МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

УДК 519.8

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФАХ

**Т.В. ЗАХОВАЛКО, Н.К. МАКСИШКО, В.А. ПЕРЕПЕЛИЦА**

Построена математическая модель задачи землепользования (рационального использования пахотных угодий) с применением аппарата гиперграфов. Проведено обоснование вычислительной сложности задачи, выделен ее полиномиально разрешимый подкласс и предложен соответствующий эффективный алгоритм ее решения.

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно, аппарат теории графов — мощное средство моделирования задач управления дискретными процессами и системами [1]. Однако нередки случаи, когда с помощью инструментария обыкновенных графов невозможно адекватно отразить в системном единстве сложную организацию внутренних взаимосвязей моделируемой системы, а, следовательно, достичь требуемой адекватности. Одним из путей разрешения создавшейся проблемной ситуации является использование инструментария гиперграфов [1–3]. Необходимость такого перехода к аппарату гиперграфов возникает в случае модификации известной задачи землепользования пахотными угодьями [4, 5].

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [5] математическая модель задачи землепользования представлена на 2-дольном графе. Вершинам первой (второй) доли соответствуют выращиваемые культуры (поля, т.е. пахотные угодья хозяйства). Множество ребер этого графа задает отношение возможности посева (размещения) определенной культуры на конкретном поле. Известна урожайность каждой культуры на каждом поле. Так как урожайность культуры зависит от качества земли, на которой она выращивается, то общая эффективность использования пахотных угодий (например, валовой выпуск) зависит от размещения культур по полям хозяйства. Структуру оптимального размещения удается получить, используя методы теории графов (обыкновенных).

В настоящей работе рассматривается постановка, в которой требуется учесть влияние на эффективность производства такого фактора, как удобрения. В этом случае недостаточно аппарата обыкновенных графов. Матема-

© *Т.В. Заховалко, Н.К. Максишко, В.А. Перепелица*, 2006

тический аппарат гиперграфов триаду «культура, поле, удобрение» позволяет адекватно представить 3-вершинным ребром, которое является элементом (ребром) гиперграфа. Напомним, что гиперграфом [1] называется пара $G=(V,E)$, где $V=\{v\}$ — множество вершин; $E=\{e\}$ — множество ребер и всякое ребро $e=(v_1,v_2,...,v_r)$ степени $\deg e=r$ есть $r$-элементное подмножество $\{v_1,v_2,...,v_r\}\subseteq V$.

Использование инструментария гиперграфов возможно при выполнении следующего условия: имеющийся запас удобрений разделен на «порции», каждая из которых используется полностью для какой-либо пары вида «культура — поле» из определенного для фиксированной порции перечня таких пар (в работе [5] этим парам соответствуют ребра 2-дольного графа). Список всех порций удобрений будем представлять в виде множества вершин — третьей доли.

Для математической формулировки задачи введем определения.

**Определение 1.** Гиперграф называется *l-однородным*, если все его ребра $e\in E$ имеют одну и ту же степень $\deg e=l$.

**Определение 2.** Гиперграф называется *r-дольным*, если его множество вершин V разбито на доли (подмножества) $V_s$, $s=\overline{1,r}$ так, что выполняются два условия : 1) всякая пара вершин из одной доли является несмежной; 2) у всякого ребра $e\in E$ каждая пара вершин $v'$, $v''\in e$ принадлежит различным долям.

Таким образом, математическая модель задачи землепользования в приведенной постановке базируется на 3-дольном 3-однородном гиперграфе $G=(V_1,V_2,V_3,E)$.

Вершинам первой доли $V_1 =\{v_1^1,v_2^1,...,v_k^1,...,v_m^1\}$ ) приписан индекс $k=\overline{1,m}$, соответствующий номерам выращиваемых культур; вершинам второй доли $V_2 =\{v_1^2,v_2^2,...,v_i^2,...,v_n^2\}$ — индекс $i=\overline{1,n}$, соответствующий номерам полей, $m\le n$; вершинам третьей доли $V_3^0=\{v_1^3,\ v_2^3,...,v_j^3,...,v_{n_3}^3\}$ — индекс $j=\overline{1,n_3}$, соответствующий порциям удобрений. В условиях ограниченного ресурса удобрений число его порций, как правило, строго меньше числа полей, т.е. $n_3<n$. Однако в дальнейшем будем полагать, что вторая $V_2$ и третья $V_3$ доли являются равномощными ($|V_2|=|V_3|=n$). Этого можно достичь путем пополнения множества $V_3^0$ подмножеством, состоящим из $(n-n_3)$ «пустых» порций удобрения.

