УДК 517.925.51

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОВНІШНЬОЇ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ф.Г. ГАРАЩЕНКО, В.В. ПІЧКУР

Отримано умови належності точки до границі максимальної області початкових умов для задачі аналізу зовнішньої практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення. Наведено оптимальну функцію деформації та алгоритм побудови максимальної множини зовнішньої практичної стійкості для лінійного диференціального включення при опуклих фазових обмеженнях.

ВСТУП

Проблеми адекватності математичних моделей реальних процесів приводять до необхідності аналізу динаміки систем в умовах невизначеності. Як правило, параметри об'єкту та початкові дані відомі з похибкою. Крім того, модель описує поведінку окремих характеристик явища, що означає наявність постійно діючих збурень. Таким чином, виникає розкид правої частини та початкових умов відповідної системи диференціальних рівнянь. Отже, приходимо до постановки задачі стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення. У роботах [1–7] наведено теореми щодо неперервної залежності від початкових умов і параметрів, умови існування розв'язку задачі Коші, продовження розв'язку, структуру інтегральної воронки для диференціальних включень. Досліджено апроксимативні та асимптотичні властивості розв'язків, розвивається метод усереднення [4–7]. Для систем з розподіленими параметрами здійснюється узагальнення моделей до диференціальних включень у банахових просторах, до операторних включень, і для них розв'язуються оптимізаційні задачі [4, 5, 8].

Один з сучасних підходів якісного дослідження динамічних систем полягає в аналізі незбуреного розв'язку на фіксованому інтервалі часу при заданих фазових обмеженнях. Теорія практичної стійкості була започаткована М.Г. Четаєвим [9] при дослідженні питання нестійкості руху і набула розвитку завдяки роботам [10–20]. Для динамічних систем виявлено два види практичної стійкості — внутрішню і зовнішню.

ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНОЇ МНОЖИНИ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Введемо позначення: $\mathrm{comp}(R^n)$ — множина непорожніх компактів з R^n; $\mathrm{conv}(R^n)$ — множина непорожніх опуклих компактів з R^n; $\|\cdot\|$ — друга норма n-вимірного евклідового простору; S — одинична сфера; $\operatorname{int} A$, ∂A, $A^{\varepsilon} = \{x : \|x - a\| \le \varepsilon, a \in A\}$, $A^{<\varepsilon>} = \{x : x^{\varepsilon} \subseteq A\}$ — відповідно множина внутрішніх точок, границя, ε-розширення та ε-звуження множини $A \subset R^n$; $\alpha(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа; $\Gamma(f)$, $\Delta(f)$ — графік і трубка відображення f; $\underset{x}{\operatorname{co}}(f)$ — обопуклення функції f за змінною x; $c(A,\psi)$ — опорна функція множини $A \subset R^n$, $\psi \in R^n$ [1, 21, 22].

Розглянемо диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in F(x,t), \tag{1}$$

де $x \in R^n$ — n-вимірний вектор фазових координат, багатозначне відображення $F : (x,t) \mapsto F(x,t)$ задовольняє основним умовам [1, 2, 6], тобто є напівнеперервним зверху на D відображенням і $F(x,t) \in \operatorname{conv}(R^n)$, $(x,t) \in D$, D — замкнена область в R^{n+1}. Крім того, $0 \in F(0,t)$, $t \in [t_0, T]$ та виконується умова Ліпшиця. Вона полягає у тому, що існує абсолютно неперервна додатна функція $L(t)$, для якої $\alpha(F(u,t), F(v,t)) \le L(t)\|u - v\|$, $(u,t) \in D$, $(v,t) \in D$.

Нехай $X(t, x_0, t_0)$ — множина досяжності (1), що відповідає початковій умові $x(t_0) = x_0$, $x = x(t, x_0, t_0)$ — деякий розв'язок (1) за умови $x(t_0) = x_0$, $X(\cdot, x_0, t_0)$ — множина розв'язків включення (1) за умови $x(t_0) = x_0$, $X(x_0) : t \mapsto X(t, x_0, t_0)$, $t \in [t_0, T]$.

Задамо багатозначну функцію $\Phi : [t_0, T] \to \operatorname{comp}(R^n)$, яка описує фазові обмеження, при цьому графік $\Gamma(\Phi) \subset D$, $0 \in \operatorname{int} \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Розглянемо множину $D_0 \subseteq R^n$, $0 \in D_0$.

Означення 1. Нульовий розв'язок диференціального включення (1) називається *зовнішньо* $\{D_0, \Phi(t), t_0, T\}$*-стійким*, якщо для довільної точки $x_0 \in D_0$ для будь-якого розв'язку $x(\cdot, x_0, t_0)$ диференціального включення (1) знайдеться момент $t \in [t_0, T]$ такий, що $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$.

