УДК 519.872 (621.321.1)

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ СО СКЛАДОМ И КОРРЕЛИРОВАННЫМ МАРКОВСКИМ ГРУППОВЫМ ПОТОКОМ ЗАЯВОК С РАЗНОТИПНЫМИ КАТАСТРОФИЧЕСКИМИ СБОЯМИ

А.В. КАЗИМИРСКИЙ

Рассмотрена система со складом, моделирующая ситуации, когда во время отсутствия требований обслуживающее устройство производит «заготовки», которые хранятся на «складе заготовок». Время обслуживания требования зависит от количества заготовок на складе на момент начала обслуживания. Катастрофа — это специальный вид заявки, уничтожающий все заявки в очереди или на складе. Описана система с мгновенным восстановлением после прихода катастрофы.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему BMAP/G/1 со складом и марковским потоком разнотипных катастрофических сбоев.

Система со складом моделирует множество ситуаций, возникающих при анализе производственных процессов, проектировании информационных и телекоммуникационных систем. Предполагается, что во время отсутствия требований обслуживающее устройство производит «заготовки», которые хранятся на «складе заготовок». Время обслуживания зависит от количества заготовок на складе в момент начала обслуживания. Если обслуживание требования было начато при непустом складе, то после его окончания количество заготовок на складе убывает. В работе [1] рассмотрена система BMAP/G/1 с конечным складом заготовок.

Рассмотрим пример, когда система со складом моделирует работу сложного узла информационной или телекоммуникационной сети (рис. 1). Процесс выполнения задания в вычислительной системе состоит из кодирования данных, их передачи и раскодирования. Последовательность заданий в системе известна заранее, но конкретное время начала выполнения неизвестно. Например, по причине занятости принимающей системы и т.п. На стороне передающей системы может быть выполнено предварительное кодирование данных с помещением их на «склад» еще перед поступлением соответствующих заданий на выполнение. Таким образом, когда появится возможность передачи данных, то будут переданы уже закодированные данные со склада. Вместе с тем, если задержек перед выполнением заданий не будет, то кодирование произойдет непосредственно при отправке, и необходимости в использовании склада не будет.

Системы массового обслуживания с катастрофическими сбоями являются разновидностью систем с негативными заявками. Предполагается, что в них наряду с входящим потоком требований существует и поток их отмены, называемый потоком негативных заявок. Катастрофический сбой — это специальный вид негативной заявки, который уничтожает все заявки в очереди и, возможно, выводит из строя на некоторое время обслуживающий прибор. Теория сетей массового обслуживания с отрицательными заявками была создана и развита в работах Э. Джеленбе и соавторов [2–6]. Подробный обзор сетей и систем с отрицательными заявками проведен П. Бочаровым и В. Вишневским [7], Х. Арталехо [8]. Системы с потоком катастрофических сбоев очень близки к стохастическим системам с очищением (см., например, [9,10]). А. Чен и Э. Реншо [11] рассмотрели систему M/M/1 с простейшим потоком катастрофических сбоев. Г. Джейн и К. Сигман [12] исследовали систему M/G/1 с простейшим потоком катастроф. А. Дудин и С. Нишимура [13,14] рассмотрели более сложную систему BMAP/SM/1 с марковским потоком катастрофических сбоев. А. Дудин и А. Каролик [15] рассмотрели систему BMAP/SM/1 с марковским потоком катастроф и немгновенным восстановлением. А. Дудин и О. Семенова [16] предложили устойчивый алгоритм для расчета стационарных вероятностей в системе BMAP/SM/1 с марковским потоком катастрофических сбоев. К. Ли и И. Жао [17] рассмотрели систему BMAP/G/1 с марковским потоком катастрофических сбоев и негативных требований, отменяющих обслуживание. Я. Шин [18] рассмотрел систему BMAP/G/1 с марковским потоком катастрофических сбоев, где катастрофа может приходить в потоке заявок.

