СДІТ

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ І МЕТОДИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

УДК 519.816

КОМПЛЕКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ЧУТЛИВОСТІ РІШЕННЯ НА ОСНОВІ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ

Н.Д. ПАНКРАТОВА, Н.І. НЕДАШКІВСЬКА

Запропоновано комплексну методологію проведення глобального оцінювання чутливості рішення, отриманого методом аналізу ієрархій, що дозволяє підвищити узгодженість експертних оцінок; визначити стійкість ваг елементів ієрархії до неточностей в експертній інформації, а також області значень ваг елементів, при яких не виникає зміни рангів альтернатив; знайти критичні та стійкі елементи задачі.

ВСТУП

Метод аналізу ієрархій (МАІ) базується на експертних оцінках величин парних порівнянь елементів відносно спільної для них властивості. Оцінки експертів структуруються у матрицю парних порівнянь, а локальні ваги елементів ієрархії обчислюються як головні власні вектори цих матриць [1].

Експертні оцінки піддаються впливу невизначеності і, як наслідок, можуть містити помилки. Причинами помилок, зокрема, можуть бути: неповнота знань у експертів щодо питання, яке розглядається, їхня втома або незацікавленість у рішенні, існування неузгодженостей реального світу, неадекватна структура моделі [2,3]. Також помилки в оцінках експертів можуть бути наслідком нездатності людини точно виразити свої судження за допомогою скалярних значень [4].

Для дослідження достовірності отриманого рішення доцільно визначити залежність між результатами МАІ та ступенем неточності початкових даних — експертних оцінок.

По суті, поставлена задача відноситься до більш узагальненого класу задач аналізу чутливості (АЧ) розв’язку до зміни початкових даних. На думку авторів роботи [5], МАІ найбільш ефективний, коли його супроводжує АЧ, який допомагає краще зрозуміти природу проблеми, що розглядається, виявити можливості взаємозв’язку з іншими подібними ситуаціями, а також перевірити обгрунтованість числових значень та необхідність у більш високій точності обчислень [6].

Традиційним вважається локальний АЧ: розглядається певне рішення і досліджується його чутливість по відношенню до вибраного параметру [5–14]. Більшість дослідників зводять АЧ результатів МАІ до аналізу залежності вектору глобальних ваг альтернатив лише від ваг критеріїв [5–15]. «Цей достатньо простий метод АЧ є гарним компромісом між оперативністю та продуктивністю» [13]. На думку авторів роботи [13], АЧ рішення обмежується дослідженням результатів змін тільки ваг критеріїв внаслідок двох причин:

1) ранжування, отримане за допомогою МАІ, найбільш чутливе до змін ваг елементів на вищих рівнях ієрархії;

2) розгляд впливу одночасної зміни декількох елементів ієрархії на результуючий вектор ваг є відносно складним для практичного застосування.

На практиці [5–14] АЧ рішень, отриманих МАІ, найчастіше проводиться графічними методами, запропонованими Т.Сааті та реалізованими в програмі Expert Choice [15]. До них відносяться АЧ виконання, градієнтний, динамічний, 2D та різницевий АЧ. У цих методах користувач може змінювати ваги критеріїв і спостерігати на екрані як у вигляді відповідних графіків, діаграм змінюються ваги альтернатив. Однак запропоновані Т.Сааті методи є методами типу «що буде, якщо». Вони не є системним підходом до проведення АЧ і дозволяють лише відповісти на питання «яким буде рішення, якщо вагу певного елементу змінити на деяку величину».

Дехто з дослідників результатом проведення АЧ у МАІ вважає знаходження критичного критерію, тобто критерію, який характеризується найменшою зміною своєї ваги, що приводить до зміни порядку ранжування альтернатив. Показано [16]: не завжди критичним є критерій з найбільшою вагою. Ним також може бути критерій із мінімальною вагою.

У МАІ існує показник ступеня узгодженості експертних оцінок — відношення узгодженості [1]. Якщо значення цього показника перевищує встановлене порогове, то вважається, що оцінки мають високий ступінь суперечливості і повинні бути переглянуті. Інший спосіб визначення узгодженості експертних оцінок — розрахунок спектрального коефіцієнту узгодженості ваг, отриманих з множини матриць, породжених кожним рядком матриці парних порівнянь, заданої експертами [2]. Для підвищення узгодженості отриманих оцінок пропонується використовувати методи парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом (експерту вказується джерело протиріч і пропонується скоригувати свої оцінки [2]).

Зміна порядку ранжування альтернатив при додаванні/вилученні альтернативи в літературі отримала назву реверсу рангів. У роботі [17] досліджується поява реверсу рангів у методах дистрибутивного, ідеального, мультиплікативного синтезу МАІ та методу групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив. Показано, що реверс рангів може виникнути в кажному з цих методів синтезу МАІ. Тобто МАІ є чутливим до змін структури ієрархічної моделі.

МАІ успішно використовується при розв'язанні різноманітних задач прийняття рішень [5–14]. У залежності від задачі слід вибирати той чи інший метод проведення АЧ. У роботі [2] розглядаються три класи задач прийняття рішень:

1. Створення комплексних цільових програм для органів державного управління найвищого рівня та управління великих фірм.

2. Вибір програм розвитку середнього та малого бізнесу. Прийняття рішень для органів державного управління середнього рівня.

3. Індивідуальне управління в задачах, які мають характер повторюваності.

Для задач третього класу, розв'язання яких базується на інформації про результати використання рішень подібних задач, прийнятих у минулому, скоріш за все, достатньо буде проведення локального анализу чутливості. Можна, наприклад, обмежитися методами, реалізованими в програмі Expert Choice [15].

Однак, коли мова йде про задачі прийняття рішень першого та другого класів, при плануванні комплексних цільових програм для обгрунтування рішень відносно включення в програму різних політичних, соціальних чи економічних заходів та розподілу між ними ресурсів, при виборі сценаріїв розвитку галузей промисловості, а також при необхідности прийняття рішень відносно інноваційного розвитку сучасного суспільства, слід проводити більш повний (глобальний) АЧ, інтегрувати його в кожний етап прийняття рішень, включити в неперервний циклічний процес розв'язання задачі.

