УДК 518. 9

# ОПТИМИЗАЦИЯ СТРАТЕГИИ ПОЛИТИЧЕСКИХ ПАРТИЙ В ХОДЕ ПРЕДВЫБОРНОЙ КАМПАНИИ

**В.В. ОСТАПЕНКО, О.С. ОСТАПЕНКО, Т.В. ПОДЛАДЧИКОВА**

Предложена теоретико-игровая модель борьбы двух крупных партий за электорат в ходе предвыборной кампании. Доказано существование и единственность решения задачи выбора оптимальной стратегии распределения денежных средств по районам. На основе решения поставленной оптимизационной задачи в работе указывается решающее правило, которое определяет, какие средства вложить партии для выигрыша, когда информация о конкурентах носит лишь вероятностный характер.

## ВВЕДЕНИЕ

Определяющим в борьбе двух партий за электорат в ходе предвыборной кампании является то, что каждая из них влияет на электорат. Поэтому, чтобы определить оптимальную политику при ограниченных денежных ресурсах, каждая партия должна учитывать не только свое влияние на электорат, но и косвенное влияние через взаимодействие своих конкурентов.

Стратегия каждой партии направлена на максимизацию количества избирателей, отдающих голоса за нее. Предлагается модель, которая является развитием модели борьбы двух партий, рассмотренной в работе [1]. Там же приведен обзор математических моделей и методов в социологии.

В данной работе формируется функция выигрыша, адекватно описывающая анализируемый процесс, а также обеспечивающая существование и единственность решения задачи максимизации при ограниченных денежных средствах.

Функция выигрыша формируется с учетом неоднородности влияния на электорат в различных районах. Формулируется задача математического программирования для определения максимального количества голосов, отданных за партию, и определения оптимальной стратегии распределения денежных средств по районам в ходе предвыборной кампании.

Задача оптимизации формулируется в работе как задача решения нелинейной системы, размерность которой зависит от количества районов и сводится к задаче решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным.

На основе решения оптимизационной задачи в работе вводится решающее правило, определяющее, какие средства на выборы следует вложить партии в неопределенной ситуации, когда информация о действиях конкурентов носит лишь вероятностный характер. Решающее правило сводит к минимуму риск, т.е. потери, связанные с принятием неправильного решения.

**ФУНКЦИЯ ВЫИГРЫША**

Предполагается, что цель каждой из двух конкурирующих партий заключается в максимизации количества избирателей, отдавших свои голоса за эту партию. Предвыборная кампания проводится в $n$ районах. В каждом из них количество населения, имеющее право голоса, равно $A_i$ ($A_i > 0$, $i = 1,...,n$). Также предполагается, что на основе экспертных оценок определена степень влияния каждой партии в районах предвыборной борьбы.

Первая и вторая партии выделяют на выборы капитал соответственно $a$ и $b$. Оптимальная стратегия каждой партии состоит в том, чтобы распределить капитал между районами для обеспечения максимального выигрыша.

Введем функции, отражающие зависимость процента полученных партиями голосов в каждом районе от вложенного капитала и влияния в этом районе.

$$f_i(x_i) = \frac{k_i x_i}{1 + k_i x_i}, \qquad (1)$$

где $f_i(x_i)$ — функция вложенного в $i$-й район капитала $x_i$, которая показывает, какую часть электората первая партия может привлечь на свою сторону в этом районе.

$$g_i(y_i) = \frac{l_i y_i}{1 + l_i y_i}, \qquad (2)$$

где $g_i(y_i)$ — функция вложенного в $i$-й район капитала $y_i$, показывающая, какую часть электората вторая партия может привлечь на свою сторону в этом районе.

Коэффициенты $k_i \geq 0$ и $l_i \geq 0$ отражают приоритет $i$-го района соответственно для первой и второй партий.

Функции выигрыша выбраны таким образом, что с ростом капиталовложений каждая последующая денежная единица приносит меньшее количество голосов, чем предыдущая. При достаточно больших величинах вложенного капитала его дальнейшее увеличение практичесеки не приводит к увеличению выигрыша (рис. 1).