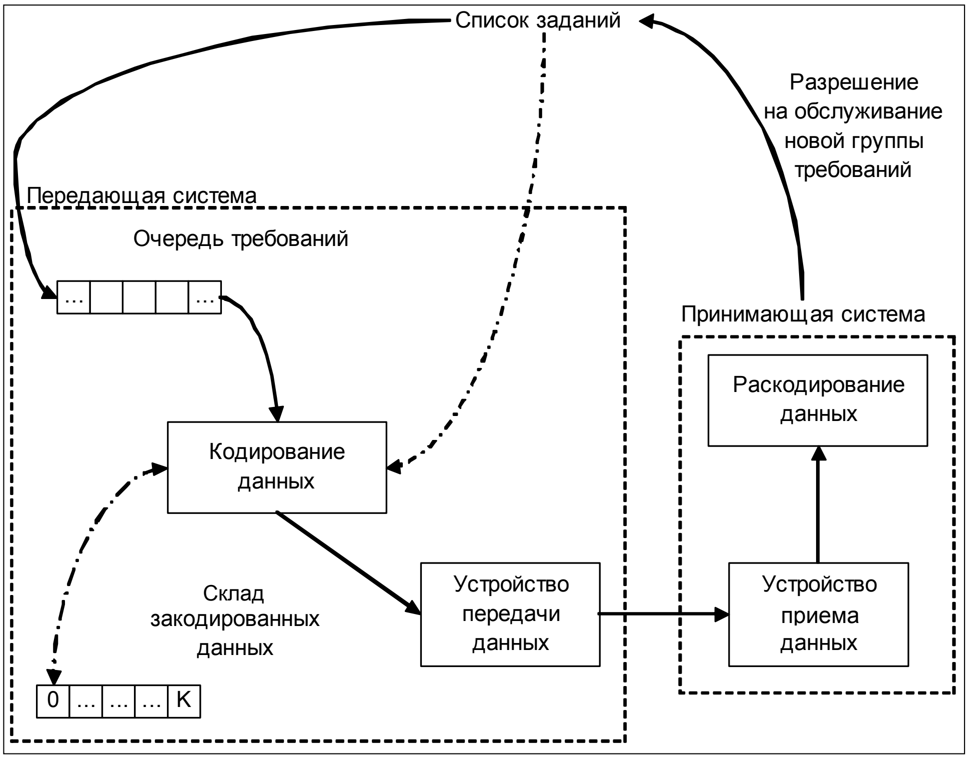

Рис. 1. Схема системы приема-передачи данных

В рассматриваемой системе предполагается наличие трех типов катастрофических сбоев, которые могут поступать во входящем потоке требований.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему BMAP/G/1 со складом и марковским потоком разнотипных катастрофических сбоев. В данной системе предполагается наличие бесконечного буфера для требований и склада заготовок конечного размера $0 \le K < +\infty$. Когда система оказывается пустой, то начинается производство заготовки, которое может быть прервано входящей группой требований, иначе — по окончании производства заготовка помещается на склад, и начинается производство новой. Время обслуживания требования зависит от количества заготовок на складе на момент начала обслуживания и имеет функцию распределения $B^{(j)}(t)$, $t \ge 0$, $j = 0,1,...,K$ с конечными начальными моментами $b_i^{(j)} = \int\limits_0^\infty t^i dB^{(j)}(t)$, $i \ge 0$. После окончания обслуживания требования число заготовок на складе убывает на единицу. Время производства заготовки зависит от количества заготовок на складе в момент начала производства и имеет функцию распределения $C^{(j)}(t)$, $t \ge 0$, $j = 0,1,...,K-1$ с конечными начальными моментами $c_i^{(j)} = \int\limits_0^\infty t^i dC^{(j)}(t)$, $i \ge 0$. При заполненном складе производство заготовок прекращается.

В систему поступает марковский поток катастрофических сбоев трех типов:

1. Опустошение склада заготовок.
2. Опустошение буфера.
3. Опустошение склада заготовок и буфера.

При поступлении катастрофы типа 1 во время производства заготовки оно прерывается, и все заготовки, находящиеся в данный момент на складе, теряются.

При поступлении катастрофы типа 1 во время обслуживания требования, начатого при непустом складе заготовок, склад опустошается. Требование, которое обслуживалось в момент прихода катастрофы, с вероятностью $0 \le s^{(1)} \le 1$ остается в системе, и его обслуживание начинается заново, с вероятностью $1 - s^{(1)}$ уходит из системы.

При поступлении катастрофы типа 2 во время обслуживания требования обслуживание прерывается. Буфер опустошается, требование, которое находилось в обслуживании в момент прихода катастрофы, теряется. Заготовка, участвовавшая в обслуживании в момент прихода катастрофы, с вероятностью $0 \le s^{(2)} \le 1$ остается на складе, с вероятностью $1 - s^{(2)}$ исчезает.

При поступлении катастрофы типа 3 в систему в любой момент времени обслуживание требования или производство заготовки прерываются, буфер и склад опустошаются.

После поступления каждой из катастроф происходит мгновенное восстановление обслуживающего устройства.

В рассматриваемой системе марковский входящий поток требований и катастроф задается следующим образом.

Пусть имеется цепь Маркова с непрерывным временем ν_t, $t \ge 0$ и конечным пространством состояний $\{0,1,...,W\}$, которую назовем управляющим процессом входящего потока. Время пребывания процесса ν_t в состоянии $\nu = 0,1,...,W$ имеет показательное распределение с параметром λ_ν, $\nu = 0,1,...,W$. После того как пребывание в состоянии ν заканчивается, процесс ν_t скачкообразно переходит в состояние $\nu' = 0,1,...,W$. При этом с заданной вероятностью $p_0(\nu,\nu')$ происходит изменение состояния процесса ν_t без прихода группы требований или катастрофы, с вероятностью $p_k(\nu,\nu')$, $k \ge 1$ приходит группа из k запросов, и с вероятностью $p^{(i)}(\nu,\nu')$, $i = 1,2,3$ приходит катастрофа типа i. Предполагается, что скачок из любого состояния в самого себя без генерации запросов или катастроф невозможен, т.е. $p_0(\nu,\nu) = 0$, $\nu = 0,1,...,W$. Входящий поток полностью характеризуется размерностью $W+1$ управляющего процесса, интенсивностями λ_ν времен пребывания этого процесса в своих состояниях и набором вероятностей $p_k(\nu,\nu')$, $p^{(i)}(\nu,\nu')$, $k \ge 0$, $i = 1,2,3$, $\nu,\nu' = 0,1,...,W$. Предполагается, что выполняется условие нормировки

$$\sum_{\nu'=0}^{W}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\nu,\nu') + \sum_{i=1}^{3} p^{(i)}(\nu,\nu')\right) = 1, \ \nu = 0,1,...,W .$$

Составим матрицы D_k, $k \ge 0$ и $D^{(i)}$, $i = 1,2,3$ размера $(W+1)\times(W+1)$, элемент $(D_k)_{\nu,\nu'}$ и $\left(D^{(i)}\right)_{\nu,\nu'}$ которых задается следующим образом:

$$(D_0)_{\nu,\nu'} = \begin{cases} \lambda_\nu p_0(\nu,\nu'), & \nu \ne \nu', \quad \nu,\nu' = 0,1,...,W, \\ -\lambda_\nu, & \nu = \nu', \quad \nu = 0,1,...,W, \end{cases}$$

$$(D_k)_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu p_k(\nu,\nu'), \ \nu,\nu' = 0,1,...,W, \ k \ge 0,$$

$$\left(D^{(i)}\right)_{\nu,\nu'} = \lambda_\nu p^{(i)}(\nu,\nu'), \ \nu,\nu' = 0,1,...,W, \ i = 1,2,3 .$$

Предполагается, что в системе всегда присутствует поток катастроф типа 2 или 3, т.е. $D^{(2)} \ne 0$ или $D^{(3)} \ne 0$.

В дальнейшем используется матричная производящая функция $D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k$, $|z| \le 1$. Несложно видеть, что

$$D(1)\mathbf{1} + \sum_{i=1}^{3} D^{(i)}\mathbf{1} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{1}$ ($\mathbf{0}$) — вектор-столбец, состоящий из единиц (нулей).

Интенсивность входящего потока требований λ и интенсивности потоков катастрофических сбоев $\gamma^{(i)}$ вычисляются следующим образом: $\lambda = \boldsymbol{\theta} D'(1)\mathbf{1}$, $\gamma^{(i)} = \boldsymbol{\theta} D^{(i)}\mathbf{1}$, $i = \overline{1,3}$, где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор-строка, которая является единственным решением системы линейных уравнений

$$\boldsymbol{\theta}\left(D(1)+\sum\nolimits_{i=1}^{3} D^{(i)}\right)=\mathbf{0}^T\ ,\ \boldsymbol{\theta}\mathbf{1}=1\,.$$

Данный поток является марковским потоком разнотипных требований (Marked Markovian Arrival Process — MMAP). Впервые MMAP-поток рассмотрен в работе [19]. Он является расширением группового марковского потока требований (Batch Markovian Arrival Process — BMAP), введенного в [20].