Процес прийняття рішень відносно можливої поведінки в майбутньому складних систем, які характеризуються великим впливом людського фактора, суттєвими невизначеностями даних, різного роду ризиками, отримало назву передбачення. Такий процес зводиться до застосування окремих методів в певній послідовності із встановленням чітко визначених взаємозв'язків між ними [18, 19]. Метод аналізу ієрархій застосовується в процесі передбачення на етапі якісного аналізу проблеми.

Один із підходів до проведення глобального АЧ у МАІ полягає в дослідженні зміни розв'язку (порядку ранжування альтернативних варіантів рішення) при варіюванні:

- початкових даних (оцінок експертів);
- параметрів моделі (наприклад, ваг критеріїв);
- структури моделі (наприклад, додавання/вилучення альтернатив чи критеріїв).

Пропонується комплексна методологія проведення аналізу чутливості результатів, отриманих МАІ, а саме:

- Аналіз узгодженості експертних оцінок. Проведено формалізацію одного з методів підвищення узгодженості оцінок, отриманих від експертів — методу зміни структури ієрархії.
- Оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних неточностями експертних оцінок.
- Визначення областей змін ваг елементів, при яких не змінюється порядок ранжування альтернатив. В основному, на практиці при проведенні АЧ у МАІ розв'язується «пряма задача»: як зміниться рішення при зміні ваги критерія. У даній роботі знаходиться область змін ваги вибраного елементу ієрархії, коли ранги альтернатив залишаються незмінними. При цьому розглядаються ієрархії з довільною кількістю рівнів. Запропонований метод є узагальненням підходу [16], де розглядаються ієрархії, що складаються тільки з трьох рівнів: головної цілі, критеріїв та альтернатив.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо ієрархію, яка має $p+1$ рівень. Нехай нульовий рівень (L_0) складається з одного елементу — головної цілі, останній (L_p) — з альтернативних варіантів рішень. Рівні ієрархії між нульовим рівнем і останнім представляють можливі фактори, які впливають на рішення. Це можуть бути різноманітні критерії, цілі, а також зацікавлені особи, можливі сценарії тощо. Кількість елементів L_k-го рівня позначимо N_{L_k}, $L_k \in \lfloor L_0; L_p \rfloor$.

Нехай $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ — заповнена експертами матриця парних порівнянь елементів L_k-го рівня ієрархії відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $r \in \lfloor 1; N_{L_{k-1}} \rfloor$ (знак $\wedge$ у виразі $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ вказує на те, що елементи є оцінками відношень істинних ваг).

Позначимо $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ локальну вагу l-го елементу L_k-го рівня відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $l \in \lfloor 1; N_{L_k} \rfloor$, $r \in \lfloor 1; N_{L_{k-1}} \rfloor$. Згідно із традиційним методом аналізу ієрархій, вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \mid l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ розраховується як головний власний вектор матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$.

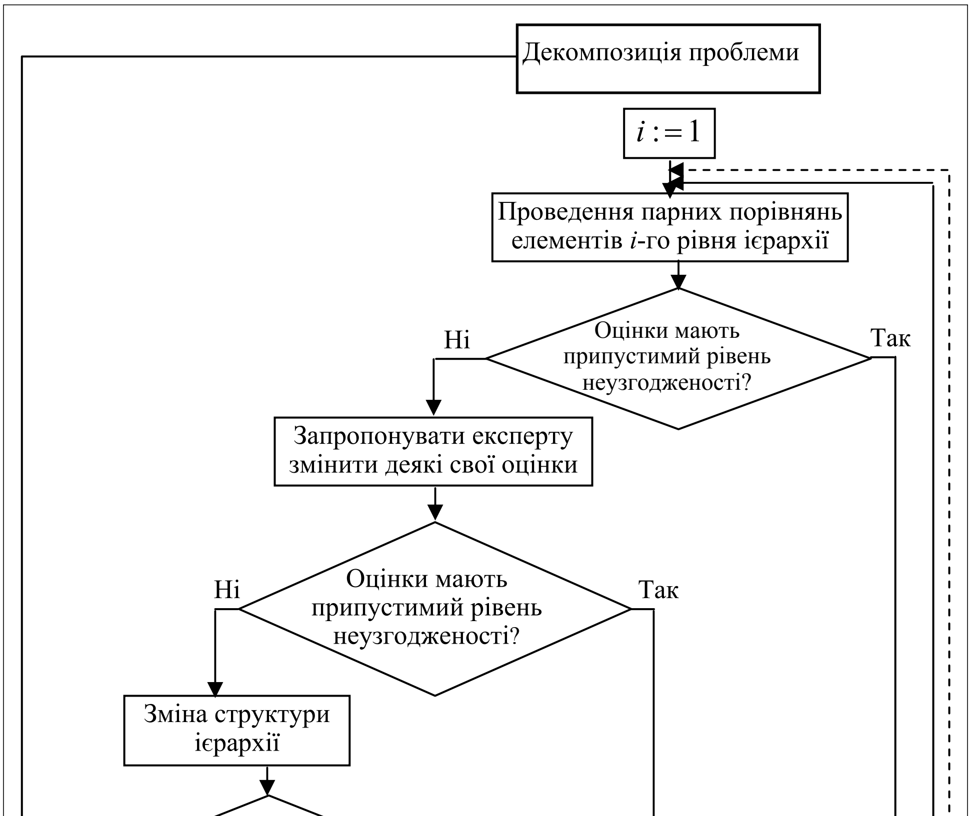
Глобальні ваги елементів L_k-го рівня ієрархії позначимо $\hat{w}_l^{L_k}$, $l \in \lfloor 1; N_{L_k} \rfloor$. Згідно із методом аналізу ієрархій, вони обчислюються за принципом ієрархічної композиції. Глобальні ваги альтернативних варіантів рішень $\hat{w}^{L_p} = \left\{ \hat{w}_i^{L_p} \mid i \in \left[1; N_{L_p}\right] \right\}$ є результатом роботи методу аналізу ієрархій.

Необхідно провести АЧ вектора рішення $\hat{w}^{L_p}$ до неточностей та протиріч в експертних оцінках:

- дослідження узгодженості експертних оцінок (матриць $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$);
- оцінювання стійкості ваг $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ до збурень в $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$;
- знаходження областей змін ваг $\hat{w}_l^{L_k}$, при яких не відбуваються зміни порядку ранжування у векторі розв'язку $\hat{w}^{L_p}$, $l \in \lfloor 1; N_{L_k} \rfloor$, $L_k \in \lfloor L_1; L_{p-1} \rfloor$;
- знаходження критичних та стійких елементів L_k-го рівня.

2. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Оцінювання чутливості вектора рішення до неточностей та протиріч в експертних оцінках пропонується реалізовувати в структурі комплексної методології проведення АЧ рішення, отриманого МАІ (див. рисунок). Так, згідно із методом аналізу ієрархій, спочатку проводиться декомпозиція проблеми, визначаються головна ціль та фактори, що впливають на її досягнення. Далі проводяться парні порівняння елементів, які знаходяться на одному рівні побудованої ієрархії відносно спільного для них елемента сусіднього вищого рівня. При цьому порівняння елементів здійснюється, починаючи з більш високих рівнів ієрархії.



Основні кроки прийняття рішення за допомогою МАІ з урахуванням АЧ

Процес парних порівнянь супроводжується дослідженням узгодженості отриманих експертних оцінок (див. далі п.2.1). Розглянемо L_k -й рівень ієрархії. Нехай проведені парні порівняння елементів цього рівня відносно r -го елементу L_{k-1}-го рівня і результати організовані в матрицю парних порівнянь $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$. Досліджується узгодженість матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$. Якщо $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ є узгодженою або її рівень неузгодженості є припустимим, то розраховується вектор локальних ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \mid l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ елементів L_k -го рівня відносно r -го елементу L_{k-1}-го рівня і проводиться оцінювання стійкості вектора ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ до збурень в $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ (див. далі п. 2.2). Якщо ж оцінки порівнянь елементів L_k -го рівня відносно r -го елементу L_{k-1}-го рівня перевищують припустимий рівень неузгодженості, то знаходяться найбільш неузгоджені оцінки, і експерту пропонується змінити їх. Якщо в результаті досягається припустимий рівень неузгодженості, то розраховується вектор локальних ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$, і проводиться оцінка його стійкості. Якщо експерт відмовився змінити свої оцінки або отримані нові оцінки знову не задовольняють умові припустимої неузгодженості, то пропонується змінити структуру ієрархії шляхом додавання додаткових рівнів (див. далі п. 2.1). У випадку невдачі доцільно відкласти прийняття рішення до отримання більш повної інформації.

Після отримання локальних ваг елементів всіх рівнів обчислюється вектор $\hat{w}^{L_p}$ глобальних ваг альтернатив, який і є розв'язком задачі. Потім знаходяться області змін ваг $\hat{w}_l^{L_k}$, $l \in \left[1; N_{L_k}\right]$, $L_k \in \left[L_1; L_{p-1}\right]$, при яких не відбувається зміна порядку ранжування у векторі розв'язку $\hat{w}^{L_p}$ (див. далі п. 2.3). А потім виявляються критичні та стійкі елементи (див. далі п. 2.3). Критичним називається такий елемент, зміна ваги якого, що призводить до зміни порядку ранжування альтернатив, є найменшою. Елемент називається стійким, якщо ніякі зміни його ваги не приводять до зміни рангів альтернатив. Після знаходження критичних елементів задачі можливо буде потреба повернутися на попередні етапи процесу прийняття рішення та запропонувати експертам перевірити свої оцінки відносно цих найбільш чутливих елементів (пунктирна лінія на рисунку).

2.1. Способи підвищення узгодженості експертних оцінок в МАІ

Матриця парних порівнянь (МПП) $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1,...,N$, називається *узгодженою*, якщо для $\forall\ i, j, k = 1,...,N$ виконується умова $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$. При $\exists\ i, j, k = 1,...,N$ таких, що $a_{ij} \neq a_{ik} a_{kj}$, матриця A називається неузгодженою.

Загальновідомо [1, 2], що деяка неузгодженість повинна бути присутня в оцінках експертів, оскільки без неї не можуть бути визнані нові знання, які змінюють переваги. Однак ця неузгодженість не повинна перевищувати деяке порогове значення. Припущення, що всі знання повинні бути узгоджені, суперечить досвіду, коли необхідне неперервне поновлення існуючих знань [1].

В МАІ існує показник ступеня неузгодженості оцінок експертів — відношення узгодженості

$$BУ = \frac{\mu}{\mu^0},$$

де $\mu = \frac{\lambda_{\max} - N}{N-1}$ — індекс узгодженості; $\lambda_{\max}$ — найбільше власне число МПП розмірності $N \times N$; μ^0 — індекс випадкової узгодженості (середнє значення індексів узгодженості, розрахованих для великої кількості випадково заповнених МПП розмірності $N \times N$ [1]).

Тобто $BУ$ визначається шляхом порівняння ступеня узгодженості матриці, заповненої експертом, і ступеня узгодженості матриці такої ж розмірності, заповненої випадковим чином.

Матриця оцінок, наданих експертами, вважається такою, що має припустимий рівень неузгодженості, якщо відношення узгодженості задовольняє таким умовам [2]:

- $BУ < 0{,}05$ для МПП розмірності 3×3;
- $BУ < 0{,}08$ для МПП 4×4;
- $BУ < 0{,}1$ для МПП більших розмірностей.

Якщо відношення узгодженості перевищує рекомендоване значення, то експертні оцінки характеризуються високим рівнем неузгодженості і не можуть використовуватися при прийнятті рішення. Традиційним способом зменшення неузгодженості експертних оцінок вважається організація зворотного зв'язку з експертом (наприклад, [2]). В даній роботі пропонується ще один метод зменшення неузгодженості парних порівнянь, наданих експертами, — зміна структури ієрархії.

Організація зворотного зв'язку з експертами

1. Знайти в матриці парних порівнянь найбільш неузгоджений елемент.
2. Визначити діапазон значень, в межах якого може бути змінена дана оцінка.
3. Запропонувати експерту змінити свою оцінку в межах цього діапазону.
4. Якщо експерт відмовляється, то кроки 2 і 3 проводяться для другої найбільш неузгодженої оцінки тощо.
5. Якщо жодна з оцінок не змінена, то можна використовувати інші способи підвищення їх узгодженості, або ж прийняття рішення за допомогою МАІ відкладається до отримання додаткової інформації.