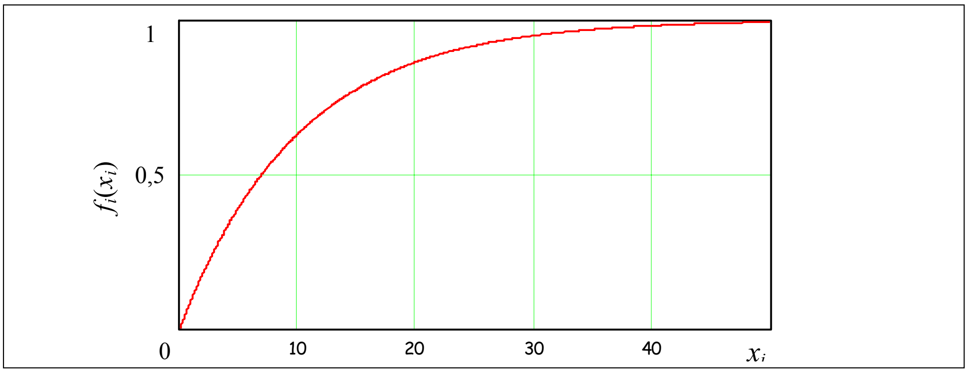


*Рис. 1.* Качественный характер зависимости функции выиграша от вложенного капитала

Предполагается, что обе партии одновременно получают голоса в каждом районе. Пусть $u_i$ — количество голосов, которые получила первая партия в $i$-м районе, $v_i$ — количество голосов второй партии в этом же районе. Тогда одновременный выбор для партий в $i$-м районе запишем в виде

$$u_i = f_i(x_i)(A_i - v_i),$$

$$v_i = g_i(y_i)(A_i - u_i).$$

Решение этой системы относительно $u_i$ и $v_i$ следующее:

$$u_i = \frac{f_i(x_i)(1-g_i(y_i))}{1-f_i(x_i)g_i(y_i)} A_i,$$

$$v_i = \frac{g_i(y_i)(1-f_i(x_i))}{1-f_i(x_i)g_i(y_i)} A_i.$$

Общий выигрыш для первой партии обозначим как

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i, y_i),$$

где $x, y$ — $n$-мерные векторы, компонентами которых являются соответственно $x_i, y_i$.

$$F_i(x_i, y_i) = \frac{f_i(x_i)(1-g_i(y_i))}{1-f_i(x_i)\,g_i(y_i)} A_i. \quad (3)$$

Общий выигрыш для второй партии

$$G(x,y) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x_i, y_i),$$

где

$$G_i(x_i, y_i) = \frac{g_i(y_i)(1-f_i(x_i))}{1-f_i(x_i)\,g_i(y_i)} A_i. \quad (4)$$

Подставляя выражения (1) и (2) соответственно в (3) и (4), получаем

$$F_i(x_i, y_i) = \frac{k_i x_i}{1 + k_i x_i + l_i y_i} A_i,$$

$$G_i(x_i, y_i) = \frac{l_i y_i}{1 + k_i x_i + l_i y_i} A_i.$$

Функции общего выигрыша $F(x,y)$ и $G(x,y)$ имеют непрерывные вторые частные производные. В силу того что эти функции аддитивны, матрицы Гессе для них имеют диагональную форму.

Гессиан матрицы $F(x,y)$

$$H_F = \begin{pmatrix} -\frac{2k_1^2(1+l_1y_1)}{(1+k_1x_1+l_1y_1)^3}A_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2k_n^2(1+l_ny_n)}{(1+k_nx_n+l_ny_n)^3}A_i \end{pmatrix}.$$

Гессиан матрицы $G(x,y)$

$$H_G = \begin{pmatrix} -\frac{2l_1^2(1+k_1x_1)}{(1+k_1x_1+l_1y_1)^3}A_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2l_n^2(1+k_nx_n)}{(1+k_nx_n+l_ny_n)^3}A_i \end{pmatrix}.$$

Матрицы $H_F$ и $H_G$ отрицательно определены. Следовательно, функции общего выигрыша строго вогнуты. Это значит, что с увеличением вложенного капитала каждая дополнительная денежная единица, выделенная на выборы, приносит меньше дополнительных голосов, чем предыдущая.

## МАКСИМИЗАЦИЯ ВЫИГРЫША ПАРТИЙ

Задача максимизации выигрыша для первой партии заключается в выборе значений капитала $x_i$, максимизирующих функцию $F(x,y)$, для второй — в выборе $y_i$, максимизирующих функцию $G(x,y)$.

Суммарные расходы по районам не могут превышать общего капитала, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le a\,,\ \sum_{i=1}^{n} y_i \le b\,,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Таким образом, задача максимизации выигрыша для каждой партии формулируется как задача нелинейного программирования следующим образом.