Дослідимо властивості множини початкових даних, для якої мають місце умови зовнішньої практичної стійкості нульового розв'язку диференціального включення (1).

Означення 2. Якщо незбурений розв'язок (1) є зовнішньо $\{D_*, \Phi(t), t_0, T\}$-стійким згідно з означенням 1 і $D_0 \subseteq D_*$ для всіх $D_0 \subseteq R^n$, для яких виконується зовнішня $\{D_0, \Phi(t), t_0, T\}$-стійкість розв'язку $x(t) = 0$ диференціального включення (1), то сукупність $D_* \subseteq R^n$ називається *максимальною за включенням множиною* зовнішньої практичної стійкості нульового розв'язку (1) при фазових обмеженнях $\Phi(t)$ на відрізку $[t_0, T]$.

Нехай відображення Φ є напівнеперервним зверху. Справедлива така теорема.

Теорема 1. Множина $D_* \in \mathrm{comp}(R^n)$.

Доведення. Обмеженість випливає з того, що D_* міститься у максимальній за включенням множині зовнішньої практичної слабкої стійкості, яка є обмеженою [23]. Доведемо замкненість D_*. Припустимо, що існує послідовність $\{x_k\} \subset D_*$, для якої $\lim x_k = z$, $k \to \infty$, $z \notin D_*$. З означення 2 випливає існування розв'язку $x = x(\cdot, z, t_0) \in X(\cdot, z, t_0)$ такого, що $x(t, z, t_0) \notin \Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Оскільки $\Gamma(x) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$ і $\Gamma(\Phi)$ — компакт, то знайдеться $\lambda > 0$, для якого $\Gamma(x^\lambda) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$. За теоремою про неперервну залежність розв'язку (1) від початкових умов [1, 6, 7], починаючи з деякого номера k_0, для $k \geq k_0$ існує $x(\cdot, x_k, t_0) \in X(\cdot, z, t_0)$, для якого $\|x(t, x_k, t_0) - - x(t, z, t_0)\| \leq \lambda$, $t \in [t_0, T]$. Отримали протиріччя між співвідношенням $\Gamma(x^\lambda) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$ і умовою існування $t \in [t_0, T]$ такого, що $x(t, x_k, t_0) \in \in \Phi(t)$. Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо точка $x_0 \in \partial D_*$, то знайдеться розв'язок $x = = x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$, для якого $\Gamma(x) \cap \Gamma(\Phi) \neq \varnothing$, $\Gamma(x) \cap (\Gamma(\Phi) / / \Delta(\Phi)) = \varnothing$.

Доведення. Якщо $x_0 \in D_*$, то за означенням 2 для будь-якого розв'язку $x = x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$ можна вказати момент $t \in [t_0, T]$ і точку $u = x(t, x_0, t_0)$, яка належить $\Phi(t)$. Множина Π таких точок (u, t) є компактом в R^{n+1}. Справді, обмеженість Π випливає з обмеженості $\Gamma(\Phi)$, а замкненість Π є наслідком замкненості $\Gamma(X(x_0))$ і компактності $\Gamma(\Phi)$ [1,6,7]. Припустимо від супротивного, що усі точки $(u, t) \in \Pi$ є такими, що не належать $\Delta(\Phi)$. Тоді у силу компактності Π виконується включення $u^\sigma \subseteq \Phi(t)$ для всіх $(u, t) \in \Pi$ при деякому $\sigma > 0$. За теоремою про неперервну залежність розв'язків диференціального включення (1) від початкових умов [1] існує $\lambda > 0$ таке, що $x(t, z, t_0) \in (x(t, x_0, t_0))^\sigma$ за умови $z_0 \in (x_0)^\lambda$. Це означає, що $(x_0)^\lambda \subset D_*$. А це суперечить $x_0 \in \partial D_*$. Теорему доведено.

Означення 3. Будемо говорити, що розв'язок $x = x(\cdot, z_0, t_0) \in X(\cdot, z_0, t_0)$ *відтіняє* відображення Φ, якщо $\Gamma(x) \cap \Gamma(\Phi) \neq \varnothing$ та існує послідовність розв'язків $x_k \in X(\cdot, z_k, t_0)$, $k = 1,2,...$ така, що $x_k \to x$ у рівномірній метриці і $\Gamma(x_k) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$.

Розглянемо відображення $g : \varepsilon \mapsto D(\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, де $D(\varepsilon) \subset R^n$ є максимальною за включенням множиною зовнішньої практичної стійкості розв'язку $x(t) = 0$ включення (1) при фазових обмеженнях $\Phi_{<\varepsilon>}(t)$, $t \in [t_0, T]$. Тут $\Phi_{<\varepsilon>}$ — ε-звуження відображення Φ, $\varepsilon \geq 0$ [21].