Зміна структури ієрархії

З теорії МАІ відомо, що для визначення ваг N елементів експерту слід провести $R = \frac{N(N-1)}{2}$ парних порівнянь. Оскільки значення R зростає квадратично із збільшенням числа N порівнюваних елементів, а здатність людини робити точні порівняння великої кількості елементів одночасно обмежена, то при збільшенні N зростає також і рівень протиріччя у наданих експертами оцінках. Тому при збільшенні кількості порівнюваних елементів індекс узгодженості зростає. У зв'язку з цим одним із способів підвищення узгодженості оцінок експертів є зменшення числа елементів на одному рівні ієрархії за допомогою побудови додаткового, на якому пропонується розмістити найбільш близькі між собою елементи рівня, що розглядається.

Нехай проведені парні порівняння елементів L_k -го рівня, і відношення узгодженості перевищує допустиме значення. Тоді пропонується змінити структуру ієрархії:

1. У множині з N_k елементів виділити q кластерів найбільш «близьких» між собою елементів. Нехай m_j — кількість елементів у j-му кластері, $2 \le m_j \le N_k - 1$, $j = 1,...,q$.

2. Перенумерувати рівні ієрархії: $L_p \to L_{p+1}$, $L_{p-1} \to L_p, \ldots, L_{k+1} \to \to L_{k+2}$, де L_p — останній рівень ієрархії.

3. Створити рівень ієрархії L_{k+1} з r елементів, де $r = \sum_{j=1}^{q} m_j$. Тоді на рівні L_k буде знаходитися $N_k - r + 1$ елемент.

Залишається відкритим питання визначення ступеня «близькості» елементів L_k -го рівня. Напевне, воно не піддається формалізації і залежить від специфіки конкретної задачі.

2.2. Оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних неточностями в експертних оцінках

Розглянемо $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l_1 \in [1; N_{L_k}], l_2 \in [1; N_{L_k}] \right\}$ — заповнену експертами матрицю парних порівнянь (МПП) елементів L_k -го рівня ієрархії відносно r -го елементу L_{k-1}-го рівня. В загальному випадку $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ не є узгодженою. Припустимо, що матриця парних порівнянь, заповнена експертами — збурена матриця відношень істинних ваг, тобто $\hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} = a_{l_1 l_2}^{L_k} \varepsilon_{l_1 l_2}$, де $a_{l_1 l_2}^{L_k} = \dfrac{w_{l_1}^{L_k}}{w_{l_2}^{L_k}}$ — елемент узгодженої МПП; $\varepsilon_{l_1 l_2}$ — величина збурення.

Введемо вектор локальних ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l \in [1; N_{L_k}] \right\}$ елементів L_k -го рівня ієрархії відносно r -го елемента L_{k-1}-го рівня, $r \in [1; N_{L_{k-1}}]$, отриманий після обробки *заповненої експертами* МПП $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$.

Введемо вектор локальних ваг $w_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ w_{lr}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l \in [1; N_{L_k}] \right\}$ елементів L_k -го рівня ієрархії відносно r -го елемента L_{k-1}-го рівня, $r \in [1; N_{L_{k-1}}]$, отриманий з *узгодженої* МПП $A_r^{L_k L_{k-1}}$.

Оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних неточностями в експертних оцінках, складається з двох частин:

1. Дослідження зміни рангів між вектором ваг, отриманим після обробки заданої експертами МПП, і вектором ваг з породженої матриці.
2. Дослідження зміни рангів між вектором ваг, отриманим після обробки заданої експертами МПП, і вектором ваг із збуреної МПП.

Дослідження зміни рангів між вектором ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і вектором ваг, отриманим з породженої матриці $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$

Поставимо у відповідність збуреній матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ сукупність узгоджених МПП $\{A_{1r}^{*L_k L_{k-1}}, A_{2r}^{*L_k L_{k-1}}, ..., A_{N_{L_k} r}^{*L_k L_{k-1}}\}$, де $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ — узгоджена МПП, побудована за q -м рядком матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$, $q \in \left[1; N_{L_k}\right]$, $r \in \left[1; N_{L_{k-1}}\right]$. У роботі [2] матриця $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ називається *породженою* q -м рядком матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$. Для кожної $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ розрахуємо вектор ваг $w_{qr}^{*L_k L_{k-1}} = \left\{ w_{qlr}^{*L_k L_{k-1}} \middle| l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$.

Означення 1. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$, $r \in \left[1; N_{L_{k-1}}\right]$, створює *зміну рангів* з вектором ваг $w_{qr}^{*L_k L_{k-1}} = \left\{ w_{qlr}^{*L_k L_{k-1}} \middle| l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ породженої матриці $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ для даного $q \in \left[1; N_{L_k}\right]$, якщо $\exists\, l_1 \in \left[1; N_{L_k}\right]$, $l_2 \in \left[1; N_{L_k}\right]$ такі, що виконується умова

$$\left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} < w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$

$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} > w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$

$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} \neq w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$

$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} = w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}}) \right).$$

Означення 2. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ назвемо *стійким,* якщо $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ не створює зміни рангів ні з одним з векторів $w_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$, $q \in \left[1; N_{L_k}\right]$.

Дослідження зміни рангів між вектором ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і вектором ваг, отриманим із збуреної МПП $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$

Випадковим чином генерується велика кількість збурених матриць $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} \middle| l_1 \in \left[1; N_{L_k}\right], l_2 \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$, $\hat{a}_{l_1 l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} \varepsilon_{l_1 l_2}$, де $\varepsilon_{l_1 l_2}$ — рівномірно розподілена випадкова величина на інтервалі $[1, \varepsilon_{\max}]$,

$r \in \left[1; N_{L_{k-1}}\right]$. Для кожної $\hat{A}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ обчислюються вектор ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ і відношення узгодженості. Розраховується ймовірність зміни рангів між векторами $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$.

Означення 3. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$, $r \in \left[1; N_{L_{k-1}}\right]$, створює *зміну рангів* з вектором ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ збуреної матриці $\hat{A}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ для даного $\varepsilon_{l_1 l_2} \in [1, \varepsilon_{\max}]$, якщо $\exists\, l_1 \in \left[1; N_{L_k}\right]$, $l_2 \in \left[1; N_{L_k}\right]$ такі, що виконується умова

$$\left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$
$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$
$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}) \right) \vee$$
$$\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}) \right).$$

Ступенем зміни рангів між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ назвемо кількість пар (l_1, l_2), $l_1 < l_2$, для яких виконується остання умова. Якщо вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ не створює зміну рангів з вектором ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$, то ступінь зміни рангів покладається рівним нулю.