2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Исследуем процесс с непрерывным временем $\xi_t=(i_t, j_t, \nu_t)$, $t\ge 0$, где $i_t=0,1,...$ — число требований в буфере; $j_t=0,1,...,K$ — число заготовок на складе; $\nu_t=0,1,...,W$ — состояние управляющего процесса входящего потока требований и катастроф в момент $t\ge 0$.

Рассмотрим процесс ξ_t, $t\ge 0$ в моменты времени t_n+0, $n\ge 1$, $0\le t_1<t_2<...<t_n<...$:

- начало обслуживания требования;
- начало производства заготовки;
- приход катастрофы любого типа.

Несложно убедиться, что процесс с дискретным временем $\xi_n=\xi_{t_n}$, $n\ge 1$ является цепью Маркова.

Предположим, что существует стационарное распределение цепи Маркова ξ_n, $n\ge 1$

$$\pi_{i,j,\nu}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{i_n=i, j_n=j, \nu_n=\nu\},\ i\ge 0\ ,\ j=0,1,...,K\ ,\ \nu=0,1,...,W\ .$$

Покажем, что при наличии в системе ненулевого потока катастроф типа 2 или 3 стационарное распределение цепи Маркова ξ_n, $n\ge 1$ существует при любой загрузке в системе.

Упорядочим стационарные вероятности $\pi_{i,j,\nu}$ в лексикографическом порядке и получим векторы

$$\boldsymbol{\pi}_{i,j}=(\pi_{i,j,0},...,\pi_{i,j,W}),\ i\ge 0\ ,\ \ j=0,1,...,K\ ,$$

$$\boldsymbol{\pi}_i=(\boldsymbol{\pi}_{i,0},...,\boldsymbol{\pi}_{i,K}),\ i\ge 0\ .$$

Введем производящую функцию

$$\hat{\Pi}(z)=\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{\pi}_i z^{i-1}\ ,\ \ |z|\le 1\ .$$

Введем также обозначения

$\overline{K}=K+1$, $\overline{W}=W+1$; $(A)_{i,j}$ — элемент, находящийся на пересечении i-й строки и j-го столбца некоторой матрицы A.

Лемма 1. Система уравнений равновесия для вектора стационарных вероятностей $(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, ...)$ цепи Маркова ξ_n, $n \geq 1$ может быть записана как

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, ...)\begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & \cdots \\ H + Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & \cdots \\ H & Y_0 & Y_1 & Y_2 & \cdots \\ H & 0 & Y_0 & Y_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, ...),$$

где

$$V_0 = \mathrm{A} \times \left(E_{\text{production}} \otimes I_{\overline{W}}\right) + \Phi \times \left(E_{\text{disaster}} \otimes \left(D^{(1)} + D^{(3)}\right)\right),$$

$$V_i = \Phi \times \left(I_{\overline{K}} \otimes D_i\right), \ \ i \geq 1,$$

$$H = \Delta(1) \times \left(\left(E_{\text{disaster}} \otimes D^{(3)}\right) + \left(S_{\text{disaster}} \otimes D^{(2)}\right)\right),$$

$$Y_0 = \mathrm{X}_0 \times \left(E_{\text{service}} \otimes I_{\overline{W}}\right) + \left(1 - s^{(1)}\right)\Delta_0 \times \left(E'_{\text{disaster}} \otimes D^{(1)}\right),$$

$$Y_i = \mathrm{X}_i \times \left(E_{\text{service}} \otimes I_{\overline{W}}\right) + \left(\left(1 - s^{(1)}\right)\Delta_i + s^{(1)}\Delta_{i-1}\right) \times \left(E'_{\text{disaster}} \otimes D^{(1)}\right), \ i \geq 1.$$

Здесь

$\times$ — символ операции матричного произведения;

$\otimes$ — символ операции кронекерова произведения матриц;

матрицы S_{disaster}, E_{disaster}, $E_{\text{production}}$, E_{service}, E'_{disaster} являются квадратными, имеют размерность $\overline{K}$ и следующую структуру:

$$S_{\text{disaster}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - s^{(2)} & s^{(2)} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - s^{(2)} & s^{(2)} \end{bmatrix}, \ E_{\text{disaster}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{\text{production}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ E_{\text{service}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E'_{\text{disaster}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$\mathrm{A} = \mathrm{diag}\left\{\mathrm{A}^{(j)},\ j = 0,1,\dots K\right\}$ — блочная квадратная матрица размерности $\overline{WK}$ с блоками $\mathrm{A}^{(j)}$, расположенными на главной диагонали;

$\mathrm{A}^{(j)} = \int\limits_0^\infty \exp\left\{\left(D_0 + D^{(2)}\right)t\right\} dC^{(j)}(t)$, $j = 0,1,\dots,K-1$ — квадратная матрица размерности $\overline{W}$, элемент $\left(\mathrm{A}^{(j)}\right)_{\nu,\nu'}$, $\nu,\nu' = 0,1,\dots,W$ которой является вероятностью того, что за время производства заготовки с функцией распределения времени производства $C^{(j)}(t)$, $t \ge 0$ во входящем потоке не придет ни одна катастрофа типов 1 и 3 и ни одна группа требований, и по окончании производства заготовки состояние процесса ν_t будет равно ν', если в начале производства заготовки оно было равно ν;

$\mathrm{A}^{(K)} = 0$;

$\Phi = \mathrm{diag}\left\{\Phi^{(j)}, j = 0,1,\dots K\right\}$ — блочная квадратная матрица размерности $\overline{WK}$ с блоками $\Phi^{(j)}$, расположенными на главной диагонали;

$$\Phi^{(j)} = \int\limits_0^\infty \exp\left\{\left(D_0 + D^{(2)}\right)t\right\}\left(1 - C^{(j)}(t)\right)dt,\ j = 0,1,\dots,K-1;$$

$$\Phi^{(K)} = \int\limits_0^\infty \exp\left\{\left(D_0 + D^{(2)}\right)t\right\}dt = -\left(D_0 + D^{(2)}\right)^{-1};$$