Множество ребер $E=\{e\}$ определяется из следующего содержательного условия: если поле $i$ может быть отведено под культуру $k$, и при этом для пары $i$, $k$ допустимо внести $j$-ю порцию удобрения, то вершины $v_k^1\in V_1, v_i^2\in V_2, v_j^3\in V_3$ образуют ребро.

При поиске допустимого решения рассматриваемой задачи будем использовать такие определения.

**Определение 3.** *Звездой гиперграфа* $G=(V,E)$ называется его связная часть $z=(V_z,E_z)$, в которой всякая пара ребер $e',e''\in E_z$ пересекается в одной и той же вершине $v_0\in V$ и не пересекается ни в какой другой вершине $v\neq v_0$. При этом вершина $v_0$ называется *центром* звезды $z$, а число ребер $|E_z|$ — ее *степенью*.

**Определение 4.** Для заданных натуральных чисел $q_k$, $k=\overline{1,m}$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{m} q_k = n, \tag{1}$$

*допустимым покрытием* 3-дольного 3-однородного *гиперграфа* $G=$ $=(V_1,V_2,V_3,E)$ *звездами* является всякий его остовный подгиперграф $x=(V_1,V_2,V_3,E_x)$, состоящий из $m$ компонент связности, каждая из которых — звезда с центром в одной из вершин первой доли $V_1$. При этом звезда с центром $v_k^1\in V_1$ имеет степень, равную числу $q_k$, $1\le k\le m$.

Допустимое покрытие гиперграфа $G$ звездами в дальнейшем будем называть также допустимым решением. Множество всех допустимых решений (МДР) обозначим $X=X(G)=\{x\}$.

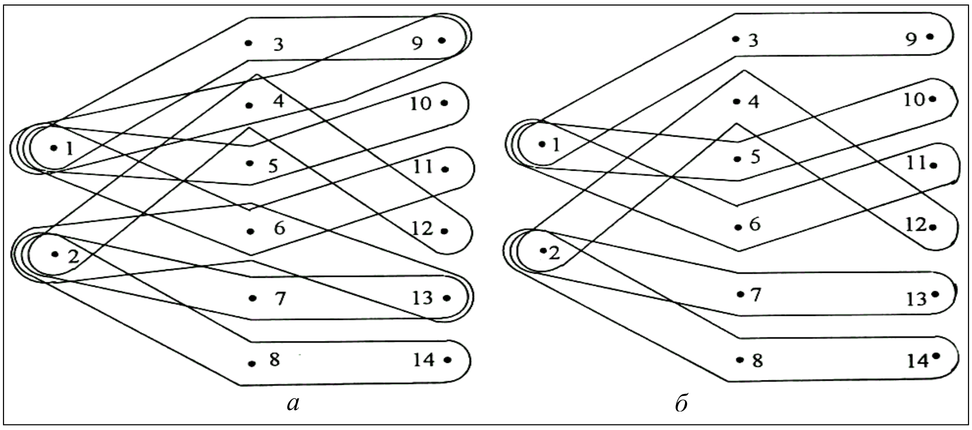


*Рис. 1.* 14-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф и покрытие его звездами

На рис. 1,*а* показан 14-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G=(V_1,V_2,V_3,E)$ с долями $V_1=\{1,2\}$, $V_2=\{3,4,5,6,7,8\}$, $V_3=\{9,10,11,12,13,14\}$ и множеством ребер $E=\{e_1,e_2,\dots,e_8\}$, где $e_1=(1,3,9)$, $e_2=(1,5,10)$, $e_3=(1,6,11)$, $e_4=(2,4,12)$, $e_5=(2,7,13)$, $e_6=(2,8,14)$, $e_7=(1,4,9)$, $e_8=(2,6,13)$.

На рис. 1,*б* для значений $m=2$, $q_1=q_2=3$, $n=6$ показано допустимое покрытие звездами гиперграфа на рис. 1,*а*.

Каждому ребру $e=\left(v_k^1,v_i^2,v_j^3\right)\in E$ гиперграфа $G=(V_1,V_2,V_3,E)$ приписано число $w(e)$ — так называемый вес ребра. В контексте содержательного смысла моделирования этот вес представляет собой тот или иной эффект (экономический, экологический и т.д.) от ожидаемого урожая культуры $k$, засеянной на поле $i$ при условии, что в почву этого поля внесена $j$-я порция удобрения.