Наприклад, нехай вектор $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ задає таке ранжування елементів: $O_1\ O_2\ O_3\ O_4$ (об'єкт O_1 має найбільшу вагу), а вектор $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ збуреної МПП — ранжування $O_1\ O_4\ O_3\ O_2$. Ступінь зміни рангів між $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ у даному випадку дорівнює трьом (пари (2,3), (2,4) і (3,4)).

Означення 4. *Ймовірність* появи зміни рангів k-го ступеня $P(r^k)$ між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ будемо розраховувати так: $P(r^k) = \frac{N^k}{N}$, де N^k — число появи зміни рангів k-го ступеня між $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ в N експериментах.

Означення 5. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l \in \left[1; N_{L_k}\right] \right\}$ назвемо *стійким*, якщо ймовірності появи зміни рангів k-го ступеня $P(r^k)$ між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon\, L_k L_{k-1}}$ є меншими за попередньо задані порогові значення P_0^k.

2.3. Визначення областей змін ваг елементів ієрархії, які не призводять до змін рангів альтернатив

Нехай альтернативи перенумеровані таким чином, що при $i < j$ виконується $\hat{w}_i^{L_p} \geq \hat{w}_j^{L_p}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$.

Нагадаємо, що $\hat{w}_l^{L_k}$ є глобальною вагою l-го елементу L_k-го рівня.

Означення 6. Позначимо $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, $l \in [1; N_{L_k}]$, $L_k \in [L_1; L_{p-1}]$, величину *абсолютної зміни* ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня (i-ю та j-ю альтернативами), тобто нехай нова вага l-го елементу L_k-го рівня дорівнює $\hat{w}_l'^{L_k} = \hat{w}_l^{L_k} - \Delta_{i,j,l}^{L_k}$, $\hat{w}_l'^{L_k} > 0$, і для $i < j$ виконується умова $\hat{w}_i'^{L_p} < \hat{w}_j'^{L_p}$, де $\hat{w}_i'^{L_p}$ — нова глобальна вага i-го елементу L_p-го рівня.

Означення 7. Позначимо $\delta_{i,j,l}^{L_k}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, $l \in [1; N_{L_k}]$, $L_k \in [L_1; L_{p-1}]$, величину *відносної зміни* ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня (i-ю та j-ю альтернативами), тобто нехай нова вага l-го елементу L_k-го рівня дорівнює $\hat{w}_l'^{L_k} = \hat{w}_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} \hat{w}_l^{L_k}}{100}$, $\hat{w}_l'^{L_k} > 0$, і для $i < j$ виконується умова $\hat{w}_i'^{L_p} < \hat{w}_j'^{L_p}$, де $\hat{w}_i'^{L_p}$ — нова глобальна вага i-го елементу L_p-го рівня.

Величини відносної та абсолютної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня пов'язані співвідношенням $\delta_{i,j,l}^{L_k} = \dfrac{\Delta_{i,j,l}^{L_k}}{\hat{w}_l^{L_k}} 100\,\%$.

Означення 8. l-й елемент L_k-го рівня назвемо *стійким,* якщо будь-які припустимі зміни ваги даного елементу не призводять до зміни рангу жодної альтернативи.

Означення 9. *Критичним* елементом L_k-го рівня назвемо елемент L_k-го рівня, який має найменше значення $\left|\delta_{i,j,l}^{L_k}\right|$, тобто $l_{\text{крит}}$-й елемент L_k-го рівня — критичний, якщо $\left|\delta_{i,j,l_{\text{крит}}}^{L_k}\right| = \min\limits_{l \in [1; N_{L_k}]} \left\{\left|\delta_{i,j,l}^{L_k}\right|\right\}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$.

Означення 10. *Ступенем критичності* $C_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня назвемо величину найменшої відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$ даного елементу, яка призводить до зміни порядку ранжування альтернатив: $C_l^{L_k} = \min\limits_{\substack{i \in [1; N_{L_p}],\, j \in [1; N_{L_p}], \\ i<j}} \left\{\left|\delta_{i,j,l}^{L_k}\right|\right\}$.

Означення 11. *Чутливістю* $S_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня назвемо величину, обернену до ступеня критичності даного елементу: $S_l^{L_k} = \dfrac{1}{C_l^{L_k}}$.

Якщо l-й елемент L_k-го рівня є стійким, то значення $S_l^{L_k}$ покладається рівним нулю.

Чим меншим є ступінь критичності $C_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня, тим «легше» змінити порядок ранжування альтернатив, тобто менше значення ступеня критичності $C_l^{L_k}$ свідчить про меншу зміну ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, яку достатньо здійснити для зміни порядку ранжування альтернатив. І чим «легше» змінити порядок ранжування альтернатив, тим чутливість $S_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня є більшою.

Знайдемо величину $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня.

Нехай вага $w_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня змінена і нова вага $w_l'^{L_k}$ дорівнює $w_l'^{L_k} = w_l^{L_k} - \Delta_{i,j,l}^{L_k} = w_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100}$. (У подальшому знак $\wedge$ в позначеннях ваг опускаємо.) Оскільки повинна виконуватися умова додатності ваги $w_l'^{L_k} > 0$, то на величини $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ накладаються обмеження $\Delta_{i,j,l}^{L_k} < w_l^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k} < 100$.

У методі аналізу ієрархій глобальні ваги елементів кожного рівня ієрархії є нормованими, тому необхідно провести нормування елементів L_k-го рівня з урахуванням зміненої ваги $w_l'^{L_k}$ l-го елементу даного рівня. Позначимо нормовані ваги $w_{l_1}^{*L_k}$, $l_1 \in [1; N_{L_k}]$. Вони розраховуються так:

$$w_l^{*L_k} = \frac{w_l'^{L_k}}{w_l'^{L_k} + \sum\limits_{l_1=1, l_1 \neq l}^{N_{L_k}} w_{l_1}^{L_k}}, \quad w_{l_1}^{*L_k} = \frac{w_{l_1}^{L_k}}{w_l'^{L_k} + \sum\limits_{l_1=1, l_1 \neq l}^{N_{L_k}} w_{l_1}^{L_k}}$$

$$\text{для } \forall l_1 \in [1; N_{L_k}], \ l_1 \neq l. \tag{1}$$

Для знаходження величини $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ розпишемо умову $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня з урахуванням принципу ієрархічної композиції, згідно з яким

$$w_i'^{L_p} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \dots \sum_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \dots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{*L_k}.$$