Для первой партии

$$\max_x F(x,y) \text{ при условиях } \sum_{i=1}^{n} x_i \le a\,,\ x_i \ge 0\,,\ (i=1,\ldots,n). \tag{5}$$

Для второй партии

$$\max_y G(x,y) \text{ при условиях } \sum_{i=1}^{n} y_i \le b\,,\ y_i \ge 0\,,(i=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Рассмотрим задачу максимизации для первой партии при произвольных неотрицательных значениях $y_i$.

В силу того что $F(x, y)$ непрерывная функция, допустимое множество $x$ — компактное, по теореме Вейерштрасса решение этой задачи существует [2]. А так как целевая функция строго вогнута по $x$, то это решение единственно [3].

Определим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda, y) = \sum_{i=1}^{n} F_i\ (x_i\ , y_i) + \lambda \left( a - \sum_{i=1}^{n} x_i \right),$$

где $\lambda$ — множитель Лагранжа.

Так как функция $F(x, y)$ строго вогнута по $x$, а допустимое множество задается линейными ограничениями, то для оптимальности точки $x^*$ в соответствии с теоремой Куна–Такера необходимо и достаточно существования такого $\lambda^* \geq 0$, чтобы пара $(x^*, \lambda)$ была седловой точкой функции Лагранжа на множестве $x \geq 0$ [3, 4].

Запишем условия существования седловой точки $L(x, \lambda, y)$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \lambda \leq 0\ ,\ \ i = 1, \ldots, n\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = a - \sum_{i=1}^{n} x_i \geq 0\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \lambda \right) x_i = 0\ ,\ \ i = 1, \ldots, n\ , \tag{7}$$

$$\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \lambda \left( a - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = 0\ ,$$

$$x \geq 0,\ \ \lambda \geq 0\ .$$

Все переменные и частные производные в выражении (7) вычисляются в $\left(x^*, \lambda^*, y\right)$, где $x^*$ — решение задачи (5).

Таким образом, если $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} < \lambda^*$, то $x_i^* = 0$ или если $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \lambda^*$, то $x_i^* > 0$. Для капитала, вложенного во все районы, $x_i^* > 0$ $\left(i = 1 \ldots n\right)$, справедливо соотношение $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \lambda^*$.

Это значит, что капитал должен быть распределен таким образом, чтобы скорости изменения функции выигрыша во всех районах были равными, т.е. в оптимальной точке каждая последняя денежная единица в каждом районе должна добавлять одинаковое количество голосов.

Так как $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} = \dfrac{k_i(1 + l_i y_i)}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^2} > 0$, то $\lambda^* > 0$.

Из положительности $\lambda$ и условий существования седловой точки следует, что весь капитал должен быть израсходован, т.е.

$$a - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Это также следует из того факта, что если бы не весь капитал был израсходован, то оставшиеся деньги можно было бы вложить в какой-нибудь район и тем самым увеличить выигрыш.

Считается, что партия вкладывает капитал во все районы. В противном случае можно уменьшить размерность пространства допустимых решений, исключив из рассмотрения неохваченные районы.

Тогда условия оптимальности первого порядка примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda = 0, \\ a - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Так как функция $F$ дифференцируема и вогнута, а ограничения линейны, решение системы (8) представляет собой глобальное решение задачи условной оптимизации (5) [5,6].

Аналогично формулируются необходимые и достаточные условия решения задачи (6) максимизации выигрыша для второй партии при произвольном неотрицательном наборе $x_i \ge 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial y_i} - \mu = 0, \\ b - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\mu$ — множитель Лагранжа.

Поскольку обе партии стремятся одновременно максимизировать свой выигрыш, то решение задачи одновременной максимизации выигрыша обеими партиями может быть получено как совместное решение объединенной системы.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial y_i} - \mu = 0, \\ a - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ b - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases} \tag{10}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{k_i\left(1+l_i y_i\right)}{\left(1+k_i x_i+l_i y_i\right)^2} A_i=\lambda, \; i=1,\ldots,n, \\ \dfrac{l_i\left(1+k_i x_i\right)}{\left(1+k_i x_i+l_i y_i\right)^2} A_i=\mu, \; i=1,\ldots,n, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i=a, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i=b. \end{cases} \tag{11}$$

Решение системы (11) существует, если определитель матрицы Якоби не равен нулю.