Весом допустимого покрытия $x = (V_1, V_2, V_3, E_x)$ будем называть сумму весов всех входящих в него ребер

$$w(x) = \sum_{e \in E_x} w(e).$$

На МДР $X = X(G) = \{x\}$ определена целевая функция (ЦФ) вида MAXSUM или MINSUM

$$F(x) = w(x) \to \text{extr}, \qquad \text{extr} \in \{\min, \max\}. \tag{2}$$

Математическая постановка рассмотренной задачи землепользования состоит в нахождении такого допустимого покрытия гиперграфа звездами $x^0 \in X$, на котором данная ЦФ принимает требуемое экстремальное значение (min или max).

## О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФЕ

Рассматривая гиперграф $G = (V, E)$, будем использовать понятие «сочетание», которое означает какое-либо подмножество $S(t) \subseteq E$, состоящее из $t$ попарно непересекающихся ребер, $t \le |E|$.

**Определение 5.** Для $(nl)$-вершинного $l$-однородного гиперграфа его сочетание $S(n)$, состоящее из $n$ ребер, будем называть *совершенным сочетанием (СС).*

Для $3n$-вершинного 3-дольного 3-однородного гиперграфа

$$\overline{G} = (\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E}),\ \ \overline{V} = \{\overline{v}_t\},\ \ t = \overline{1,n},\ \ |\overline{V}_1| = |V_2| = |V_3| = n \tag{3}$$

какое-либо его СС условимся обозначать $\overline{x} = (\overline{V}_1, V_2, V_3, E_{\overline{x}})$, $E_{\overline{x}} \subseteq \overline{E}$. $\overline{X} = \overline{X}(\overline{G}) = \{\overline{x}\}$ — множество всех СС на гиперграфе вида (3).

Под задачей о совершенном сочетании будем понимать задачу нахождения во взвешенном гиперграфе вида (3) такого СС, на котором ЦФ вида (2) достигает требуемого экстремума.

**Примечание 1.** Задача о совершенном сочетании на невзвешенном гиперграфе описана в работе [7] в комбинаторной постановке под названием «трехмерное сочетание». Ей присвоено обозначение «3-С», и в определенных выше терминах она формулируется как задача распознавания: содержится ли 3-мерное СС в заданном подмножестве $E$ декартова произведения $\overline{V}_1 \times V_2 \times V_3$ долей гиперграфа (3).

В определении 4 задача покрытия звездами ($m$+2$n$)-вершинного 3-дольного 3-однородного гиперграфа

$$G = (V_1, V_2, V_3, E),\ \ |V_1| = m,\ \ |V_2| = |V_3| = n,\ \ m < n \tag{4}$$

сформулирована с учетом требования (1).

Эта задача сводится к задаче о СС на гиперграфе вида (3). Алгоритм $\alpha_1$, реализующий это сведение, состоит из следующих этапов.

1. С учетом (1) для каждого $k = \overline{1, m}$ вершине $v_k^1 \in V_1$ ставим в соответствие новое множество $\overline{V}_k = \{\overline{v}_t\}$, состоящее из $q_k$ вершин $\overline{v}_t$, перенумерованных индексом $t = \overline{N_{k-1} + 1,\, N_k}$, где $N_k = \sum_{r=1}^{k} q_r$, т.е $N_k = N_{k-1} + q_k$, $N_0 = 0$.

2. В гиперграфе (4) множество ребер $E$ разбивается на $m$ подмножеств $E(v_k^1)$, $k = \overline{1, m}$, каждое из которых состоит из ребер, инцидентных вершине $v_k^1 \in V_1$.

3. Для каждой вершины $v_k^1 \in V_1$, $k = \overline{1, m}$ с учетом (1) реализуется этап $q_k$-кратного «клонирования», полученного на этапе 2 множества $E(v_k^1)$. Суть операции клонирования состоит в том, что при фиксированном $k$ для каждого значения индекса $t = \overline{N_{k-1} + 1,\, N_k}$ строится новое множество ребер $\overline{E}(\overline{v}_t)$, которое получается в результате замены в ребрах $e = (v_k^1, v_i^2, v_j^3) \in$ $\in E(v_k^1)$ вершины $v_k^1$ на вершину $\overline{v}_t$.