Теорема 3. Нехай знайдеться розв'язок $x = x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$, для якого $\Gamma(x) \cap \Gamma(\Phi) \neq \varnothing$, $\Gamma(x) \cap (\Gamma(\Phi) / \Delta(\Phi)) = \varnothing$. Тоді або $x_0 \in \partial D_*$, або точка $x_0 \in D_*$ є захопленою відображенням g у точці 0. Якщо цей розв'язок відтіняє відображення Φ, то $x_0 \in \partial D_*$.

Доведення. За означенням 3 $D_* = g(0)$. Функція g є монотонно неспадною в околі точки $\varepsilon = 0$. При цьому $x_0 \notin g(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Припустимо, що для точки x_0 існує розв'язок $x = x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$, який відтіняє відображення Φ. Тоді знайдеться послідовність $x_k \to x_0$, $z_k \in X(\cdot, x_k, t_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, для якої $\Gamma(z_k) \cap \Gamma(\Phi) = \varnothing$. Це означає, що $x_k \notin D_*$, $k = 1, 2, \ldots$, і тому $x_0 \in \partial D_*$. Теорему доведено.

ЗОВНІШНЯ ПРАКТИЧНА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Нехай багатозначне відображення $U : [t_0, T] \to \mathrm{conv}(R^n)$ є неперервним. Розглянемо лінійне диференціальне включення

$$\frac{dx}{dt} \in \{A(t)x\} + U(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Тут $x \in R^n$ — n-вимірний вектор фазових координат, $A(t) - n \times n$ — матриця з неперервними компонентами. Позначимо $\Theta(t, t_0)$ фундаментальну матрицю системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормовану за моментом $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$ і інтеграл $Q(t) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)U(s)ds$ розуміється у сенсі Аумана [1]. За теоремою Ляпунова [1] відображення $Q : t \mapsto Q(t)$ є опуклозначним і неперервним на відрізку $[t_0, T]$. Крім того, $X(t, x_0, t_0) = \{\Theta(t, t_0)x_0\} + Q(t)$ [3].

Розглянемо задачу побудови максимальної множини зовнішньої практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення (2), яку позначимо D_*. Нехай відображення Φ є неперервним, опуклозначним і виконується умова $Q(t) \subset \mathrm{int}\,\Phi(t)$, $t \in [t_0, T]$. Позначимо $\Sigma(U)$ клас вимірних селекторів багатозначної функції U, $0 \in \mathrm{int}\,U(t)$, $t \in [t_0, T]$. Справджується таке твердження.

Теорема 4. Множина D_* є зірковою.

Доведення. Нехай $z \in D_*$. З означення 2 випливає, що для довільного $u \in \Sigma(U)$ існує $t \in [t_0, T]$ таке, що $\Theta(t, t_0)z + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)u(s)ds \in \Phi(t)$. Оскільки $0 \in \mathrm{int}\,U(t)$, то $0 \in \mathrm{int}\,Q(t)$, $t \in [t_0, T]$. Виберемо довільне $\lambda \in [0, 1]$. Тоді з умови $Q(t) \subset \mathrm{int}\,\Phi(t)$ і опуклості $\Phi(t)$ випливає

$$\Theta(t, t_0)(\lambda z) + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)u(s)ds = \lambda \left(\Theta(t, t_0)z + \int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)u(s)ds \right) +$$

$$+ (1 - \lambda)\int_{t_0}^{t} \Theta(t, s)u(s)ds \in \Phi(t).$$

Таким чином, $\lambda z \in D_*$, $\lambda \in [0,1]$. Теорему доведено.

Позначимо $q(t,u) = \int_{t_0}^{t} \Theta(t,s)u(s)ds$, $u \in \Sigma(U)$, $\partial U : t \mapsto \partial U(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Критерій 1. Для того щоб точка $x_0 \in \partial D_*$, необхідно і достатньо, аби справджувалась рівність

$$\max_{u\in\Sigma(\partial U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)} = 1 \tag{3}$$

за умови $\min_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S} \left(c(\Phi(t),\psi) - c(Q(t),\psi)\right) > 0$.

Доведення проведемо у два кроки.