Матрица Якоби размерности $(2n+2)\times 2n+2$ для системы (11) имеет вид

$$J=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial^2 G_1}{\partial x_1 \partial y_1} & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} & \ldots & 0 & 0 & \frac{\partial^2 G_2}{\partial x_2 \partial y_2} & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 F_n}{\partial x_n^2} & 0 & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 G_n}{\partial x_n \partial y_n} & 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 x_1} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial^2 G_1}{\partial y_1^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 x_2} & \ldots & 0 & 0 & \frac{\partial^2 G_2}{\partial y_2^2} & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 F_n}{\partial y_n x_n} & 0 & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 G_n}{\partial y_n^2} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажем, что матрица Якоби невырожденная.

Представим матрицу $J$ в блочном виде

$$J=\begin{bmatrix} A & C \\ -C^T & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$A=\begin{bmatrix} H_F & Q_1 \\ Q_2 & H_G \end{bmatrix}, \; Q_1=\operatorname{diag}\left[\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial y_i}\right], \; Q_2=\operatorname{diag}\left[\frac{\partial^2 F_i}{\partial y_i \partial x_i}\right], \; i=1,\ldots,n,$$

$$C^T = \begin{vmatrix} c_1^T \\ c_2^T \end{vmatrix}, \quad c_1^T = (1\,1,\ldots,1\;0\;0,\ldots,0), \quad c_2^T = (0\;0,\ldots,0\;1\;1,\ldots,1).$$

Покажем, что матрица $A$ невырожденная. Умножим первую строку субматрицы $A$ на $Q_2 H_F^{-1}$ и вычтем из второй строки. Полученным результатом заменим вторую строку.

Тогда

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} H_F & Q_1 \\ 0 & H_G - Q_2 H_F^{-1} Q_1 \end{bmatrix} = \det(H_F)\det\left(H_G - Q_2 H_F^{-1} Q_1\right). \quad (12)$$

Матрица $H_G - Q_2 H_F^{-1} Q$ также имеет диагональную форму.

$$H_G - Q_2 H_F^{-1} Q = \operatorname{diag}\left[\frac{\partial^2 G_i}{\partial y_i^2} - \frac{\dfrac{\partial^2 F_i}{\partial y_i \partial x_i}\dfrac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial y_i}}{\dfrac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2}}\right].$$

С учетом

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2} = -\frac{k_i^2(1 + l_i y_i)}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^3} A_i, \quad \frac{\partial^2 G_i}{\partial y_i^2} = -\frac{l_i^2(1 + k_i x_i)}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^3} A_i,$$

$$\frac{\partial^2 G_i}{\partial x_i \partial y_i} = \frac{l_i k_i (l_i y_i - 1 - k_i x_i)}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^3} A_i, \quad \frac{\partial^2 F_i}{\partial y_i \partial x_i} = \frac{l_i k_i (k_i x_i - 1 - l_i y_i)}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^3} A_i$$

получаем, что диагональный элемент матрицы $H_G - Q_2 H_F^{-1} Q$ имеет вид

$$\frac{k_i x_i + l_i y_i + (k_i x_i - l_i y_i)^2 + k_i x_i l_i y_i}{(1 + k_i x_i + l_i y_i)^3} > 0.$$

Следовательно, каждый сомножитель в правой части выражения (12) отличен от нуля и матрица $A$ невырожденная.

Рассмотрим матрицу $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & c_1^T \\ -c_1^T & 0 \end{bmatrix}$.

Применяя прием, аналогичный предыдущему, запишем

$$\det(\widetilde{A}) = \det(A)\det\left(c_1^T A^{-1} c_1\right).$$

Так как матрица невырожденная, то $\det(\widetilde{A}) \neq 0$.

Представим якобиан в виде

$$J = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & c_2 \\ c_2^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\det(J) = \det(\widetilde{A})\det(c_2^T \widetilde{A} c_2) \neq 0$.

Таким образом, решение задачи максимизации существует.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ**

Поиск решения нелинейной системы (10) из $2n+2$ уравнений с $2n+2$ неизвестными может быть значительно упрощен, если исключить два неизвестных множителя Лагранжа.

Разделив первое уравнение системы (10) на второе, получим

$$\frac{k_i(1+l_i y_i)}{l_i(1+k_i x_i)} = \frac{\lambda}{\mu} \tag{13}$$

или

$$\left(x_i + \frac{1}{k_i}\right) = \frac{\mu}{\lambda}\left(y_i + \frac{1}{l_i}\right). \tag{14}$$

Просуммируем обе части последнего равенства по $i$.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{k_i}\right) = \frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i + \frac{1}{l_i}\right).$$

Учитывая ограничения $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = b$, можно записать

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i} + a}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i} + b}. \tag{15}$$

Обозначим отношение множителей Лагранжа $\mu/\lambda$ через $C$.