4. Построенный на базе гиперграфа (4) новый $3n$-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф вида (3) (будем в дальнейшем называть его производным гиперграфом) образуется путем объединения всех полученных на этапе 3 новых множеств ребер $\overline{E}(\overline{v}_t)$ по всем значениям $k = 1, 2, ..., m$ и всем индексам $t = N_{k-1} + 1,\, N_{k-1} + 2,\, ...,\, N_k$ (рис. 2).

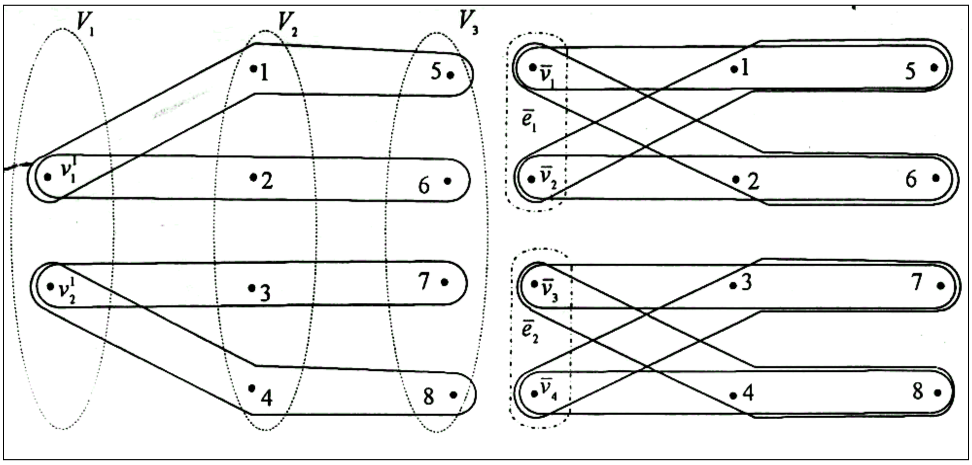


*Рис. 2.* 3-дольный 3-однородный $(m+2n)$-вершинный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ для $m = 2$, $n = |V_2| = |V_3| = 4$ (*а*); производный от него гиперграф $\overline{G} = (\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E})$ (*б*)

Оценим соотношение мощностей множеств ребер $|E|$ и $|\overline{E}|$ исходного гиперграфа $G$ вида (4) и производного от него гиперграфа $\overline{G}$ вида (3). Очевидно, что мощность $\left|E\right| = \sum_{k=1}^{m} \deg v_k^1$ , где $\deg v$ — степень вершины $v$. Из алгоритма построения гиперграфа $\overline{G}$ с учетом (1) вытекают следующие соотношения:

$$\left|\overline{E}\right| = \sum_{k=1}^{m} q_k \deg v_k^1 \le q^0 \sum_{k=1}^{m} \deg v_k^1 ,$$

где $q^0 = \max_{1 \le k \le m} q_k$. Отсюда с учетом равенства (1) получаем верхнюю оценку для числа ребер в производном гиперграфе $\overline{G}$

$$\left|\overline{E}\right| \le q^0 \left|E\right| \le n\left|E\right|. \qquad (5)$$

**Примечание 2.** Из определения этапов 1–4 представленного выше алгоритма $\alpha_1$ следует, что в процессе его работы каждый элемент гиперграфов $G$ и $\overline{G}$ рассматривается конечное число раз. Отсюда с учетом оценки (5) можем записать равенство $|\overline{E}| \le nO(|E|)$ и сформулировать утверждение о полиномиальной вычислительной сложности алгоритма $\alpha_1$ построения гиперграфа $\overline{G}$, производного от гиперграфа $G$.

Пусть для гиперграфа $G$ вида (4) по завершении этапа 4 получен производный от него гиперграф $\overline{G}$ вида (3) и на $\overline{G}$ выделено СС $\overline{x}$, а также пусть с учетом определения этапов 1–4 в СС $\overline{x}$ известно разбиение множества вершин $\overline{v}_t$ , $t = \overline{1, n}$ первой доли $\overline{V}_1$ на подмножества $\overline{V}_k = \{\overline{v}_t\}$, $t = \overline{N_{k-1} + 1, N_k}$ , $N_k = N_{k-1} + q_k$, $k = \overline{1, m}$. Каждое из подмножеств $\overline{V}_k$, $1 \le k \le m$ представим в виде фиктивного ребра $\overline{e}_k = \left(\overline{v}_t, \overline{v}_{t+1}, ..., \overline{v}_{t+q_k-1}\right)$, $t = N_{k-1} + 1$ (на рис. 2,*б* фиктивные ребра $\overline{e}_k$, $k = 1,2$ отмечены пунктиром). Применив к этому ребру операцию стягивания [6] в одну вершину $v_k$, получим звезду, которая с учетом (1) имеет степень $q_k$ и состоит из ребер множества $E\left(v_k^1\right)$. Отсюда с учетом примечания 2 вытекает, что в терминах [7] является справедливой следующая