Крок 1. Покажемо, що $x_0 \in D_*$ тоді і тільки тоді, коли

$$\max_{u\in\Sigma(\partial U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)} \le 1 . \tag{4}$$

Для цього виберемо довільну точку $x_0 \in D_*$. Яким би не був розв’язок $x(\cdot, x_0, t_0) \in X(\cdot, x_0, t_0)$, існує $t \in [t_0, T]$ таке, що $x(t, x_0, t_0) \in \Phi(t)$. Це означає, що для будь-якого $u \in \Sigma(U)$ знайдеться $t \in [t_0, T]$, при якому для довільного $\psi \in S$ справджується нерівність $\psi^T \Theta(t,t_0)x_0 + \psi^T q(t,u) \le$ $\le c(\Phi(t),\psi)$.

Тому за вказаних умов $\psi^T \Theta(t,t_0)x_0 \le c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)$. Оскільки $c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u) > 0$, $t \in [t_0, T]$, $\psi \in S$, то для будь-якого $u \in \Sigma(U)$ існує $t \in [t_0, T]$ таке, що

$$\frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)} \le 1, \quad \psi \in S .$$

Звідси випливає нерівність

$$\sup_{u\in\Sigma(U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)} \le 1 . \tag{5}$$

Оскільки $X(\cdot, 0, t_0)$ є компакт у просторі $C([t_0,T], R^n)$, то отримуємо

$$\sup_{u\in\Sigma(U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T q(t,u)} =$$

$$= \sup_{x\in X(\cdot,0,t_0)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T x(t)} =$$

$$= \max_{x\in X(\cdot,0,t_0)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T x(t)} =$$

$$= \max_{u\in\Sigma(U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)}. \qquad (6)$$

Для довільних $t\in[t_0,T]$, $\psi\in S$ розглянемо

$$\max_{u\in\Sigma(U)} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} = \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\max\limits_{u\in\Sigma(U)}\psi^T q(t,u)}.$$

За властивостями інтегралу Аумана [1] $\psi^T \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t,s)U(s)ds$ є відрізок. Тому існує на цьому відрізку максимальна точка. З означення інтеграла від багатозначної функції слідує, що знайдеться селектор $u\in\Sigma(U)$, для якого

$$\max \psi^T \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t,s)U(s)\,ds = \psi^T \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t,s)u(s)ds = \psi^T q(t,u).$$

З іншої сторони, $\max \psi^T \int\limits_{t_0}^{t} \Theta(t,s)U(s)ds = c(Q(t),\psi)$. Оскільки

$$c(Q(t),\psi) = \int\limits_{t_0}^{t} c(U(s),\Theta^T(t,s)\psi)ds = \int\limits_{t_0}^{t} c(\partial U(s),\Theta^T(t,s)\psi)ds,$$

то

$$\max_{u\in\Sigma(U)} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} = \max_{u\in\Sigma(\partial U)} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)}.$$

Оскільки для довільного $t\in[t_0,T]$

$$\max_{u\in\Sigma(U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} \le$$

$$\le \max_{u\in\Sigma(U)} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} = \max_{\psi\in S} \max_{u\in\Sigma(U)} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)\,x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} =$$

$$= \max_{\psi\in S} \max_{u\in\Sigma(U)} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)\,x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} =$$

$$= \max_{u\in\Sigma(\partial U)} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)},$$

то

$$\max_{u\in\Sigma(U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)} \le$$

$$\le \max_{u\in\Sigma(\partial U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0)x_0}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)}.$$

Але $\Sigma(\partial U) \subseteq \Sigma(U)$, тому $\max\limits_{u \in \Sigma(U)} \min\limits_{t \in [t_0, T]} \max\limits_{\psi \in S} \dfrac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} \geq$

$\geq \max\limits_{u \in \Sigma(\partial U)} \min\limits_{t \in [t_0, T]} \max\limits_{\psi \in S} \dfrac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)}$.

Остаточно отримуємо

$$\max_{u \in \Sigma(U)} \min_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} =$$

$$= \max_{u \in \Sigma(\partial U)} \min_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)}. \qquad (7)$$

З (5), (6) і (7) випливає (4). І навпаки, якщо виконується (4), то має місце (5). З (5) слідує, що для довільного $u \in \Sigma(U)$ знайдеться $t \in [t_0, T]$ таке, що для $\psi \in S$ має місце нерівність $\psi^T \Theta(t, t_0) x_0 + \psi^T q(t, u) \leq c(\Phi(t), \psi)$. За властивостями опорних функцій це означає $x_0 \in D_*$.