$\Phi^{(j)} \times D_i$, $i \ge 1$ ($\Phi^{(j)} \times D^{(k)}$, $k = 1,3$), $j = 0,1,\dots,K$ — квадратная матрица размерности $\overline{W}$, элемент $\left(\Phi^{(j)} \times D_i\right)_{\nu,\nu'}$ ($\left(\Phi^{(j)} \times D^{(k)}\right)_{\nu,\nu'}$), $\nu,\nu' = 0,1,\dots,W$ которой является вероятностью того, что во время производства заготовки с функцией распределения времени производства $C^{(j)}(t)$, $t \ge 0$ во входящем потоке придет группа i требований (катастрофа типа k), и во время ее прихода состояние процесса ν_t будет равно ν', если в начале производства заготовки оно было равно ν;

$X_i = \mathrm{diag}\left\{\mathrm{X}_i^{(j)},\ j = 0,1,\dots,K\right\}$, $i \ge 0$ — блочная квадратная матрица размерности $\overline{WK}$ с блоками $X_i^{(j)}$, расположенными на главной диагонали;

$$X_i^{(0)} = \int\limits_0^\infty P(i,t)dB^{(0)}(t),\ i \ge 0;$$

$$X_i^{(j)} = \int\limits_0^\infty \hat{P}(i,t)dB^{(j)}(t),\ j = 1,\dots,K,\ i \ge 0;$$

$X_i^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,K$, $i \ge 0$ — квадратная матрица размерности $\overline{W}$, элемент $\left(X_i^{(j)}\right)_{\nu,\nu'}$, $\nu,\nu' = 0,1,\dots,W$ которой является вероятностью того, что за время обслуживания требования с функцией распределения времени обслуживания $B^{(j)}(t)$, $t \geq 0$ не придет ни одна катастрофа типов 1, 2 и 3 для $j = 1,2,...,K$ (типов 2 и 3 для $j = 0$), а придет i требований, и по окончании обслуживания состояние процесса ν_t будет равным ν', если в начале обслуживания оно было равным ν;

$P(i,t)$ ($\hat{P}(i,t)$), $t \geq 0$, $i \geq 0$ — квадратная матрица размерности $\overline{W}$, элемент $\left(P(i,t)\right)_{\nu,\nu'}$ ($\left(\hat{P}(i,t)\right)_{\nu,\nu'}$), $\nu, \nu' = 0,1,...,W$ которой является вероятностью того, что за некоторый промежуток времени t во входящем потоке придет i требований и ни одной катастрофы типов 2 и 3 (1, 2 и 3), и в конце рассматриваемого промежутка времени состояние процесса ν_t будет равно ν', если в его начале оно было равно ν;

$$X^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i^{(j)} z^i, \quad j = 0,1,...,K, \quad X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i z^i, \quad |z| \leq 1;$$

$\Delta_i = \mathrm{diag}\left\{\Delta_i^{(j)}, \ j = 0,1,...,K\right\}$, $i \geq 0$ — блочная диагональная матрица размерности $\overline{WK}$ с блоками $\Delta_i^{(j)}$, расположенными на главной диагонали;

$$\Delta_i^{(0)} = \int_0^{\infty} P(i,t)\left(1 - B^{(0)}(t)\right)dt, \quad i \geq 0;$$

$$\Delta_i^{(j)} = \int_0^{\infty} \hat{P}(i,t)\left(1 - B^{(j)}(t)\right)dt, \quad j = 1,..., K, \quad i \geq 0;$$

$\Delta_i^{(j)} \times D^{(k)}$, $k = 1,2,3$, $j = 0,1,...,K$ ($\Delta_i^{(0)} \times D^{(k)}$, $k = 1,2$), $i \geq 0$ — квадратная матрица размерности $\overline{W}$, элемент $\left(\Delta_i^{(j)} \times D^{(k)}\right)_{\nu,\nu'}$, $\nu, \nu' = 0,1,...,W$ которой является вероятностью того, что во время обслуживания требования с функцией распределения $B^{(j)}(t)$, $t \geq 0$ придет катастрофа типов 1, 2 или 3 для $j = 1,2,...,K$ (типа 2 или 3 для $j = 0$), и в момент прихода катастрофы состояние процесса ν_t будет равно ν', если в момент начала обслуживания оно было равно ν.

$$\Delta^{(j)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i^{(j)} z^i, \quad j = 0,1,...,K, \quad \Delta(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta_i z^i, \quad |z| \leq 1. \blacksquare$$

Несложно показать (см., например, [20], [21]), что матрицы $P(i,t)$, $\hat{P}(i,t)$, $t \geq 0$, $i \geq 0$ являются коэффициентами разложения следующих матричных производящих функций:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(i,t) z^i = \exp\left\{\left(D(z) + D^{(1)}\right)t\right\},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{P}(i,t) z^i = \exp\left\{D(z)t\right\}, \quad t \geq 0, \quad |z| \leq 1.$$

Эффективный алгоритм вычисления матриц $X_i^{(j)}$, $\Delta_i^{(j)}$, $j = 0,1,...,K$, $i \geq 0$ может быть построен с применением метода униформизации (см. [20], [21]).

Введем следующие матричные производящие функции:

$$V(z) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i z^i = \mathrm{A}\left(E_{\text{production}} \otimes I_{\overline{W}}\right) + \Phi\left(E_{\text{disaster}} \otimes \left(D^{(1)} + D^{(3)}\right) + I_{\overline{K}} \otimes \left(D(z) - D_0\right)\right),$$

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i z^i = \mathrm{X}(z)\left(E_{\text{service}} \otimes I_{\overline{W}}\right) + \left(1 - s^{(1)} + zs^{(1)}\right)\Delta(z)\left(E'_{\text{disaster}} \otimes D^{(1)}\right),\ |z| \leq 1.$$

Цепь Маркова ξ_n, $n \geq 1$ входит в класс цепей Маркова, рассмотренный в работе [22], согласно которой для существования стационарного распределения в рассматриваемой цепи Маркова ξ_n достаточно того, чтобы матрица $Y(1)$ являлась субстохастической. Несложно видеть, что в рассматриваемой системе матрица $Y(1)$ является субстохастической при любых допустимых значениях параметров входящего потока, функций распределения времени обслуживания требования и производства заготовки, поскольку предполагается обязательное наличие потока катастроф типа 2 или 3, т.е. $D^{(2)} \neq 0$ или $D^{(3)} \neq 0$. ■

Рассмотрим задачу вычисления векторов $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \geq 0$. Построим эффективный алгоритм их нахождения, применяя матрично-аналитический подход.