**Лемма 1.** Задача покрытия звездами 3-дольного 3-однородного гиперграфа $G$ полиномиально сводится к задаче о совершенном сочетании гиперграфа $\overline{G}$, производного от $G$.

Рассмотрим вопрос о полиномиальном обратном сведении задачи о СС к задаче покрытия гиперграфа звездами. Рассмотрим гиперграф $G = \left(V_1, V_2, V_3, E\right)$ вида (4) и производный от него $\overline{G} = \left(\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E}\right)$ вида (3). Пусть в гиперграфе $G$ выделено допустимое покрытие звездами $x = \left(V_1, V_2, V_3, E_x\right)$. Это покрытие состоит из $m = \left|V_1\right|$ компонент связности, каждая из которых представляет собой звезду с центром в некоторой вершине из $V_1$. Звезду с центром в $v_k^1 \in V_1$ представляем в виде подмножества ребер $E\left(v_k^1\right) \subseteq E$, $E\left(v_k^1\right) = \left\{e_s^k\right\}$, $s = \overline{1, q_k}$ , где параметр $q_k$, $1 \le k \le m$, принимает значение согласно определению 2. По определению этапа 3 в производном гиперграфе $\overline{G}$ вершине $v_k^1 \in V_1$ соответствует $q_k$ множеств ребер $\overline{E}(v_t) \subset \overline{E}$, $t = \overline{N_{k-1}+1,\ N_k}$, $N_k = N_{k-1} + q_k$. Каждое из этих множеств получено путем «клонирования» множества $E(v_k^1) \subseteq E$.

Обозначим $\alpha_2$ алгоритм, который в гиперграфе $\overline{G}$ строит СС $\overline{x} = (\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E}_{\overline{x}})$, соответствующее допустимому покрытию $x$ гиперграфа $G$ звездами. Алгоритм $\alpha_2$ состоит из этапов $\alpha_2^k$, $k = 1,2,...,m$, этап $\alpha_2^k$ — из шагов $s = 1,2,...,q_k$. Результатом работы этапа $\alpha_2^k$ является выделенное в гиперграфе $\overline{G}$ сочетание из $q_k$ ребер

$$S_k = \{\overline{e}_s^k\},\ s = \overline{1, q_k},\ S_k \subset \overline{E}.$$

На шаге $s \in \{1,2,...,q_k\}$ в множестве $\overline{E}(v_t)$, $t = N_{k-1} + s$ выделяется ребро $\overline{e}_s^k$, представляющее собой «клон» ребра $e_s^k \in E(v_k^1)$ в гиперграфе $G$. Выделенные по завершении этапа $\alpha_2^k$ ребра $\overline{e}_s^k$, $s = 1, 2, ..., q_k$ не пересекаются в силу следующих условий:

- Ребра $e_s^k$, составляющие звезду $E(v_k^1)$ и соответствующие выделенным ребрам $\overline{e}_s^k$, попарно не пересекаются в вершинах долей $V_2$ и $V_3$. Следовательно, выделенные ребра $\overline{e}_s^k$ не имеют общих вершин в этих долях.

- Ребра, выделенные по завершении этапа $\alpha_2^k$, не пересекаются по вершинам доли $\overline{V}_1$ в соответствии с определением шагов этого этапа.

Согласно аналогичным условиям, ребра, принадлежащие различным сочетаниям $S_{k_1}$ и $S_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$, также не пересекаются.

Таким образом, результатом работы этапа $\alpha_2^k$ является состоящее из $q_k$ ребер сочетание $S_k$. Объединение этих сочетаний $\bigcup_{k=1}^{m} S_k$ состоит из $n = \sum_{k=1}^{m} q_k$ ребер, образующих СС гиперграфа $\overline{G}$. Следовательно, если $\overline{G}$ представляет собой гиперграф, производный от 3-дольного 3-однородного гиперграфа $G$, то задача о СС на $\overline{G}$ полиномиально сводится к задаче покрытия гиперграфа $G$ звездами.

