

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ КЛАНОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Д.А. ЗАЙЦЕВ

Предложена организация последовательного процесса композиции кланов линейных систем для реализации дополнительных ускорений вычислений при их решении. Получено ускорение вычислений путем решения последовательности систем композиции кланов существенно меньшей размерности. Использован граф декомпозиции системы на кланы. Выполнен сравнительный анализ последовательной композиции подграфов и реберной (парной) композиции. Задача построения последовательности систем наименьшей размерности названа оптимальным коллапсом взвешенного графа. Приведены оценки верхней и нижней границ ширины коллапса, которая соответствует размерности системы. Построен и статистически обоснован эвристический алгоритм оптимального коллапса.

### ВВЕДЕНИЕ

Линейные системы уравнений (неравенств) широко используются в различных областях современной науки [1, 2]. Известно множество методов их решения [1, 2]. Серьезная научная проблема — эффективное решение линейных систем большой размерности — особенно актуальна при поиске решений в целой неотрицательной области, так как для таких задач известны лишь экспоненциальные алгоритмы решения [3].

В работе [4] для ускорения процессов решения линейных систем в полях, кольцах и моноидах предложено использовать их декомпозицию на подсистемы специального вида, названные кланами. Следует отметить: фактические ускорения вычислений получаются только при разложении системы более чем на один клан, что, как правило, имеет место для разреженных систем большой размерности. Существенным для разложения также является наличие коэффициентов с противоположными знаками в уравнениях системы. В [4] композиция всех кланов системы выполнялась одновременно и сводилась к решению единственной системы композиции. В ряде случаев размерность системы композиции может быть значительной и обуславливать общую сложность решения исходной системы. Такая ситуация возможна, если количество контактных переменных превышает максимальный размер клана.

Цель настоящей работы — формализация задачи последовательной композиции кланов линейных систем и построение эффективных методов ее решения.

### КОМПОЗИЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную систему уравнений вида

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов размерности  $m \times n$ ;  $\bar{x}$  — вектор-столбец неизвестных размерности  $n$ ;  $\bar{b}$  — вектор-столбец свободных членов размерности  $m$ . При  $\bar{b} = 0$  систему называют однородной, а при  $\bar{b} \neq 0$  — неоднородной. Как и в работе [4], мы не указываем точно множества значений переменных и коэффициентов. Предполагаем только, что известен метод, позволяющий решить систему (1) и представить ее общее решение в форме

$$\bar{x} = \bar{x}' + G \cdot \bar{y}, \quad (2)$$

где  $G \cdot \bar{y}$  — общее решение соответствующей однородной системы, а  $\bar{x}'$  — минимальное частное решение неоднородной системы (1).

Композиционный метод решения системы (1), описанный в работе [4] состоит из следующих этапов:

1. Декомпозиция системы на кланы.
2. Нахождение общего решения для каждого клана.
3. Композиция кланов.

Напомним, что кланом названо подмножество уравнений, сформированное как транзитивное замыкание отношения близости. Два уравнения близки, если они содержат некоторую переменную с одинаковым знаком. Соответствующие переменные названы внутренними переменными клана. В [4] изучена одновременная композиция кланов, т.е. решение одной системы композиции для всех контактных переменных (входящих в кланы с разными знаками). Такой способ композиции целесообразен при решении систем сравнительно небольшой размерности, а также в тех случаях, когда общее число контактных переменных не превосходит размерности наибольшего из кланов. Возможность применения последовательной композиции обсуждалась в работе [5], где приведены сравнительные оценки сложности одновременной и последовательной композиции для вычисления линейных инвариантов моделей Петри телекоммуникационных протоколов. Показано, что для конкретных моделей протоколов последовательная композиция позволяет получить дополнительное ускорение вычислений.

Линейную систему вида (1), содержащую  $m$  уравнений и  $n$  неизвестных, будем называть  $(m, n)$ -системой. В качестве общей оценки размерности системы, как правило, используют один параметр, равный максимуму количества уравнений и переменных:  $q = \max(m, n)$ . Если числа  $m$  и  $n$  отличаются незначительно, возможно использование одного из них в качестве параметра в оценках сложности. Далее будем предполагать, что сложность системы характеризуется количеством уравнений  $m$ .

Вычислительная сложность решения систем линейных уравнений существенно зависит от области значений переменных и коэффициентов. Так для решения систем в полях известны полиномиальные методы сложности порядка  $q^3$  [1]. Для решения систем в кольцах предложены полиномиальные методы порядка  $q^4$  [2]. Отметим, что известные методы решения линейных диофантовых систем в целых неотрицательных числах [3] являются экспоненциальными. Их временная сложность оценивается  $2^q$ . Как показано в работе [6], приведенная оценка является оптимистичной, поскольку слож-

ность в худшем случае может быть сопоставима с двойной экспонентой. Большинство полученных далее результатов имеют место как для полиномиальных, так и для экспоненциальных методов решения систем. Если различия существенны, то это оговаривается дополнительно.