Лемма 2. Векторная производящая функция $\hat{\Pi}(z)$ и вектор $\boldsymbol{\pi}_0$ удовлетворяют матричному уравнению

$$\hat{\Pi}(z)(Y(z) - zI) = \boldsymbol{\pi}_0(I - V(z)) - \hat{\Pi}(1)H,\ |z| \leq 1. \tag{2}$$

Доказательство. Система уравнений равновесия для цепи Маркова с дискретным временем ξ_n имеет вид (см. лемму 1)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_0 &= \boldsymbol{\pi}_0 V_0 + \boldsymbol{\pi}_1 Y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_j H, \\ \boldsymbol{\pi}_i &= \boldsymbol{\pi}_0 V_i + \sum_{j=1}^{i+1} \boldsymbol{\pi}_j Y_{i+1-j}, i \geq 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножая левую и правую части каждого из уравнений на z^i и складывая их, после несложных преобразований получаем уравнение (1). ■

Теорема 1. Векторы $\boldsymbol{\pi}_0$ и $\hat{\Pi}(1)$ являются решением такой системы линейных уравнений:

$$\boldsymbol{\pi}_0 V^{(1)} + \hat{\Pi}(1) Y^{(1)} = \mathbf{e}_0^T, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\pi}_0 \left(\sum_{i=0}^{\infty} V_i G^i - I \right) + \hat{\Pi}(1) H = 0, \tag{5}$$

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i G^i \,, \tag{6}$$

где $V^{(1)}$ — матрица $V(1)-I$, нулевой столбец которой заменен на $\mathbf{1}$; $Y^{(1)}$ — матрица $Y(1)+H-I$, нулевой столбец которой заменен на $\mathbf{1}$; $\mathbf{e}_0$ — вектор-столбец, нулевой элемент которой равен единице, а остальные — нулю; G — минимальное неотрицательное решение уравнения (6).

Доказательство. Подставляя $z=1$ в уравнение (1), получаем

$$\hat{\Pi}(1)(Y(1)-I+H)=\boldsymbol{\pi}_0(I-V(1)).$$

Матрицы $Y(1)-I+H$ и $I-V(1)$ являются вырожденными. Заменим их нулевые столбцы на единичные вектор-столбцы, исходя из условия нормировки $(\pi_0+\hat{\Pi}(1))\mathbf{1}=1$. Таким образом, справедливо уравнение (4).

Вывод уравнения (5) проиллюстрируем следующим образом. Под минимальным неотрицательным решением уравнения (6) понимается такое его решение, которое может быть получено при решении данного уравнения методом последовательных приближений с начальным приближением $G=0$. В работе [23] показано, что в случае, когда матрица $Y(1)$ является субстохастической, алгоритм нахождения минимального неотрицательного решения уравнения (6), построенный на применении метода последовательных приближений, является устойчивым.

После умножения левой и правой частей каждого уравнения системы (3), где в левой части стоит вектор $\boldsymbol{\pi}_i$, на матрицу G^i справа и сложения получаем уравнение (5).

Здесь показан матрично-алгебраический способ получения уравнения (5). Вероятностный способ вывода данного уравнения подробно описан в работе [16]. ■

Теорема 2. Векторы $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \ge 1$ находятся следующим образом:

$$\boldsymbol{\pi}_1=\boldsymbol{\pi}_0\left(\sum_{i=1}^{\infty} V_i G^{i-1}\right)\times\left(I-\sum_{i=1}^{\infty} Y_i G^{i-1}\right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\pi}_k=\left(\boldsymbol{\pi}_0\sum_{i=k}^{\infty} V_i G^{i-k}+\sum_{j=1}^{k-1}\boldsymbol{\pi}_j\sum_{i=k}^{\infty} Y_{i+1-j} G^{i-k}\right)\times\left(I-\sum_{i=1}^{\infty} Y_i G^{i-1}\right)^{-1},\ k\ge 2\,. \tag{7}$$

Доказательство. Чтобы получить выражение для $\boldsymbol{\pi}_k$, $k \ge 1$, умножим все уравнения системы (3), где в левой части стоит $\boldsymbol{\pi}_i$, $i \ge k$, на G^{i-k} и просуммируем их. После несложных преобразований получим выражение (7).

Очевидно, что матрица $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i G^{i-1}$ является субстохастической, поэтому матрица $I-\sum_{i=1}^{\infty} Y_i G^{i-1}$ обратима (см. например, [24]). ■

3. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Используя сведения из теории процессов марковского восстановления (см. [25], [26], [27]), несложно показать, что в рассматриваемой системе стационарное распределение процесса с непрерывным временем ξ_t, $t \ge 0$ существует, если существует стационарное распределение вложенной цепи Маркова ξ_n, $n \ge 1$.

Обозначим стационарное распределение процесса ξ_t, $t \ge 0$

$$p_{i,j,\nu} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{i_t = i,\ j_t = j,\ \nu_t = \nu\},\quad i \ge 0,\quad j = 0,1,...,K,\quad \nu = 0,1,...,W.$$

Упорядочим данные вероятности в лексикографическом порядке и получим следующие векторы:

$$\mathbf{p}_{i,j} = \left(p_{i,j,0},...,p_{i,j,W}\right),\ i \ge 0,\ j = 0,1,...,K,$$

$$\mathbf{p}_i = \left(\mathbf{p}_{i,0},...,\mathbf{p}_{i,K}\right),\ i \ge 0.$$

Введем векторную производящую функцию

$$\hat{\mathbf{P}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i z^{i-1},\quad |z| \le 1.$$

Теорема 1. Вектор $\mathbf{p}_0$ и векторная производящая функция $\hat{P}(z)$, $|z| \le 1$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\pi}_0\Phi, \tag{8}$$

$$\hat{\mathbf{P}}(z) = \frac{1}{\tau}\hat{\Pi}(z)\Delta(z),\quad |z| \le 1, \tag{9}$$

$$\tau = \left(\boldsymbol{\pi}_0\Phi + \hat{\Pi}(1)\Delta(1)\right)\mathbf{1}, \tag{10}$$

где τ — математическое ожидание длительности промежутка времени между двумя последовательными вложенными моментами t_n и t_{n+1}, $n \ge 1$.