Из сказанного выше с учетом примечания 2 и леммы 1 вытекает справедливость следующей леммы.

**Лемма 2**. Задача покрытия звездами гиперграфа вида (4) и задача о совершенном сочетании на гиперграфе вида (3) являются взаимно сводимыми с полиномиальной сложностью.

Для задачи о СС на 3-дольном 3-однородном гиперграфе в работе [7] предложено обоснование ее NP-полноты в случае, если она формулируется как проблема распознавания. Тогда с учетом леммы 2 получаем следующую оценку вычислительной сложности в общепринятых терминах [7].

**Теорема 1.** Задача распознавания покрытия 3-дольного 3-однородного гиперграфа звездами является NP-полной, а в оптимизационной постановке эта задача является NP-трудной.

## ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ЗЕМЛЕПОЛЬЗОВАНИЯ НА ГИПЕРГРАФЕ

Из теоремы 1 следует, что к настоящему времени отсутствуют полиномиальные алгоритмы для задач покрытия гиперграфов звездами (совершенными сочетаниями). Отсюда очевидна актуальность нахождения полиномиально разрешимых подклассов этих задач. Условия, определяющие один из таких полиномиально разрешимых подклассов, состоят в следующем.

1. Математическая постановка задачи о покрытии гиперграфа звездами рассматривается на множестве всех 3-дольных 3-однородных гиперграфов $G=(V_1, V_2, V_3, E)$ вида (4), каждый из которых удовлетворяет условию: если множество $E$ содержит ребро $e_0=\left(v^1_{k_0}, v^2_{i_0}, v^3_{j_0}\right)$, то $E$ содержит все $n$ ребер вида $e_0=\left(v^1_{k_0}, v^2_{i_0}, v^3_{j}\right)$, $j=1,2,\dots,n$.

2. Для каждого ребра $e=\left(v^1_{k}, v^2_{i}, v^3_{j}\right)\in E$ его вес $w(e)$ определяется равенством вида $w(e)=a(k,i)+b(k,j)$.

Содержательный смысл условия 2 можно проиллюстрировать в терминах экономико-математической модели землепользования: внесение конкретной порции $j$ удобрения повышает урожай на процент, одинаковый для рассматриваемой культуры и зависящий только от номера $j$ вносимой порции.

Покажем, что при выполнении этих двух условий нахождение оптимального решения $x^0\in X(G)$ сводится к решению двух задач о назначениях размерности $n$, откуда вычислительная сложность нахождения $x^0$ ограничена сверху полиномом $O\left(n^3\right)$.

Рассмотрим гиперграф $G$, удовлетворяющий условиям 1 и 2, и построим производный от него гиперграф $\overline{G}=\left(\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E}\right)$. Для гиперграфа $\overline{G}$ построим два двудольных графа $G^{(1)}=\left(\overline{V}_1, V_2, E^{(1)}\right)$ и $G^{(2)}=\left(\overline{V}_1, V_3, E^{(2)}\right)$, определяемых следующим образом.

Множество $E^{(1)}=\left\{e^1\right\}$ содержит ребро $e^1=\left(\overline{v}_t, v_i\right)$, $\overline{v}_t\in\overline{V}_1$, $v_i\in V_2$ тогда и только тогда, когда гиперграф $\overline{G}$ содержит хотя бы одно ребро вида $e=\left(\overline{v}_t, v_i, v_j\right)$. Множество $E^{(2)}=\left\{e^2\right\}$ содержит ребро $e^2=\left(\overline{v}_t, v_j\right)$, $\overline{v}_t\in\overline{V}_1$, $v_j\in V_3$ тогда и только тогда, когда гиперграф $\overline{G}$ содержит хотя бы одно ребро вида $e=\left(\overline{v}_t, v_i, v_j\right)$. Пример приведен на рис. 3.