Тоді нерівність $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ запишеться у вигляді

$$\sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \dots \sum_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \dots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{*L_k} <$$

$$< \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{* L_k} ,$$

а після підстановки виразів для $w_{l_1}^{*L_k}$, згідно з (1), а потім $w_l'^{L_k}$, згідно з означенням 7, отримаємо

$$\begin{cases} \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} \sum_{\substack{j_{k+1}=1, \\ j_{k+1} \neq l}}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{L_k} + \\ + \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \left(w_l^{L_k} - \frac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \right) < \\ < \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} \sum_{\substack{j_{k+1}=1, \\ j_{k+1} \neq l}}^{N_{L_k}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{L_k} + \\ + \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \left(w_l^{L_k} - \frac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \right). \end{cases}$$

Після перетворень остання нерівність прийме вигляд

$$\begin{cases} w_i^{L_p} - \frac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} < \\ < w_j^{L_p} - \frac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \end{cases}$$

або $w_j^{L_p} - w_i^{L_p} > \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \left(w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k} \right)$,

де

$$w_{il}^{L_p L_k} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} ,$$
$$w_{jl}^{L_p L_k} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} . \quad (2)$$

Отже,

$$\delta_{i,j,l}^{L_k} < \frac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k}} \frac{100}{w_l^{L_k}}, \quad \text{якщо} \quad w_{jl}^{L_p L_k} > w_{il}^{L_p L_k} ;$$

$$\delta_{i,j,l}^{L_k} > \frac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_pL_k} - w_{il}^{L_pL_k}} \frac{100}{w_l^{L_k}}, \quad \text{якщо} \quad w_{jl}^{L_pL_k} < w_{il}^{L_pL_k}.$$

Оскільки, як зазначалося раніше, повинна виконуватися умова $w_l'^{L_k} > 0$, то $\Delta_{i,j,l}^{L_k} < w_l^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k} < 100$, тобто має виконуватися нерівність $w_l^{L_k} > \dfrac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_pL_k} - w_{il}^{L_pL_k}}$, де вага $w_{il}^{L_pL_k}$ розраховується за рівнянням (2).

Таким чином, отримали твердження.

Твердження 1. Величина $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, необхідної для зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, $l \in [1; N_{L_k}]$, $L_k \in [L_1; L_{p-1}]$, для $i < j$, задовольняє нерівності

$$\delta_{i,j,l}^{L_k} < \delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}}, \quad \text{якщо} \quad \hat{w}_{jl}^{L_pL_k} > \hat{w}_{il}^{L_pL_k};$$

$$\delta_{i,j,l}^{L_k} > \delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}}, \quad \text{якщо} \quad \hat{w}_{jl}^{L_pL_k} < \hat{w}_{il}^{L_pL_k},$$

де порогове значення $\delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}}$ величини $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}} = \Delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}} \frac{100}{\hat{w}_l^{L_k}} (\%), \tag{3}$$

де

$$\Delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}} = \frac{\hat{w}_j^{L_p} - \hat{w}_i^{L_p}}{\hat{w}_{jl}^{L_pL_k} - \hat{w}_{il}^{L_pL_k}} \tag{4}$$

за умов:

1) $\hat{w}_i^{L_p} \ge \hat{w}_j^{L_p}$ для $i < j$;

2) $\hat{w}_l^{L_k} > \Delta_{i,j,l}^{L_k \text{ поріг}}$ (що еквівалентно $\delta_{i,j,l}^{L_k \text{ поріг}} < 100\%$).

Наслідок 1. l-й елемент L_k-го рівня, $l \in [1; N_{L_k}]$, є стійким, якщо для $i < j$ виконується $\hat{w}_l^{L_k} \le \Delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}}$ при $\forall\ i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, де порогове значення $\Delta_{i,j,l}^{L_k \text{поріг}}$ величини $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$ абсолютної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня обчислюється за формулою (4).

Наслідок 2. Якщо $\hat{w}_{jl}^{L_pL_k} \le \hat{w}_{il}^{L_pL_k}$ для $\forall\ l \in [1; N_{L_k}]$, тобто j-й елемент L_p-го рівня не переважає i-й елемент L_p-го рівня за всіма елементами L_k-го рівня, $L_k \in [L_1; L_{p-1}]$, то ніякі зміни ваг елементів L_k-го рівня не призведуть до зміни порядку ранжування між цими елементами L_p-го рівня.

Визначення критичної альтернативи

Означення 12. Позначимо $\delta^a_{i,j,r}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, $r \in [1; N_{L_{p-1}}]$, величину відносної зміни локальної ваги $\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}$ i-го елементу L_p-го рівня (i-ї альтернативи) відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня (i-ю та j-ю альтернативами), тобто нехай нова вага i-го елементу L_p-го рівня відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня дорівнює $\hat{w}'^{L_p L_{p-1}}_{ir} = \hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}} - \frac{\delta^a_{i,j,r} \hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}}{100}$, $\hat{w}'^{L_p L_{p-1}}_{ir} > 0$, і для $i < j$ виконується умова $\hat{w}'^{L_p}_i < \hat{w}'^{L_p}_j$, де $\hat{w}'^{L_p}_i$ — нова глобальна вага i-го елементу L_p-го рівня.

Означення 13. i-й елемент L_p-го рівня назвемо *стійким* відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня, якщо будь-які припустимі зміни ваги $\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}$ цього елементу не призводять до зміни рангу жодної альтернативи.

Означення 14. *Ступенем критичності* C^a_{ir} i-го елементу L_p-го рівня (i-ї альтернативи) відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня назвемо найменше значення $\left|\delta^a_{i,j,r}\right|$, яке призводить до зміни рангу даного елементу (альтернативи), тобто $C^a_{ir} = \min\limits_{\substack{j \in [1; N_{L_p}] \\ j \neq i}} \left\{ \left|\delta^a_{i,j,r}\right| \right\}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $r \in [1; N_{L_{p-1}}]$.

Означення 15. *Чутливістю* S^a_{ir} i-го елементу L_p-го рівня (i-ї альтернативи) відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня назвемо величину, зворотну до ступеня критичності даного елементу: $S^a_{ir} = \frac{1}{C^a_{ir}}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $r \in [1; N_{L_{p-1}}]$. Якщо i-й елемент L_p-го рівня є стійким відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня, то значення S^a_{ir} покладається рівним нулю.