Доказательство. Согласно узловой теореме для процессов марковского восстановления, в рассматриваемой системе связь между стационарным распределением процесса ξ_t во вложенные и произвольные моменты времени задается в виде

$$\mathbf{p}_{0,j} = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\pi}_{0,j}\int_0^{\infty} \exp\left\{\left(D_0 + D^{(2)}\right)t\right\}\left(1 - C^{(j)}(t)\right)dt,$$

$$\mathbf{p}_{i,0} = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{i} \boldsymbol{\pi}_{k,0}\int_0^{\infty} P(i-k,t)\left(1 - B^{(0)}(t)\right)dt,$$

$$\mathbf{p}_{i,j} = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{\pi}_{k,j}\int_{0}^{\infty}\hat{P}(i-k,t)\left(1-B^{(j)}(t)\right)dt\,,\ \ i\ge 1\,,\ \ j=0,1,\dots,K\,.$$

Для векторов $\mathbf{p}_i$, $i \ge 0$ эти уравнения будут выглядеть как

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{\tau}\boldsymbol{\pi}_0\Phi\,,\ \ \mathbf{p}_i = \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{\pi}_k\,\Delta_{i-k}\,,\ \ i\ge 1\,. \tag{11}$$

Умножая левую и правую части уравнений (9) на z^i, $|z|\le 1$ и складывая их, получаем уравнение (9).

Выражение (10) для средней длительности промежутка времени между двумя последовательными вложенными моментами τ несложно получить путем простых преобразований интегралов для его вычисления. ■

4. ДОЛЯ ПОСТУПИВШИХ ТРЕБОВАНИЙ, КОТОРЫЕ УШЛИ ИЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖЕННЫМИ

В предыдущих разделах мы находили стационарное распределение процесса ξ_t, $t \ge 0$ во вложенные и произвольные моменты времени. Также немаловажной характеристикой при исследовании систем с катастрофическими сбоями является доля требований, ушедших из системы обслуженными P_{serviced}, определяемая следующим образом:

$$P_{\text{serviced}} = \lim_{n\to\infty}\frac{i_s(n)}{i_s(n)+\sum\limits_{d=1}^{3} i_l^{(d)}(n)}\,,$$

где $i_s(n)$ — число успешно обслуженных требований до момента t_n, $n \ge 1$ включительно; $i_l^{(d)}(n)$ — число требований, ушедших из системы не обслуженными вследствие прихода катастрофического сбоя типа d, $d=\overline{1,3}$ до момента t_n, $n \ge 1$ включительно.

Теорема 2. Доля поступивших требований P_{serviced}, которые ушли из системы обслуженными,

$$P_{\text{serviced}} = \frac{q_s}{q_s + \sum\limits_{d=1}^{3} q_l^{(d)}}\,, \tag{12}$$

где

$$q_s = \hat{\Pi}(1)\mathrm{X}(1)\mathbf{1}\,;\ q_l^{(1)} = \left(1-s^{(1)}\right)\hat{\Pi}(1)\Delta(1)\left(E'_{\text{disaster}}\otimes D^{(1)}\right)\mathbf{1}\,;$$

$$q_l^{(d)} = \left(\hat{\Pi}(1)\Delta(1)+\hat{\Pi}'(1)\Delta(1)+\hat{\Pi}(1)\Delta'(1)\right)\times\left(I_{\overline{K}}\otimes D^{(d)}\right)\mathbf{1}\,,\ d=2,3\,.$$

Доказательство. Рассмотрим цепь Маркова $\psi_n = \left(\xi_n, c_s(n), c_l^{(1)}(n),\right.$ $\left.c_l^{(2)}(n), c_l^{(3)}(n)\right)$, $n \ge 1$, где $c_s(n)$, $c_s(n) = 0,1$ — число требований, уходящих из системы обслуженными в момент t_n, $n \ge 1$; $c_l^{(1)}$, $c_l^{(1)} = 0,1$ — число требований, покидающих систему в результате прихода катастрофического сбоя типа 1 в момент t_n; $c_l^{(d)}(n)$, $c_l^{(d)}(n) \ge 0$ — число требований, покидающих систему в результате прихода катастрофического сбоя типа d, $d = 2,3$ в момент t_n.

Несложно показать, что если существует стационарное распределение цепи Маркова ξ_n, $n \ge 1$, то существует и стационарное распределение цепи Маркова ψ_n, $n \ge 1$.

$$\pi_{i,j,\nu}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{i_n = i, j_n = j, \nu_n = \nu, c_s(n) = c_s, c_l^{(1)}(n) = c_l^{(1)}, c_l^{(2)}(n) = c_l^{(2)}, c_l^{(3)}(n) = c_l^{(3)}\right\},$$

$$i \ge 0,\ \ j = 0,1,\dots,K,\ \ \nu = 0,1,\dots,W,\ \ c_s = 0,1,\ \ c_l^{(1)} = 0,1,\ \ c_l^{(d)} \ge 0,\ \ d = 2,3.$$

Упорядочим стационарные вероятности $\pi_{i,j,\nu}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right)$ в лексикографическом порядке и получим векторы

$$\boldsymbol{\pi}_{i,j}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right) = \left(\pi_{i,j,0}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right), \dots, \pi_{i,j,W}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right)\right),$$

$$\boldsymbol{\pi}_{i}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right) = \left(\boldsymbol{\pi}_{i,0}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right), \dots, \boldsymbol{\pi}_{i,K}\left(c_s, c_l^{(1)}, c_l^{(2)}, c_l^{(3)}\right)\right).$$

Несложно показать, что ненулевые из данных векторов вероятностей вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{\pi}_0(0,0,0,0) = \boldsymbol{\pi}_0 V_0,$$

$$\boldsymbol{\pi}_i(0,0,0,0) = \boldsymbol{\pi}_0 V_i + s^{(1)} \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\pi}_j \Delta_{i-j}\left(E'_{\text{disaster}} \otimes D^{(1)}\right),\ i \ge 1,$$

$$\boldsymbol{\pi}_i(1,0,0,0) = \sum_{j=1}^{i+1} \boldsymbol{\pi}_j \mathrm{X}_{i+1-j}\left(E_{\text{service}} \otimes I_{\overline{W}}\right),\ i \ge 0,$$

$$\boldsymbol{\pi}_i(0,1,0,0) = \left(1 - s^{(1)}\right) \sum_{j=1}^{i+1} \boldsymbol{\pi}_j \Delta_{i+1-j}\left(E'_{\text{disaster}} \otimes D^{(1)}\right),\ i \ge 0,$$

$$\boldsymbol{\pi}_0(0,0,i,0) = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\pi}_j \Delta_{i-j}\left(S_{\text{disaster}} \otimes D^{(2)}\right),\ i \ge 0,$$

$$\boldsymbol{\pi}_0(0,0,0,i) = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\pi}_j \Delta_{i-j}\left(E_{\text{disaster}} \otimes D^{(3)}\right),\ i \ge 0.$$

Как сказано выше, величина P_{serviced} определена как

$$P_{\text{serviced}} = \lim_{n\to\infty} \frac{i_s(n)}{i_s(n) + \sum_{d=1}^{3} i_l^{(d)}(n)} = \frac{q_s}{q_s + \sum_{d=1}^{3} q_l^{(d)}},$$

где $q_s = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} i_s(n)$, $q_l^{(d)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} i_l^{(d)}(n)$, $d=\overline{1,3}$, $i_s(n)=\sum\limits_{k=1}^{n} c_s(k)$, $i_l^{(d)}(n)=$ $=\sum\limits_{k=1}^{n} c_l^{(d)}(k)$, $d=\overline{1,3}$, $k \ge 1$.