Из выражения (15) следует, что если обе партии имеют одинаковое суммарное влияние, т.е. $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}$, но первая партия вложила больше средств на выборы, чем вторая, т.е. $a > b$, то последняя денежная единица, вложенная второй партией, принесет ей больше голосов, чем первой. При равных капиталах, вложенных партиями в предвыборную кампанию, и большем влиянии первой партии, последняя денежная единица, вложенная второй партией, принесет ей меньше голосов, чем первой.

Подставляя $\mu/\lambda = C$ в выражение (14),

$$k_i x_i = \frac{Ck_i(1+l_i y_i) - l_i}{l_i}.$$

Воспользуемся полученным выражением для того, чтобы исключить переменную $x_i$ из системы (11). Подставив его в первое уравнение системы (11), после преобразования получим систему из $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестным

$$\begin{cases} \dfrac{k_i l_i^2(1+l_i y_i)A_i}{\left(y_i\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right) + Ck_i\right)^2} = \lambda, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = b. \end{cases} \tag{16}$$

Первое уравнение системы (16) запишем в виде квадратного уравнения относительно $y$.

$$a_1 \lambda y_i^2 + (2a_2\lambda - a_3) y_i + a_4\lambda - a_5 = 0 , \quad (17)$$

где $a_1 = \left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2$, $a_2 = \left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)Ck_i$, $a_3 = k_i l_i^3 A_i$, $a_4 = C^2 k_i^2$, $a_5 = = k_i l_i^2 A_i$.

Решение уравнения (17) имеет вид

$$y_i = \frac{a_3 - 2a_2\lambda \pm \sqrt{(2a_2\lambda - a_3)^2 - 4a_1\lambda(a_4\lambda - a_5)}}{2a_1\lambda} .$$

После подстановки выражений $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ и ряда преобразований, получим решение уравнения (17)

$$y_i = \frac{k_i l_i^3 A_i - 2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)Ck_i\lambda \pm \sqrt{D}}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2 \lambda} , \quad (18)$$

где $D = 4(l_i + Ck_i)k_i l_i^5 A_i \lambda + k_i^2 l_i^6 A_i^2$.

Знак «–» перед выражением $\sqrt{D}$ можно исключить, так как в этом случае $y_i < 0$.

Воспользовавшись ограничением $\sum_{i=1}^{n} y_i = b$, исключим из выражения (18) $y_i$ и получим одно уравнение с одним неизвестным множителем Лагранжа $\lambda$.

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i l_i^3 A_i}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2 \lambda} - \sum_{i=1}^{n} \frac{Ck_i}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{D}}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2 \lambda} .$$

Таким образом, оптимальный множитель Лагранжа $\lambda$ может быть определен из следующего уравнения:

$$S_1 - (b + S_2)\lambda + \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{D}}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2} = 0 , \quad (19)$$

где $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i l_i^3 A_i}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)^2}$, $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{Ck_i}{2\left(l_i^2 + Ck_i l_i\right)}$.

Таким образом, задача решения нелинейной системы (11) из $2n + 2$ уравнений с $2n + 2$ неизвестными сведена к задаче решения одного нелинейного уравнения (19) с одним неизвестным $\lambda$.

Алгоритм решения задачи состоит из следующих этапов:

1. Вычисление оптимального множителя Лагранжа $\lambda$ из уравнения (19) с использованием численного метода.

2. Определение $y_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ в соответствии с выражением (18).

3. Вычисление $x_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ на основе уравнения (14).

**МИНИМИЗАЦИЯ РИСКА**

Решение задачи об оптимальном распределении ограниченного капитала между районами позволяет каждой партии оценить свои шансы на выигрыш, т.е. на получение большего количества голосов, чем конкурирующая партия.

Если стратегия политической партии направлена на победу на выборах, то на основе предложенной модели можно оценить, какой капитал необходимо выделить на предвыборную кампанию для достижения поставленной цели. Решение о величине капитала принимается на основе информации о денежных средствах, вложенных конкурирующей партией на предвыборную кампанию.

Если конкурирующая (вторая) партия выделила капитал $b$, то на основе приведенной модели можно определить требуемый для победы капитал $a$, который необходимо выделить первой партии.

Если оказалось, что вторая партия вложила в предвыборную кампанию больше, чем ожидалось денежных средств, $b_1 > b$, то первая партия проигрывает, и вложенный капитал $a$ можно считать потерей, связанной с принятием неправильного решения о величине $a$ выделенного капитала.