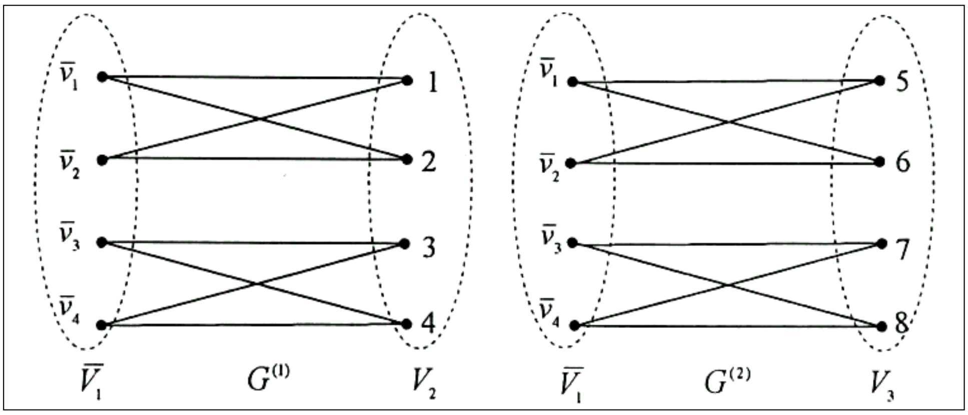


*Рис. 3.* Двудольные графы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, построенные соответственно для гиперграфа $\overline{G}$ на рис. 2,*б*

**Примечание 3**. Поскольку в исходном гиперграфе $G$ отсутствуют изолированные вершины, то из сформулированного выше условия 1 следует, что двудольный граф $G^{(2)}$ является полным.

Обозначим $\Gamma_1 = \{G\}$ множество всех 3-дольных гиперграфов, каждый из которых удовлетворяет представленному выше условию 1; $\overline{\Gamma}_1 = \{\overline{G}\}$ — множество всех 3-дольных 3-однородных гиперграфов с равномощными долями, каждый из которых является производным от некоторого гиперграфа $G \in \Gamma_1$.

Пусть на графах $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ выделены соответственно совершенные паросочетания (СПС) [6] $x^{(1)} = \left(\overline{V}_1, V_2, E_{x^{(1)}}\right)$ и $x^{(2)} = \left(\overline{V}_1, V_3, E_{x^{(2)}}\right)$. В этих обозначениях является справедливой следующая лемма.

**Лемма 3.** Если двудольные графы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ построены для какого-либо гиперграфа $\overline{G} \in \overline{\Gamma}_1$, то всякая пара выделенных на них СПС $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ однозначно определяет собой некоторое СС $\overline{x}$ на гиперграфе $\overline{G}$.

**Доказательство**. Рассмотрим какое-либо ребро $e_0^1 = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{i_0}\right)$ из множества $E^{(1)}$, входящее в СПС $x^{(1)}$. Из условия 1 и примечания 3 вытекает, что данный гиперграф $\overline{G}$ содержит все $n$ ребер вида $e = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{i_0}, v_j\right)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, каким бы ни было ребро $e_0^2 = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{j_0}\right)$ в СПС $x^{(2)}$, для пары

$$e_0^1 = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{i_0}\right) \in E_{x^{(1)}},\ e_0^2 = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{j_0}\right) \in E_{x^{(2)}} \tag{6}$$

в гиперграфе $\overline{G}$ существует ребро $e_0 = \left(\overline{v}_{t_0}, v_{i_0}, v_{j_0}\right)$. Отсюда, рассматривая пару СПС $x^{(1)} = \left(\overline{V}_1, V_2, E_{x^{(1)}}\right)$, $x^{(2)} = \left(\overline{V}_1, V_3, E_{x^{(2)}}\right)$, получаем, что объединение множеств их ребер $\left(E_{x^{(1)}} \cup E_{x^{(2)}}\right)$ образует $n$ пар пересекающихся ребер вида (6). Эти $n$ пар вида (6) в гиперграфе $\overline{G}$ определяют собой $n$ не пересекающихся ребер, и, следовательно, образуют СС.

Лемма 3 доказана.

Пусть $\overline{X} = \overline{X}(\overline{G}) = \{\overline{x}\}$ — множество всех СС гиперграфа $\overline{G}$; $X(G^{(1)}) = \{x^{(1)}\}$ и $X(G^{(2)}) = \{x^{(2)}\}$ — множества всех СПС соответственно на графах $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. По аналогии с доказательством леммы 3 нетрудно показать, что является справедливой следующая лемма.

**Лемма 4.** В условиях леммы 3 всякое СС $\overline{x} \in \overline{X}(\overline{G})$ однозначно определяет собой некоторую пару СПС $x^{(1)} \in X(G^{(1)})$, $x^{(2)} \in X(G^{(2)})$.

Рассматривая декартово произведение $X(G^{(1)}) \times X(G^{(2)})$, определим множество всех пар СПС для пары графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$.

$$X(G^{(1)}, G^{(2)}) = X(G^{(1)}) \times X(G^{(2)}) = \{(x^{(1)}, x^{(2)})\}.$$

Из лемм 3 и 4 следует, что является справедливой следующая лемма.