Крок 2. Нехай $x_0 \in \partial D_*$. Тоді за теоремою 2 існує $u \in \Sigma(U)$ таке, що при будь-якому $t \in [t_0, T]$ знайдеться $\psi \in S$, і має місце нерівність $\psi^T \Theta(t, t_0) x_0 + \psi^T q(t, u) \geq c(\Phi(t), \psi)$. Звідси отримуємо аналогічно до (4) співвідношення

$$\max_{u \in \Sigma(\partial U)} \min_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} \geq 1. \qquad (8)$$

Таким чином, з (4), (8) випливає, що при $x_0 \in \partial D_*$ виконується рівність (3). Покажемо: якщо для деякої точки x_0 справджується (3), то $x_0 \in \partial D_*$. Оскільки має місце (7), то з (3) випливає, що для будь-якого $u \in \Sigma(U)$ існує $t \in [t_0, T]$, для якого $\dfrac{\psi^T \Theta(t, t_0) x_0}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} \leq 1$, $\psi \in S$. Оскільки $c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u) > 0$, $t \in [t_0, T]$, $\psi \in S$, то для деякого $t \in [t_0, T]$ справедлива нерівність $\psi^T \Theta(t, t_0) x_0 + \psi^T q(t, u) \leq c(\Phi(t), \psi)$. Звідси $x_0 \in D_*$. Візьмемо $m = \|x_0\| > 0$, $\ell = x / \|x_0\| \in S$. З формули (3) випливає

$$\max_{u \in \Sigma(\partial U)} \min_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t, t_0) \ell}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} = \frac{1}{m}.$$

Виберемо довільну послідовність $m_r > m$, $m_r \to m$, $r = 1, 2, \ldots$.

Тоді

$$\max_{u \in \Sigma(\partial U)} \min_{t \in [t_0, T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t, t_0) \ell}{c(\Phi(t), \psi) - \psi^T q(t, u)} > \frac{1}{m_r}, \; r = 1, 2, \ldots.$$

Звідси $\max\limits_{u\in\Sigma(\partial U)}\ \min\limits_{t\in[t_0,T]}\max\limits_{\psi\in S}\dfrac{\psi^T\Theta(t,t_0)\,x_r}{c\,(\Phi\,(t),\psi)-\psi^T q\,(t,u)}>1$, де $x_r=m_r\ell$. З (4) випливає $x_r\notin D_*$. Але $x_r\to x_0$, $r=1,2,\ldots$, тому $x_0\in\partial D_*$. Критерій доведено.

Наслідок 1. Функція деформації множини D_* (*оптимальна* функція деформації) задовольняє співвідношенню

$$k_*(\ell)=\min_{u\in\Sigma(\partial U)}\max_{t\in[t_0,T]}\ \min_{\psi\in S,\,\psi^T\Theta(t,t_0)\ell>0}\frac{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)}{\psi^T\Theta(t,t_0)\ell},\ \ell\in S.$$

Тоді $D_*=\left\{x\in R^n : x=k\ell, k\in[0,k_*(\ell)],\ \ell\in S\right\}$ — строго зіркова множина.

Наслідок 2. Функція

$$\xi(z)=\max_{u\in\Sigma(\partial U)}\min_{t\in[t_0,T]}\max_{\psi\in S}\frac{\psi^T\Theta(t,t_0)z}{c(\Phi(t),\psi)-\psi^T q(t,u)}$$

є визначаючою для D_*. При цьому має місце умова локальності відносно D_*.

Доведення. Те, що функція ξ є визначаючою для D_*, випливає з доведення критерію 1. Доведемо умову локальності. Візьмемо послідовність $\omega_k\to 0$, $k=1,2,\ldots$ і точку $z\in R^n$ таку, що $\xi(z)\le 1+\omega_k$. З наслідку 1 критерію 1 випливає, що $\|z\|\le k_*(\ell)+\varepsilon_k$, де $\ell=z/\|z\|$, $\varepsilon_k=|\omega_k|\max\limits_{\ell\in S}k_*(\ell)$, $\varepsilon_k\to+0$, $k=1,2,\ldots$. Звідси $z=\|z\|\ell\in[0,k_*(\ell)+\varepsilon_k]\ell$. Оскільки $k_*(\ell)\ell\in D_*$ та $z\in(k_*(\ell)\ell)^{\varepsilon_k}$, то $z\in(D_*)^{\varepsilon_k}$. Наслідок доведено.

Теорема 5. Опорна функція множини D_* має вигляд

$$c(D_*,\psi)=\mathrm{co}\min_{\psi}\ \max_{u\in\Sigma(U)}\ _{t\in[t_0,T]}\Big(c(\Phi(t),\Theta^T(t_0,t)\psi)-\psi^T\Theta(t_0,t)q(t,u)\Big),\ \psi\in R^n.$$

Доведення. Візьмемо довільну точку $x_0\in D_*$. Тоді за означенням 2 для будь-якого $x\in X(\cdot,x_0,t_0)$ знайдеться момент $\tau\in[t_0,T]$ такий, що $x(\tau,x_0,t_0)\in\Phi(\tau)$. Це означає: для довільного селектора $u\in\Sigma(U)$ існує $\tau\in[t_0,T]$, при якому $\Theta(\tau,t_0)x_0+q(\tau,u)\in\Phi(\tau)$. За властивостями опорних функцій [1] для всіх $\xi\in R^n$ виконується нерівність $\xi^T\Theta(\tau,t_0)x_0\le$ $\le c(\Phi(\tau),\xi)-\xi^T q(\tau,u)$. Здійснюємо заміну $\psi=\Theta^T(\tau,t_0)\xi$.