Напротив, в том случае, если вторая партия вложила меньше ожидаемых средств, т.е. оказалось, что $b_2 < b$, то выделенный первой партией на предвыборную кампанию капитал $a$ можно считать избыточным. Для победы на выборах достаточно было бы выделить капитал $a_2 < a$, а потери, связанные с неправильным решением, оценить величиной $a_2 - a$.

Предположим, что первой партии известны лишь вероятности $P_1, P_2, ..., P_m \left( \sum_{j=1}^{m} P_j = 1 \right)$ того, что вторая партия выделит на выборы капитал соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ $(b_j > b_{j+1}, j = 1,\dots,m-1)$.

На основе этой информации необходимо принять решение о величине выделяемого на предвыборную кампанию капитала.

Из решения задачи об оптимальном распределении средств между районами для максимизации выигрыша можно определить соответственно величины капиталов $a_1, a_2, ..., a_m$ в каждом из рассмотренных $m$ случаев.

С учетом имеющейся информации для принятия решения о величине выделяемого капитала целесообразно воспользоваться следующим решающим правилом.

Пусть $\lambda\left( {a_i}/{b_j} \right) = \begin{cases} a_i, & i < j, \\ a_i - a_j, & i \ge j \end{cases}$ — потери, связанные с вложением капитала $a_i$, когда конкурирующая партия вложила капитал $b_j$. Так как $P_j$ — вероятность того, что действительное вложение конкурента $b_j$, то ожидаемые потери равны

$$R_i(a_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda\left( {a_i}/{b_j} \right) P_j = \sum_{j=1}^{i} (a_i - a_j) P_j + \sum_{j=i+1}^{m} a_i P_j \,. \tag{20}$$

Согласно терминологии принятия решений, ожидаемые потери называются риском. Они сводятся к минимуму выбором действия, минимизирующего риск.

## ПРИМЕРЫ

В качестве примера рассмотрим распределение капитала между двумя районами, в которых проводится избирательная кампания. Электорат первого района $A_1 = 200$, второго — $A_2 = 150$. Приоритеты $i$-го района для первой и второй партий соответственно равны $k_1 = 0{,}2$; $k_2 = 0{,}3$; $l_1 = 0{,}4$; $l_2 = 0{,}2$.

Предположим, первая партия выделила на избирательную кампанию капитал $a = 10$, а вторая — $b = 15$.

Уравнение (19) для рассматриваемого примера имеет вид

$$48{,}024 - 18{,}474\lambda + \frac{\sqrt{0{,}922\lambda + 6{,}554}}{0{,}101} + \frac{\sqrt{0{,}026\lambda + 0{,}13}}{0{,}016} = 0\,. \tag{21}$$

Решение уравнения: $\lambda = 6{,}328$.

В соответствии с выражением (15) $C = 0{,}815$. Из выражения (18) следует, что вторая партия получит максимальное количество голосов, если в первый район вложит $y_1 = 8{,}75$, во второй $y_2 = 6{,}25$.

Из выражения (14) следует, что для первой партии распределение капитала $a$ будет оптимальным, если в первый район она вложит $x_1 = 4{,}167$, а во второй $x_2 = 5{,}833$.

Общий выигрыш первой партии $F(x,y) = \sum_{i=1}^{2} F_i(x_i, y_i)$, т.е. количество голосов, отданных за нее, равен 96,875. Общий выигрыш второй партии $G(x,y) = \sum_{i=1}^{2} G_i(x_i, y_i)$ равен 178,125.

Заметим, что в случае увеличения количества районов, решение задачи практически не усложняется. Единственное отличие — увеличение количества слагаемых в выражении (21).

Так, например, если предвыборная кампания проводится в трех районах, то в правой части выражения (21) добавляется одно слагаемое. В случае приорита в третьем районе обеих партий $k_3 = 0{,}4$; $l_3 = 0{,}3$ и электорате $A_3 = 180$ уравнение для определения множителя Лагранжа $\lambda$ принимает форму

$$76{,}297 - 5{,}183\lambda + \frac{\sqrt{0{,}92\lambda + 6{,}554}}{0{,}101} + \frac{\sqrt{0{,}025\lambda + 0{,}13}}{0{,}016} + \frac{\sqrt{0{,}436\lambda + 3{,}779}}{0{,}007} = 0\,.$$

Решение уравнения: $\lambda = 9{,}662$.

Оптимальное распределение капитала: $x_1 = 1{,}809$; $x_2 = 3{,}688$; $x_3 = 4{,}502$ для первой партии; $y_1 = 5{,}944$; $y_2 = 3{,}707$; $y_3 = 5{,}35$ для второй.

