Д.* Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: навч. посіб. / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашківська. — К.: ІВЦ Вид-во «Політехніка», 2010. — 371 с.
6. *Hierarchies* in Distributed Decision Making / Christoph Schneeweiss. — Springer, 2013. — 341 p.
7. *Krupa T.* Hierarchical Decision-Making Problems / T. Krupa, T. Ostrowska // Modeling and Solutions. Foundations and Management. The Journal of Warsaw University of Thechnology. — 2016. — Vol. 8, Issue 1. — P. 311–324. — DOI 10:1515/fman-2016-0024.
8. *Evolutionary* Multi-Agent Systems: From Inspirations to Applications / A. Byrski, M. Kisiel-Dorohinicki. — Springer. — 2017. — 224 p.
9. *Zheng Y.* Consensus of Hybrid Multi-Agent Systems / Y. Zheng, J. Ma, L. Wang // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. — 2018. — Vol. 29, Issue 4. — P. 1359–1365. — DOI: 10.1109/TNNLS. 2017.2651402.
10. *Катренко А.В.* Механізми координації у складних ієрархічних системах / А.В. Катренко, І.В. Савка / Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2008. — № 631. — С. 156 – 166.
11. *Sun Z.* Cooperative Coordination and Formation Control for Multi-agent Systems / Z. Sun. — Springer. — 2018. — 179 p.
12. *Veetil V.P.* Coordination in Centralized and Decentralized Systems / V. P. Veetil // International Journal of Microsimulation. — 2017. — N 10 (2). — P. 86–102.
13. *Романюк С.А.* Децентралізація: теорія та практика застосування: моногр. / С.А. Романюк. — К., 2018. — 216 с.
14. *Decision* Making Under Uncertainty: Theory and Application / M.J. Kochenderfer. — Massachusetts Institute of Thechnology: The MIT Press, 2015. — 323 p.
15. *Harrington J.E.* Games, Strategies, and Decision Making / J.E. Harrington, Jr. — Worth Publishers, 2014. — 540 p.
16. *Neyman A.* Stochastic Games and Applications / A. Neyman, S. Sorin. — Springer Science & Business Media, 2012. — 473 p.
17. *Кравець П.О.* Ігрова модель самоорганізації мультиагентних систем / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2015. — № 829. — С. 161–176.
18. *Кравець П.О.* Ігрова модель прийняття рішень в ієрархічних системах / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2017. — № 872. — С. 111–120.

19. *Кравець П.О.* Ігрова модель системи з авторитарним прийняттям рішень / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2018. — № 901. — С. 61–67.
20. *Бурков В.Н.* Теория активных систем: состояние и перспективы / В.Н Бурков, Д.А. Новиков. — М. Синтег, 1999. — 128 с.
21. *Айзерман М.А.* Выбор вариантов: основы теории / М.А. Айзерман, В.Ф. Алескеров. — М.: Наука, 1990. — 240 с.
22. *Назин А.В.* Адаптивный выбор вариантов / А.В. Назин, А.С. Позняк. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
23. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
24. *Губко М.В.* Теория игр в управлении организационными системами / М.В. Губко, Д.А. Новиков. — М.: Синтег, 2002. — 148 с.
25. *Новиков Д.А.* Игры и сети / Д.А. Новиков // Математическая теория игр и ее приложения. — Т. 2, Вып. 1. — 2010. — С. 107–124.
26. *Tadelis S.* Game Theory: An Introduction / S. Tadelis. — Princeton University Press, 2013. — 416 p.
27. *Petrosjan L.A.* Game Theory and Application / L.A. Petrosjan, V.V. Mazalov. — New York: Nova Science Publishers, 2007. — 227 p.
28. *Ungureanu V.* Pareto-Nesh-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Applications / V. Ungureanu. — Springer, 2018. — 343 p.
29. *Neogy S.K.* Mathematical Programming and Game Theory / S.K. Neogy, R.B. Bapat, D. Dubey. — Springer, 2018. — 226 p.
30. *Kushner H.* Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications / H. Kushner, G. George Yin. — Springer Science & Business Media, 2013. — 417 p.

Надійшла 15.04.2019