Тоді

$$\psi^T x_0\le c(\Phi(\tau),\Theta^T(\tau,t_0)\xi)-\psi^T\Theta(t_0,\tau)\,q(\tau,u).$$

Таким чином, для будь-якого $u\in\Sigma(U)$

$$\psi^T x_0\le\max_{t\in[t_0,T]}\Big(c(\Phi(t),\Theta^T(t_0,t)\xi)-\psi^T\Theta(t_0,t)q(t,u)\Big).$$

Звідси отримуємо

$$\psi^T x_0 \le \min_{u\in\Sigma(U)} \max_{t\in[t_0,T]} \Big(c(\Phi(t),\Theta^T(t_0,t)\xi) - \psi^T \Theta(t_0,t) q(t,u)\Big).$$

За означенням обопуклення функції [22]

$$\psi^T x_0 \le \operatorname*{co}_{\psi} \min_{u\in\Sigma(U)} \max_{t\in[t_0,T]} \Big(c(\Phi(t),\Theta^T(t_0,t)\,\xi) - \psi^T \Theta(t_0,t)\, q(t,u)\Big).$$

З властивостей опорних функцій [1] випливає, що

$$h(\psi) = \operatorname*{co}_{\psi} \min_{u\in\Sigma(U)} \max_{t\in[t_0,T]} \Big(c(\Phi(t),\Theta^T(t_0,t)\psi) - \psi^T \Theta(t_0,t)\, q(t,u)\Big)$$

є опорною для множини D_*. Теорему доведено.

Теорема 6. Нехай сукупність $D_*(p)$ є максимальною за включенням множиною зовнішньої практичної стійкості (2) при фазових обмеженнях, що задаються неперервним опуклозначним відображенням $\Theta:(t,p) \mapsto \mapsto \Phi(t,p)$, $Q(t) \subset \Phi(t,p)$, $t\in[t_0,T]$, $p\in P$, $P \subseteq R^m$ — замкнена область. Тоді відображення $F: p \mapsto D_*(p)$ компактозначне і неперервне, $p \in P$. Якщо існує $\varepsilon > 0$, для якого $(\Phi(t,p))^{\varepsilon} \subseteq \Phi(t,q)$, $p\in P$, $q \in P$, $t\in[t_0,T]$, то $D_*(p) \subseteq \operatorname{int} D_*(q)$.

Доведення. Функція $\xi(z,p) = \max_{u\in\Sigma(\partial U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \dfrac{\psi^T\Theta(t,t_0)z}{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T q(t,u)}$ є неперервною. Справді,

$$\xi(z,p) = \max_{u\in\Sigma(\partial U)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T\Theta(t,t_0)z}{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T q(t,u)} =$$

$$= \max_{x\in X(\cdot,0.t_0)} \min_{t\in[t_0,T]} \max_{\psi\in S} \frac{\psi^T\Theta(t,t_0)z}{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T x(t)}.$$

Оскільки $X(\cdot,0,t_0)$ є компактом у просторі $C([t_0,T],R^n)$, то $\xi(z,p)$ є неперервною [2]. Тоді з критерію 1 випливає, що $\xi(z,p)$ — визначаюча для множини $D_*(p)$. За властивостями визначаючої функції відображення F є неперервним. Доведемо монотонність. З $(\Phi(t,p))^{\varepsilon} \subseteq \Phi(t,q)$ випливає $c(\Phi(t,p),\psi) + \varepsilon \le c(\Phi(t,q),\psi)$, $\psi \in S$. Позначимо

$$f(u,t,\psi,z,p) = \frac{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T q(t,u)}{\psi^T\Theta(t,t_0)z},\ \psi^T\Theta(t,t_0)z > 0.$$

Тоді

$$f(u,t,\psi,z,q) \ge \frac{c(\Phi(t,p),\psi) + \varepsilon - \psi^T q(t,u)}{\psi^T\Theta(t,t_0)z} = \frac{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T q(t,u)}{\psi^T\Theta(t,t_0)z} + \varepsilon_1,$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{\psi^T\Theta(t,t_0)z}$.

Таким чином, $f(u,t,\psi,z,q) \ge f(u,t,\psi,z,p) + \varepsilon_1$.