Означення 16. *Критичним* елементом L_p-го рівня (*критичною альтернативою)* назвемо такий елемент L_p-го рівня, який має найменший ступінь критичності, тобто $i_{\text{крит}}$-й елемент L_p-го рівня — критичний (відносно деякого r-го елементу L_{p-1}-го рівня), якщо $C^a_{i_{\text{крит}} r} = \min\limits_{i \in [1; N_{L_p}]} \left\{ \min\limits_{r_1 \in [1; N_{L_{p-1}}]} \left\{ C^a_{i r_1} \right\} \right\}$.

Знайдемо величину $\delta^a_{i,j,r}$ відносної зміни локальної ваги $\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}$ i-ї альтернативи відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня, що призводить до зміни порядку ранжування між i-ю та j-ю альтернативами. Окремо розглянемо два випадки.

1. Випадок $i<j$.

Нехай вага $\hat{w}_{ir}^{L_pL_{p-1}}$ змінена і нова вага дорівнює $w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} = w_{ir}^{L_pL_{p-1}} - \frac{\delta^a{}_{i,j,r} w_{ir}^{L_pL_{p-1}}}{100}$. (У подальшому знак $\wedge$ в позначенні ваг опускаємо.) Оскільки повинна виконуватися умова додатності ваги $w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} > 0$, то $\delta_{i,j,r}^a < 100$.

Аналогічно попередньому розділу, знайдемо локальні ваги альтернатив після нормування.

$$w_{ir}^{*L_pL_{p-1}} = \frac{w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}}}{w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} + \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}}}; \quad w_{i_1r}^{*L_pL_{p-1}} = \frac{w_{i_1r}^{\prime L_pL_{p-1}}}{w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} + \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}}}$$

$$\text{для } \forall\ i_1 \in [1; N_{L_p}],\ i_1 \neq i.$$

Після підстановки у знаменник $w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} + \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}}$ виразу для $w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}}$ з урахуванням того, що $\sum\limits_{j=1}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}} = 1$ для $\forall\ r \in [1; N_{L_{p-1}}]$ отримаємо

$$w_{ir}^{\prime L_pL_{p-1}} + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}} =$$

$$= w_{ir}^{L_pL_{p-1}} + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{N_{L_p}} w_{jr}^{L_pL_{p-1}} - \frac{\delta_{i,j,r}^a w_{ir}^{L_pL_{p-1}}}{100} = 1 - \frac{\delta_{i,j,r}^a w_{ir}^{L_pL_{p-1}}}{100}.$$

Розпишемо умову $w_i^{\prime L_p} < w_j^{\prime L_p}$ зміни порядку ранжування між i-ю та j-ю альтернативами.

$$\sum_{r_1=1}^{N_{L_{p-1}}} w_{ir_1}^{*L_pL_{p-1}} w_{r_1}^{L_{p-1}} < \sum_{r_1=1}^{N_{L_{p-1}}} w_{jr_1}^{*L_pL_{p-1}} w_{r_1}^{L_{p-1}}.$$

Нерівність не зміниться, якщо додамо та віднімемо в лівій і правій частинах нерівності $w_{ir}^{L_pL_{p-1}}$ і $w_{jr}^{L_pL_{p-1}}$, відповідно.

$$\begin{cases} w_{ir}^{*L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} + (w_{ir}^{L_pL_{p-1}} - w_{ir}^{L_pL_{p-1}}) w_r^{L_{p-1}} + \sum\limits_{\substack{r_1=1,\\ r_1\neq r}}^{N_{L_{p-1}}} w_{ir_1}^{L_pL_{p-1}} w_{r_1}^{L_{p-1}} < \\ < w_{jr}^{*L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} + (w_{jr}^{L_pL_{p-1}} - w_{jr}^{L_pL_{p-1}}) w_r^{L_{p-1}} + \sum\limits_{\substack{r_1=1,\\ r_1\neq r}}^{N_{L_{p-1}}} w_{jr_1}^{L_pL_{p-1}} w_{r_1}^{L_{p-1}} . \end{cases}$$

Після перетворень отримаємо

$$\frac{w_{ir}^{L_pL_{p-1}} - \dfrac{\delta_{i,j,r}^{a} w_{ir}^{L_pL_p}}{100}}{1 - \dfrac{\delta_{i,j,r}^{a} w_{ir}^{L_pL_p}}{100}} w_r^{L_{p-1}} - w_{ir}^{L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} + w_i^{L_p} <$$

$$< \frac{w_{jr}^{L_pL_{p-1}}}{1 - \dfrac{\delta_{i,j,r}^{a} w_{ir}^{L_pL_p}}{100}} w_r^{L_{p-1}} - w_{jr}^{L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} + w_j^{L_p}$$

або

$$w_i^{L_p} - w_j^{L_p} < \delta_{i,j,r}^{a} (w_{jr}^{L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} - w_j^{L_p} + w_r^{L_{p-1}} - w_{ir}^{L_pL_{p-1}} w_r^{L_{p-1}} + w_i^{L_p}) .$$

Оскільки в останній нерівності вираз в дужках $w_r^{L_{p-1}} (w_{jr}^{L_pL_{p-1}} - - w_{ir}^{L_pL_{p-1}} + 1) + w_i^{L_p} - w_j^{L_p} \geq 0$, то шукана величина $\delta_{i,j,r}^{a}$ задовольняє нерівності

$$\delta_{i,j,r}^{a} > \frac{w_i^{L_p} - w_j^{L_p}}{w_r^{L_{p-1}} (w_{jr}^{L_pL_{p-1}} - w_{ir}^{L_pL_{p-1}} + 1) + w_i^{L_p} - w_j^{L_p}} \frac{100}{w_{ir}^{L_pL_{p-1}}} .$$

2. Випадок $i > j$.

Оскільки за припущенням альтернативи перенумеровані у порядку спадання їх глобальних ваг, то при $i > j$ виконується $w_i^{L_p} \leq w_j^{L_p}$, $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$. Нас цікавлять значення величини відносної зміни локальної ваги $w_{ir}^{L_pL_{p-1}}$, які призводять до зміни порядку ранжування між i-ю та j-ю альтернативами, тобто нові ваги альтернатив $w_i'^{L_p}$ та $w_j'^{L_p}$ повинні задовольняти нерівності $w_i'^{L_p} > w_j'^{L_p}$.