Для дальнейшего доказательства используется эргодическая теорема для функционалов, определенных на множестве состояний цепи Маркова (см. [28, с.243]). Условие данной теоремы формулируется так.

Пусть имеется некоторая цепь Маркова с дискретным временем x_n, $n \ge 1$ со множеством состояний X и стационарными вероятностями p_x, $x \in X$, а также некоторый функционал $f(x)$, $x \in X$. Тогда при условии $\sum\limits_{x\in X} p_x |f(x)| < +\infty$ с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) = \sum_{y\in X} p_y f(y).$$

Тогда, согласно данной теореме, получаются выражения для вычисления пределов q_s и $q_l^{(d)}$, $d=\overline{1,3}$

$$q_s = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_i (1,0,0,0)\mathbf{1}, \; q_l^{(1)} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\pi}_i (0,1,0,0)\mathbf{1},$$

$$q_l^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{\pi}_0 (0,0,i,0)\mathbf{1}, \; q_l^{(3)} = \sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{\pi}_0 (0,0,0,i)\mathbf{1}.$$

После несложных преобразований получается выражение (10). ■

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Пусть входящий поток требований и катастроф задается матрицами

$$D_0 = \begin{bmatrix} --- & 0{,}00038786 \\ 0{,}00038786 & --- \end{bmatrix}, \; D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1{,}64840360 & 0{,}01919905 \\ 0{,}0038786 & 0{,}04925818 \end{bmatrix},$$

$$D^{(i)} = \gamma^{(i)} I, \; i = 1,2,3.$$

Интенсивность входящего потока требований $\lambda = 1$, интенсивности потоков катастроф задаются как параметры $\gamma^{(i)}$, $i = 1,2,3$. Диагональные элементы матрицы D_0 вычисляются согласно условию (1). Время обслуживания требований имеет вырожденное распределение с математическим ожиданием $b_1^{(0)} = 0{,}6$ и $b_1^{(j)} = 0{,}2$, $j = 1,\dots,K$. Время производства заготовки имеет вырожденное распределение с математическим ожиданием $c_1^{(j)} = 0{,}4$, $j = 0,\dots,K-1$. Также предполагается, что $s^{(1)} = 1$ и $s^{(2)} = 1$.

В первом эксперименте $\gamma^{(1)} = 0$, а пара интенсивностей $(\gamma^{(2)};\gamma^{(3)})$ принимает все значения из множества $\{(0{,}001;0), (0{,}01;0), (0{,}1;0), (0;0{,}001),$

$(0;0{,}01)$, $(0;0{,}1)\}$, размер склада заготовок K изменяется от 0 до 50 с шагом 10. Исследуется зависимость среднего числа требований в системе в произвольный момент времени $L = \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{p}_i\mathbf{1}$ и доли поступивших требований, которые ушли из системы обслуженными P_{serviced} от K. Численные результаты данного эксперимента приведены в табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1. Среднее число требований в системе в произвольный момент времени L

K	$\gamma^{(2)}$ ($\gamma^{(1)}=0$, $\gamma^{(3)}=0$)			$\gamma^{(3)}$ ($\gamma^{(1)}=0$, $\gamma^{(2)}=0$)		
	0,001	0,01	0,1	0,001	0,01	0,1
0	72,2975	30,6192	5,5534	72,2974	30,6192	5,5535
10	69,2629	28,9127	5,1068	69,2746	28,9747	5,2185
20	66,3337	27,3566	4,7859	66,3777	27,5783	5,1046
30	63,5302	25,9058	4,4964	63,6257	26,365	5,0519
40	60,8549	24,5549	4,235	61,0198	25,3139	5,0275
50	58,3040	23,2963	3,9984	58,5550	24,4039	5,0162

Т а б л и ц а 2. Доля поступивших требований, которые ушли из системы обслуженными P_{serviced}

K	$\gamma^{(2)}$ ($\gamma^{(1)}=0$, $\gamma^{(3)}=0$)			$\gamma^{(3)}$ ($\gamma^{(1)}=0$, $\gamma^{(2)}=0$)		
	0,001	0,01	0,1	0,001	0,01	0,1
0	0,9277	0,6938	0,4447	0,9277	0,6938	0,4447
10	0,9307	0,7109	0,4781	0,9307	0,7103	0,4781
20	0,9337	0,7264	0,4895	0,9336	0,7242	0,4895
30	0,9365	0,7409	0,4948	0,9364	0,7363	0,4948
40	0,9391	0,7545	0,5765	0,9390	0,7469	0,4973
50	0,9417	0,7670	0,6002	0,9414	0,7560	0,4984