Звідси

$$f_1(u,t,q) = \min_{\psi \in S} f(u,t,\psi,z,q) \ge \min_{\psi \in S} f(u,t,\psi,z,p) + \varepsilon_1 = f_1(u,t,p) + \varepsilon_1 .$$

Нехай $t^* = \arg \max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,p)$. Справджується нерівність

$$f_1(u,t^*,q) \ge f_1(u,t^*,p) + \varepsilon_1 = \max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,p) + \varepsilon_1$$

і $\max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,q) \ge \max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,p) + \varepsilon_1$.

Остаточно отримуємо

$$\min_{u \in \Sigma(\partial U)} \max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,q) > \min_{u \in \Sigma(\partial U)} \max_{t \in [t_0,T]} f_1(u,t,p) .$$

Звідси $\xi(z,p) > \xi(z,q)$. З критерію 1 випливає: якщо $z \in \partial D_*(p)$, то $z \in \operatorname{int} D_*(q)$. Наслідок доведено.

Теорема 7. Нехай Φ є неперервною і опуклозначною функцією на інтервалі $[\bar{t},\overline{T}]$. Припустимо, що відображення θ ставить у відповідність значенням початкового і кінцевого моментів часу $t_0 \in [\bar{t},\overline{T}]$, $T \in [\bar{t},\overline{T}]$ максимальну за включенням множину зовнішньої практичної стійкості незбуреного розв'язку диференціального включення (2) на відрізку $[t_0,T]$, тобто $\theta(t_0,T) = D_*$. Тоді відображення θ є неперервним, $\theta(t_0,T_1) \supseteq \theta(t_0,T_2)$, $T_1 \in [t_0,T_2]$, $T_2 \in [t_0,\overline{T}]$.

Доведення наслідку випливає з неперервності функції

$$\xi(z,t_0,T) = \max_{u \in \Sigma(\partial U)} \min_{t \in [t_0,T]} \max_{\psi \in S} \frac{\psi^T \Theta(t,t_0) z}{c(\Phi(t,p),\psi) - \psi^T q(t,u)} .$$

Теорему доведено.

Алгоритм

Вводимо сітки $\alpha = \{t_0,t_1,...,t_k : t_i < t_{i+1},\, i = 0,1,...,k-1,\, t_k = T\}$, $\omega \subset S$, $\gamma(t) \subset \partial U(t)$, $t \in \alpha$. Сітку $\gamma(t)$ можна побудувати, виходячи з опорної функції $c(U(t),\psi)$, $\psi \in S$. Для цього застосуємо рівність $\max_{\psi \in S} \dfrac{\psi^T u}{c(U(t),\psi)} = 1$, $u \in \partial U(t)$. Тоді $\gamma(t) = \{u_i : u_i = \lambda(\ell)\ell,\ \ell \in \omega\}$, де $\lambda(\ell) = \min_{\psi \in \omega,\, \psi^T \ell > 0} \dfrac{c(U(t),\psi)}{\psi^T \ell}$, $\ell \in \omega$.

Крок 1. Обчислюємо фундаментальну матрицю $\Theta(t,\tau)$, $t \in \alpha$, $\tau \in \alpha$, задаємо опорну функцію $c(\Phi(t),\psi)$, $\psi \in S$. Формуємо множину

$$W = \{(u_0,u_1,...,u_{k-1}) : u_i \in \gamma(t_i),\ i = 0,1,...,k-1\}$$

і функцію $\overline{q}(t_i, w) = \sum_{r=0}^{i} \Theta(t_i, t_r) u_r h_r$, де $h_r = t_{r+1} - t_r$, $r = 0,1,...,i$, $i = 0,1,...$ $..., k-1$, $w = (u_0, u_1, ..., u_{k-1}) \in W$.

Крок 2. Перевіряємо нерівність $\min_{t\in\alpha} \min_{\psi\in\omega} \left(c(\Phi(t),\psi) - c(Q(t),\psi) \right) > 0$. Якщо вона порушується, то переходимо на крок 5.

Крок 3. Для кожного $\ell \in \omega$ знаходимо

$$\overline{k}(\ell) = \min_{w\in W} \max_{t\in\alpha} \min_{\psi\in\omega, \psi^T\Theta(t,t_0)\ell>0} \frac{c(\Phi(t),\psi) - \psi^T \overline{q}(t,u)}{\psi^T \Theta(t,t_0)\ell}.$$

Крок 4. Будуємо множину $D = \left\{ x \in R^n : x = k\ell, k \in [0, \overline{k}(\ell)], \ell \in \omega \right\}$, яка апроксимує D_*.

Крок 5. Вихід.