Аналогічно випадку, коли $i < j$, виводиться

$$\delta_{i,j,r}^{a} < \frac{w_i^{L_p} - w_j^{L_p}}{w_r^{L_{p-1}} (w_{jr}^{L_pL_{p-1}} - w_{ir}^{L_pL_{p-1}} + 1) + w_i^{L_p} - w_j^{L_p}} \frac{100}{w_{ir}^{L_pL_{p-1}}} .$$

Отже, отримали твердження.

Твердження 2. Величина $\delta^{a}_{i,j,r}$ відносної зміни локальної ваги $\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}$, необхідної для зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня (i-ю та j-ю альтернативами), $i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, $r \in [1; N_{L_{p-1}}]$, задовольняє нерівності

$$\delta^{a}_{i,j,r} > \delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r} \quad \text{при} \quad i < j,$$

$$\delta^{a}_{i,j,r} < \delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r} \quad \text{при} \quad i > j,$$

де порогове значення $\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r}$ величини $\delta^{a}_{i,j,r}$ обчислюється за формулою

$$\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r} = \frac{\hat{w}_i^{L_p} - \hat{w}_j^{L_p}}{\hat{w}_r^{L_{p-1}}(\hat{w}_{jr}^{L_p L_{p-1}} - \hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}} + 1) + \hat{w}_i^{L_p} - \hat{w}_j^{L_p}} \frac{100}{\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}} (\%), \quad (5)$$

за умов:

1) $\hat{w}_i^{L_p} \geq \hat{w}_j^{L_p}$ при $i < j$; $\hat{w}_i^{L_p} \leq \hat{w}_j^{L_p}$ при $i > j$;

2) $\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r} < 100\%$.

Знаючи порогове значення $\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r}$ величини $\delta^{a}_{i,j,r}$, можна визначити область змін локальних ваг $\hat{w}_{ir}^{L_p L_{p-1}}$ i-ї альтернативи відносно r-го елементу сусіднього вищого рівня ієрархії, які не призводять до змін рангів i-ї та j-ї альтернатив, тобто наскільки критичною (чутливою) є кожна альтернатива відносно вибраного елементу сусіднього вищого рівня ієрархії, тобто знайти величину найменшої зміни локальної ваги альтернативи відносно нього, що призводить до зміни ранжування альтернатив.

Наслідок 3. i-й елемент L_p-го рівня є стійким відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня, якщо $\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r} > 100\%$ виконується для $\forall\ i \in [1; N_{L_p}]$, $j \in [1; N_{L_p}]$, де порогове значення $\delta^{a\ \text{порог}}_{i,j,r}$ обчислюється за формулою (5).

ВИСНОВКИ

Запропоновано методологію виконання глобального аналізу чутливості рішення, отриманого методом аналізу ієрархій, на основі нового підходу до оцінювання властивостей елементів ієрархії, що дозволяє розширити можливості МАІ. Методологія містить дослідження і способи підвищення узгодженості експертних оцінок, оцінювання стійкості ваг окремих елементів задачі до неточностей та протиріч у експертній інформації, визначення областей змін ваг елементів, при яких не виникає зміни рангів альтернатив та знаходження критичних та стійких елементів задачі.

Розроблену методологію доцільно використовувати для дослідження достовірності розв'язання задач передбачення — задач оцінювання сценаріїв майбутнього розвитку складних систем як на національному та регіональному рівнях, так і на рівні окремих галузей промисловості чи великих організацій. Запропонована методологія може застосовуватися також для задач прийняття рішень щодо комплексних цільових програм та інноваційних проектів.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. — Киев: Наук. думка, 2002. — 381 с.
3. *Forman E., Selly M.A.* Decision By Objectives. На сайті www.expertchoice.com.
4. *Stam A., Silva P.D.* Stochastic judgements in the AHP: The measurement of rank reversal probabilities // Decision Sciences. — 1997. — **28**, № 3. — P. 655–688.
5. *Labib Ashraf W., Shah J.* Management decisions for a continuous improvement process in industry using the analytical hierarchy process // Work Study. — 2001. — **50**, № 5. — P. 189–193.
6. *Akomode O.J., Lees B., Irgens C.* Constructing customized models and providing information to support IT outsourcing decisions // Logistics Information Management. — 1998. — **11**, № 2. — P. 114–127.
7. *Davies M.* Adaptive AHP: a review of marketing applications with extensions // European Journal of Marketing. — 2001. — **35**, № 7/8. — P. 872–893.
8. *Bayazit O.* Use of AHP in decision-making for flexible manufacturing systems // Journal of Manufacturing Technology Management. — 2005. — **16**, № 7. — P. 808–819.
9. *Masood A.Badri, Mohamed H. Abdulla*. Awards of excellence in institutions of higher education: an AHP approach // International Journal of Educational Management. — 2004. — **18**, № 4. — P. 224–242.
10. *Godwin G. Udo*. Using analytic hierarchy process to analyze the information technology outsourcing decision // Industrial Management & Data Systems. — 2000. — **100**, № 9. — P. 421–429.
11. *Braglia M.* MAFMA: multi-attribute failure mode analysis // International Journal of Quality&Reliability Management. — 2000. — **17**, № 9. — P. 1017–1033.
12. *Partovi F.Y.* Determining what to benchmark: an analytic hierarchy process approach // International Journal of Operations &Production Management. — 1994. — **14**, № 6. —P. 25–39.
13. *Bevilacqua M. and Braglia M.* The analytic hierarchy process applied to maintenance strategy selection// Reliability Engineering & System Safety. — 2000. — **70**. — P. 71–83.
14. *Min Hokey, Min Hyesung.* Benchmarking the quality of hotel services: managerial perspectives // International Journal of Quality & Reliability Management. — 1997. — **14**, № 6. — P. 582–597.
15. *Програма* Expert Choice. На сайті www.expertchoice.com.
16. *Triantaphyllou E., Sanchez A.* A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision making methods // Decision Sciences. — 1997. — **28**, № 1. — P. 151–194.
17. *Недашківська Н.І.* Оцінювання реверсу рангів у методі аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 4. — С. 120–130.
18. *Згуровский М.З., Панкратова Н.Д.* Технологическое предвидение. — Киев: Политехника, 2005. — 156 с.
19. *Згуровский М.З., Панкратова Н.Д.* Системный анализ: проблемы, методология, приложения. — Киев: Наук. думка, 2005. — 743 с.

Надійшла 16.05.2006