Общий выигрыш первой партии $F(x,y) = \sum_{i=1}^{3} F_i(x_i, y_i)$ равен 151,213. Общий выигрыш второй партии $G(x,y) = \sum_{i=1}^{3} G_i(x_i, y_i)$ равен 231,775.

В последнем случае обе партии имеют одинаковое суммарное влияние, т.е. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{k_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{l_i}$, но вторая партия вложила больше средств на выборы, чем первая, т.е. $a < b$. Последняя денежная единица, вложенная первой партией, приносит ей больше голосов, чем второй партии. Капитал $b = 15$, вложенный второй партией в 1,5 раза больше капитала $a = 10$ первой партии. В этих условиях количество голосов $G = 231{,}775$, отданных за вторую партию, также приблизительно в 1,5 раза превышает количество голосов $F = 151{,}213$.

Решение задачи об оптимальном распределении ограниченного капитала между районами позволяет каждой партии оценить размер денежных средств для получения большего, чем конкурирующая партия, количества голосов.

Предположим, что в условиях проведения предвыборной кампании в двух районах первой партии известна сумма капитала $b = 15$, вкладываемого второй партией. Количество голосов, отданных за каждую партию, зависит от величины капитала $a$, вкладываемого первой партией.

На рис. 2 сплошная кривая показывает зависимость количества голосов, полученных первой партией от величины капитала $a$, пунктирная — зависимость количества голосов, полученных второй партией от величины капитала $a$.

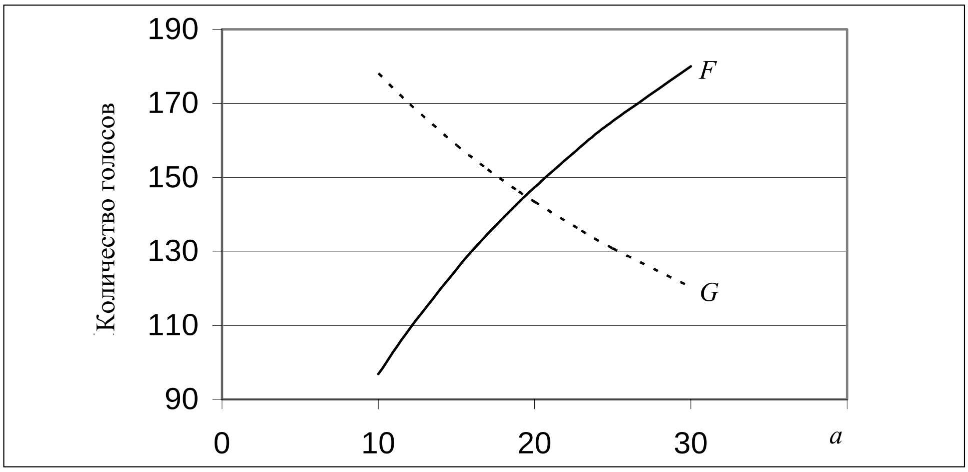


*Рис. 2*. Зависимость количества голосов от *a* при $b = 15$

Как видно из рис. 2, с ростом $a$ от 10 до 30 количество голосов, отданных за первую партию, увеличивается с 93 до 175, а количество голосов, полученных второй партией, уменьшается со 173 до 115. При $a = 20$ выигрыш первой партии превышает выигрыш второй. Поэтому капитал $a = 20$ первой партии необходимо вложить для своей победы на выборах.

Если вторая партия вкладывает в предвыборную кампанию капитал $b = 9$, то, как видно из рис. 3, выигрыш первой партии обеспечивается величиной капитала $a = 12$.

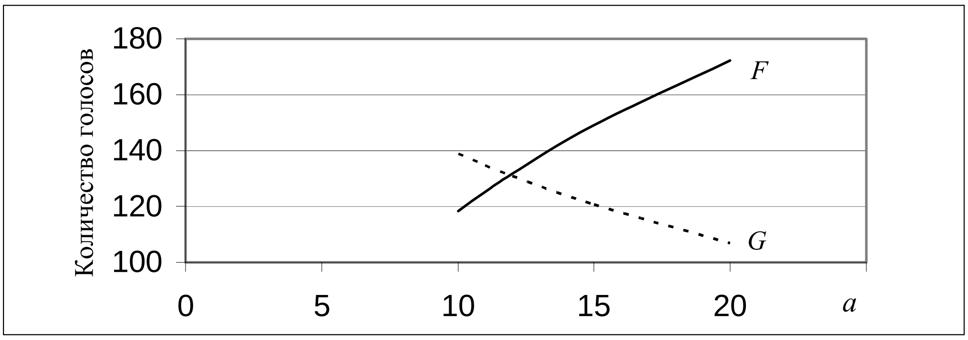


*Рис. 3*. Зависимость количества голосов от *a* при $b = 9$

При $b = 3$ для выигрыша первой партии достаточно вложить капитал $a = 5$ (рис. 4).