Розглянемо приклад застосування критерію 1.

Приклад. Нехай фазові обмеження задаються формулою

$$\Phi(t) = \{ x \in R^n : \max_{k=1,2,...,n} | \ell_k^T(t) x | \le 1 \},$$

де $\ell_k(t)$ — n-вимірні неперервні вектор-функції, $t \in [t_0, T]$, $k = 1, 2, ..., n$, $\operatorname{rang}\{\ell_k(t)\} = n$. Тоді $c(\Phi(t),\psi) = \sum_{i=1}^{n} \left| g_i^T(t)\psi \right|$. Тут матриця $L(s) = (\ell_1(s) \times$ $\times \ell_2(s) \ldots \ell_n(s))$, $g_k(t)$ — n-вимірні неперервні вектор-функції, $t \in [t_0, T]$, $k = 1,2,..., n$ такі, що $(g_1(s)\, g_2(s) \ldots g_n(s)) = (L^{-1}(s))^T$. Тоді з (8) випливає, що оптимальна функція деформації має вигляд

$$k_*(\ell) = \min_{u\in\Sigma(\partial U)} \max_{t\in[t_0,T]} \min_{\psi\in S, \psi^T\Theta(t,t_0)\ell>0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| g_i^T(t)\psi \right| - \psi^T q(t,u)}{\psi^T \Theta(t,t_0)\ell}, \quad \ell \in S.$$

Припустимо відображення U задається співвідношенням

$$U(t) = \left\{ u \in R^n : |u_i| \le r_i(t), \; i = 1, 2, ..., n \right\}.$$

Тут функції $r_i(t) > 0$ є неперервними, $t \in [t_0, T]$, $i = 1, 2, ..., n$. Тоді сітку $\gamma(t)$ в алгоритмі 1 можна побудувати за допомогою функції

$$\lambda(\ell) = \min_{\psi\in\omega, \psi^T\ell>0} \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i(t) |\psi_i|}{\psi^T \ell}, \quad \ell \in \omega.$$

Таким чином, у статті проведено дослідження властивостей оптимальної за включенням множини зовнішньої практичної стійкості диференціального включення і побудовано алгоритм знаходження цієї множини для лінійного включення. Результати дослідження в перспективі можуть бути розповсюдженими на задачі зовнішньої практичної стійкості динамічних систем при постійно діючих збуреннях.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН. — 1985. — **169.** — С. 194–252.
2. *Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Вступ до аналізу та оптимізації структурно заданих систем: Навчальний посібник. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2003. — 113 с.
3. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. — Минск: Наука и техника, 1986. — 296 с.
4. *Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
5. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 295с.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
7. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. — Boston: Birkhäuser. — 1990. — 462 p.
8. *Згуровский М.З., Мельник В.С.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Київ: Наук. думка, 1999. — 630 с.
9. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 535 с.
10. *Башняков О.М., Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В.* Практична стійкість та структурна оптимізація динамічних систем. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2000. — 197 с.
11. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. — Київ: Наук. думка, 1985. — 304 с.
12. *Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А.* Аналіз та оцінка параметричних систем. — Київ: ІСДО, 1995. — 140 с.
13. *Еругин Н.П.* Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения // Прикладная математика и механика. — 1951. — **15**, вып. 2. — С. 227–236.
14. *Карачаров К.А., Пилютик А.Г.* Введение в техническую теорию устойчивости движения. — М.: Физматиздат, 1962. — 244 с.
15. *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. — Київ: Выща шк., 1978. — 184 с.
16. *Лебедев А.А.* К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени // Прикладная математика и механика. — 1954. — **18**, вып.1. — С. 75–94.
17. *Мартынюк А.А.* Практическая устойчивость движения. — Київ: Наук. думка, 1983. — 248 с.
18. *Michel A.N., Porter D.W.* Practical stability and finite-time stability // IEEE Trans. Circuit. Theory. — 1972. — **19**, № 2. — P. 123–129.
19. *Weiss L., Infante E.F.* On the stability of systems defined over finite time interval // Proc. National Acad. Science — 1965. — **54**, № 1. — P. 44–48.
20. *Weiss L., Infante E.F.* Finite time stability under pertrubing forces on product spaces // IEEE Trans. On Automat. Cont. — 1967. — **12**, № 1. — P. 54–59.
21. *Пічкур В.В.* Властивості трубки багатозначної функції // Вісн. Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2003. — Вип. 3. — С. 253–256.
22. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1980. — 319 с.
23. *Гаращенко Ф.Г., Пичкур В.В.* Свойства оптимальных множеств внешней практической слабой устойчивости дифференциальных включений // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 1. — С. 5–16.

Надійшла 16.05.2005