**Лемма 5.** Для всякого гиперграфа $\overline{G} \in \overline{\Gamma}_1$ и соответствующей ему пары двудольных графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\overline{X}(\overline{G})$ и $X(G^{(1)}, G^{(2)})$.

Рассмотрим СС $\overline{x} = (\overline{V}_1, V_2, V_3, \overline{E}_{\overline{x}})$ и соответствующую ему пару $x^{(1)} = (\overline{V}_1, V_2, E_{x^{(1)}})$ и $x^{(2)} = (\overline{V}_1, V_3, E_{x^{(2)}})$. Используя обозначения условия 2, будем говорить, что в графах $G^{(1)} = (\overline{V}_1, V_2, E^{(1)})$ и $G^{(2)} = (\overline{V}_1, V_3, E^{(2)})$ ребрам $e^1 = (\overline{v}_t, v_i) \in E^{(1)}$ и $e^2 = (\overline{v}_t, v_j) \in E^{(2)}$ приписаны веса соответственно $w(e^1) = a(k,i)$ и $w(e^2) = b(k,j)$. В этих обозначениях по аналогии с (2) на множествах $\overline{X}(\overline{G})$, $X(G^{(1)})$, $X(G^{(2)})$ определены ЦФ.

$$F(\overline{x}) = \sum_{e \in E_{\overline{x}}} w(e) \to \max, \tag{7}$$

$$F(x^{(1)}) = \sum_{e^1 \in E_{x^{(1)}}} w(e^1) \to \max, \tag{8}$$

$$F(x^{(2)}) = \sum_{e^2 \in E_{x^{(2)}}} w(e^2) \to \max. \tag{9}$$

Из леммы 5 и свойства 2 следует, что ЦФ (7) обладает свойством аддитивности [8]

$$F(\overline{x}) = F(x^{(1)}) + F(x^{(2)}),$$

где $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — пара СПС, которая согласно леммам 3–5 определяет СС $\overline{x}$ в рассматриваемом гиперграфе $\overline{G}$.

Обозначим $x_0^{(1)}$ и $x_0^{(2)}$ оптимальные по значению ЦФ (8) и (9) СПС соответственно на графах $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$; $\overline{x}_0$ — оптимальное по ЦФ (7) СС на гиперграфе $\overline{G}$ . В силу вышеуказанного свойства аддитивности для этих оптимумов выполняется равенство

$$F\left(x_0^{(1)}\right)+F\left(x_0^{(2)}\right)=F(\bar{x}_0). \tag{10}$$

Для нахождения оптимальных СПС на двудольных графах вида $G^{(1)}$ или $G^{(2)}$ существуют достаточно эффективные алгоритмы [9], вычислительная сложность которых составляет $O\left(n^3\right)$. Отсюда с учетом равенства (10) и леммы 2 получаем, что является справедливой следующая теорема.

**Теорема 2.** Задача о покрытии звездами гиперграфов из множества $\Gamma_2$ и задача о совершенных сочетаниях на гиперграфах из множества $\overline{\Gamma}_1$ разрешимы с вычислительной сложностью $O\left(n^3\right)$.

Таким образом, теорема 2 определяет полиномиально разрешимый подкласс задачи о покрытии гиперграфа звездами и задачи о совершенных сочетаниях на гиперграфах, которые в общем случае являются NP-трудными.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. *Лекции* по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
2. *Зыков А.А.* Гиперграфы // Успехи математических наук. — 1972. — № 29 (6). — С. 89–154.
3. *Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С.* Гиперграфы в автоматизации проектирования дискретных устройств. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1991. — 248 с.
4. *Сергиенко И.В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев.: Наук. думка, 1988. — 472 с.
5. *Максишко Н.К., Перепелица В.А, Заховалко Т.В.* Теоретико-графовая эколого-экономическая модель задачи землепользования // Вісн. Східноукраїнського національного ун-ту ім. В.Даля. — 2002. — № 2 (48). — С. 92–100.
6. *Зыков А.А.* Основы теории графов. — М.: Наука, 1987. — 384 с.
7. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
8. *Математика*. Большой энциклопедический словарь. 3-е изд. / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая российская энциклопедия, 1998. — 848 с.
9. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 512 с.


*Поступила 30.08.2005*