Таким образом, при $b = 15$ для выигрыша первой партии достаточно вложить капитал $a = 20$, при $b = 9$ капитал $a = 12$, при $b = 3$ капитал $a = 5$.

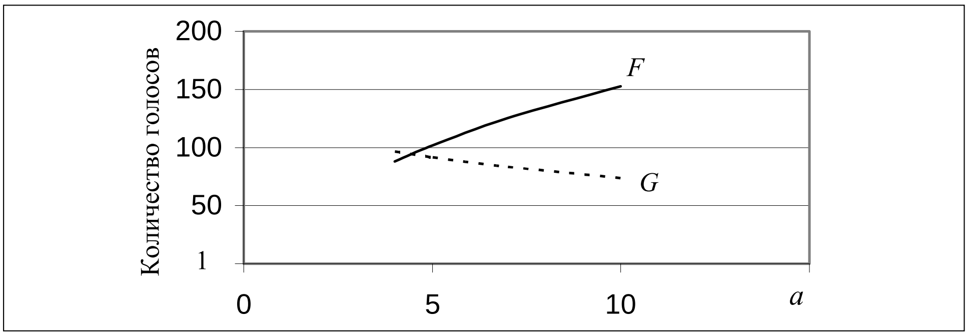


*Рис. 4*. Зависимость количества голосов от *a* при $b = 3$

Пусть первой партии известны лишь вероятности $P_1, P_2, P_3 \left( \sum_{j=1}^{3} P_j = 1 \right)$ того, что вторая партия выделит на выборы капитал соответственно $b_1 = 15,\ b_2 = 9,\ b_3 = 3$. Определим величину $a_i$ $(i = 1,2,3)$ капитала, исходя из минимизации риска.

Потери $\lambda_{ij}$, связанные с вложением капитала $a_i$, когда конкурирующая партия вложила $b_j$:

$$\lambda_{11} = 0,\ \lambda_{12} = 20 - 12 = 8,\ \lambda_{13} = 15,\ \lambda_{21} = 12,\ \lambda_{22} = 0,\ \lambda_{23} = 7,$$

$$\lambda_{31} = 5,\ \lambda_{32} = 5,\ \lambda_{33} = 0.$$

Риск принятия решения о величине капитала $a = 15$ равен $R_1 = 8P_2 + 15P_3$. При $a = 12$ риск $R_2 = 12P_1 + 7P_3$. При $a = 3$ равен $R_3 = 5P_1 + 5P_2$.

Таким образом, выбирается то значение капитала $a$, которому соответствует минимальный риск $R$.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставлена задача выбора оптимальной стратегии распределения ограниченных денежных средств по районам, в которых проводится предвыборная кампания. Приведено доказательство существования и единственности решения задачи максимизации голосов для каждой партии при ограниченных денежных средствах.

Задача оптимизации, сформулированная в работе как задача решения нелинейной системы, размерность которой зависит от количества районов, сведена к задаче решения одного нелинейного уравнения с одним неизвестным.

Показано, что приведенное решение задачи оптимизации распределения капитала между районами позволяет каждой партии оценить необходимый размер денежных средств для получения большего, чем конкурирующая партия, количества голосов на выборах.

В условиях, когда информация о денежных средствах конкурентов носит лишь вероятностный характер, предложен метод выбора решения о величине вкладываемых денежных средств, который сводит к минимуму риск, т.е. потери, связанные с принятием неправильного решения.

Предложенная модель может быть использована для моделирования процесса борьбы фирм за рынки сбыта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Недашківська Н.І.*, *Остапенко В.В, Остапенко О.С.* Теоретико-ігрова модель боротьби партій за електорат // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 4. —С. 113–119.
2. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
3. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. — М.:Наука, 1975. — 288 с.
4. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. — М.: Мир, 1975. — 547 с.
5. *Исследование* операций. Т.1. Методологические основы и математические методы / Под ред. Дж.Моудера, С. Элмаграби. — М.:Мир, 1981. — 711 с.
6. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. — М.: Радио и связь, 1988. — 127 с.

*Поступила 13.01.2005*