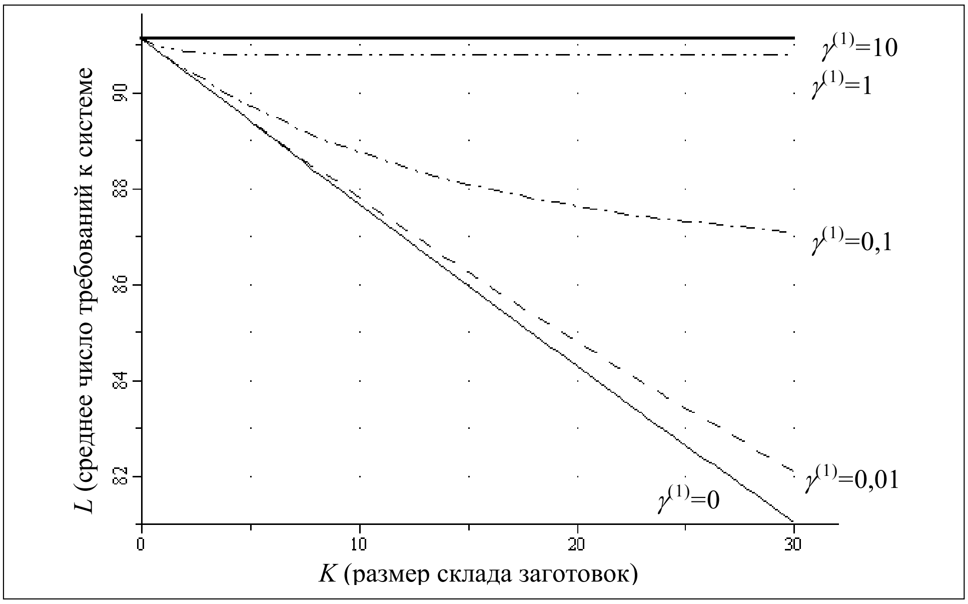

Рис. 2. Численные результаты эксперимента

Во втором эксперименте $\gamma^{(1)}$ принимает все значения из множества $\{0;0{,}01;0{,}1;1;10\}$, $\gamma^{(2)} = 0{,}000001$ и $\gamma^{(3)} = 0$, размер склада заготовок K изменяется от 0 до 30. Исследуется зависимость среднего числа требований в системе в произвольный момент времени L от K. Численные результаты данного эксперимента приведены на рис. 2.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена система BMAP/G/1 со складом и марковским потоком разнотипных катастрофических сбоев. Получен устойчивый алгоритм для вычисления стационарного распределения числа требований в системе, основанный на применении матрично-аналитического и аналитического подходов. Предложена формула для вычисления доли требований, покинувших систему обслуженными.

Приведены результаты двух численных экспериментов, цель которых — оценка необходимости защиты склада от катастрофических сбоев при различных интенсивностях их потоков.

В первом эксперименте предполагается, что поток катастрофических сбоев типа 1 отсутствует, а изменяются интенсивности потоков катастрофических сбоев типов 2 и 3, которые взяты по отдельности, что соответствует случаю защищенного и незащищенного склада, соответственно. Эксперимент показал, что при сравнительно небольшой интенсивности потока катастрофических сбоев в обоих случаях исследуемые характеристики существенно не различаются, но с ее увеличением они все больше начинают различаться. Во втором эксперименте потоки катастрофических сбоев типов 2 и 3 взяты сравнительно малыми, но изменяется интенсивность потока катастрофических сбоев типа 1. Данный эксперимент показал, что присутствие потока катастрофических сбоев этого типа существенно влияет на эффективность функционирования склада даже при его сравнительно небольших интенсивностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kazimirsky A.V.* A BMAP/G/1 queue with preliminary service. Queues: flows, networks, systems. Proceedings of the International conference «Modern Mathematical Methods of Analysis and Optimization of Telecommunication Networks», 23–25 September, Gomel. — Minsk: BSU, 2003. — P. 115–120.
2. *Gelenbe E.* Random neural networks with positive and negative signals and product form solution // Neural Computation. — 1989. — № 1. — P. 502–511.
3. *Gelenbe E.* Product form networks with negative and positive customers // Journal of Applied Probability. — 1991. — **28**. — P. 655–663.
4. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with negative arrivals // Journal of Applied Probability. — 1991. — **28**. — P. 245–250.
5. *Gelenbe E.* G-network: an unifying model for queueing networks and neural networks // Annals of Operations Research. — 1994. — № 1. — P. 433–461.
6. *Gelenbe E., Labed A.* G-networks with multiple classes of signals and positive customers // European Journal of Operations Research. — 1998. — **108**. — P. 293–305.

7. *Бочаров П.П., Вишневский В.М.* G-сети. Развитие теории мультипликативных сетей // Автоматика и телемеханика. — 2003. — №5 — С. 46–74.
8. *Artalejo J.* G-networks: a versatile approach for work removal in queueing networks // European Journal of Operations Research. — 2000. — **126**. — P. 233–249.
9. *Serfozo R., Stidham S.* Semi-stationary clearing processes // Stochastic Processes and Applications. — 1978. — № 6. — P. 165–178.
10. *Stidham S.* Stochastic clearing systems // Stochastic Processes and Applications. — 1974. — № 2. — P. 85–113.
11. *Chen A., Renshaw E.* The M/M/1 queue with mass exodus and mass arrivals when empty // Journal of Applied Probability. — 1997. — **34**. — P. 192–207.
12. *Jain G., Sigman K.* Pollaczeck-Khinchine formula for M/G/1 queues with disasters // Journal of Applied Probability. — 1996. — **33**. — P. 1191–1200.
13. *Dudin A.N. Nishimura S.* Embedded stationary distribution for BMAP/SM/1/N queue with disasters // Queues: flows, networks, systems. — 1998. — **14.** P. 92–97.
14. *Dudin A.N., Nishimura S.* A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival of distasters // Journal of Applied Probability. — 1999. — **36**. — P. 868–881.
15. *Dudin A.N., Karolik A.V.* A BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Performance Evaluation. — 2001. — **45**. — P. 19–32.
16. *Dudin A.N., Semenova O.V.* Stable algorithm for stationary distribution calculation for a BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival input of disasters // Journal of Applied Probability. — 2004. — **42**, № 2. — P. 547–556.
17. *Li Q.L., Zhao Y.Q.* A MAP/G/1 Queue with negative customers // Queueing Systems. — 2004. — **47**. — P. 5–43.
18. *Yang Woo Shin.* A BMAP/G/1 Queue with correlated arrivals of customers and disasters // Operational Research Letters. — 2004. — **32**. — P. 364–373.
19. *He Q.M.* Queues with marked customers // Advances in Applied Probability. — 1996. — **28.** — P. 567–587.
20. *Lucantoni D.* New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Stochastic Models. — 1991. — **7**. — P. 1–46.
21. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. — Минск: БГУ, 2000. — 175 с.
22. *Клименок В.И., Дудин А.Н.* Условие эргодичности для одного класса многомерных цепей Маркова. Теория вероятностей, мат. статистика и их приложения // Материалы науч. конф. — Минск: БГУ, 2004. — С. 47–53.
23. *Neuts M.* Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models. Johns Hopkins University Press. — Baltimore: 1981. — 332 p.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.
25. *Броди С.И., Погосян И.А.* Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания. — Киев: Наук. думка, 1973. — 127 с.
26. *Cinlar E.* Introduction to stochastic processes. New Jersey: Prentice-Hall, 1975. — 400 p.
27. *Neuts M.F.* Structured Matrices of M/G/1 Type and Their Applications. — New York: Marcel Dekker, 1989. — 512 p.
28. *Скороход А.В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Высш. шк., 1980. — 344 с.

Поступила 11.10.2004