Предположим, что выполнена декомпозиция системы на  $k$  кланов. Рассмотрим размерности систем для них. Итак, требуется решить  $k$  систем размерности  $(m_1, n_1), (m_2, n_2), \dots, (m_k, n_k)$ . Пусть для клана  $C^i$  получена матрица базисных решений  $G^i$ , насчитывающая  $l_i$  решений. Для полей и колец имеет место известная оценка количества базисных решений  $l_i = n_i - r_i$ , где  $r_i$  — ранг матрицы  $A^i$  соответствующей системы. Отметим, что при решении систем в целых неотрицательных числах оценка количества базисных решений является нетривиальной задачей. Известны примеры систем [6], содержащих пару уравнений и пять переменных, для которых базис насчитывает 240 решений. Однако такое разрастание базиса наблюдается только при использовании целочисленных свободных переменных. Базисы для рациональных генераторов либо, что то же самое, при использовании операции сокращения на общий делитель получаются более компактными. Например, для упомянутой системы он состоит из четырех решений.

После нахождения общих решений для кланов необходимо определить систему композиции для контактных переменных. Оценка размерности этой системы  $(p, \sum_i l_i)$ , поскольку уравнения системы соответствуют контактным переменным, а неизвестными являются свободные переменные базисных решений для кланов. Заметим, что  $\sum_i n_i = n$ ,  $\sum_i m_i = m + p$ , где  $p$  — количество контактных переменных в полученной декомпозиции,  $p = |X^0|$ , а  $X^0$  — множество всех контактных переменных исходной системы. Как отмечено ранее, будем предполагать, считая  $p \approx \sum_i l_i$ , что сложность системы определяется количеством ее уравнений  $p$ . Далее считаем характеристикой размерности системы уравнений клана количество его переменных, а характеристикой размерности композиции кланов — количество используемых в ней контактных переменных. Контактные переменные при таком подсчете учитываются дважды для каждого из смежных кланов  $m_i = |\hat{X}^i| + |\check{X}^i|$ , где  $\hat{X}^i$  — множество внутренних переменных,  $\check{X}^i$  — множество контактных переменных клана  $C^i$ . Поэтому, как правило, выполняется неравенство  $n_i \leq m_i$ .

В работе [4] показано, что каждая контактная переменная используется для связи ровно двух кланов. Поэтому для представления декомпозиции удобно применять ориентированный граф, кратность дуг которого соответствует количеству контактных переменных, используемых для связи пары кланов в определенном направлении. В настоящей работе направление свя-

зей несущественно, поэтому в качестве основного средства представления декомпозиции линейной системы выбран взвешенный неориентированный граф, веса ребер которого равны количеству контактных переменных, используемых для связи соответствующих кланов. Численные характеристики вершин определяются парой  $(m_i, n_i)$ . Далее покажем, что в последовательной композиции характеристики вершин могут быть опущены.

Рассмотрим основные способы организации композиции кланов:

1. Одновременная.
2. Последовательная:
  - а) парная (реберная);
  - б) подграфов.

Одновременная композиция изучена в работе [4]. Полученное ускорение вычислений оценивается как  $2^{q-p}$ . Наиболее простой последовательной является парная композиция, при которой пара смежных вершин заменяется одной в результате решения системы, построенной для контактных переменных, используемых для связи соседних кланов. Количество контактных переменных равно весу соответствующего ребра. По существу такая операция может быть представлена как слияние (стягивание) смежных вершин графа.

Пусть выполняется слияние двух смежных вершин с номерами  $i$  и  $j$ , представляющими системы уравнений сложности соответственно  $(m_i, n_i)$  и  $(m_j, n_j)$ . Тогда сложность системы, решаемой при парной композиции, равна  $(p_{i,j}, l_i + l_j)$ , где  $p_{i,j}$  — количество контактных переменных в композиции кланов  $C^i$  и  $C^j$ . При композиции подграфов решается система для выбранного подмножества вершин. Затем подграф, порожденный этими вершинами, заменяется единственной вершиной. Примеры решения систем с помощью одновременной и последовательной композиции описаны в работе [5].

Одновременную композицию целесообразно применять в тех случаях, когда количество контактных переменных не превышает количества внутренних переменных максимальной подсети  $\max_i (m_i) \geq p$  либо в случаях незначительного превышения. Поскольку обязательным этапом композиционного метода [4] является решение уравнения для каждого клана, дальнейшие построения направлены на снижение сложности решения системы для контактных переменных.

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Для сравнения различных вариантов композиции по отношению к выбранному параметру сложности системы введем следующий взвешенный граф, описывающий декомпозицию системы на кланы. Граф декомпозиции — это тройка  $G = (V, E, W)$ , где вершины множества  $V = \{v\}$  соответствуют кланам  $v \leftrightarrow C$ ; ребра  $E \subseteq V \times V$  соединяют кланы, имеющие общие контактные переменные  $v_1 v_2 \in E \Leftrightarrow \exists x \in X^0 : (I(x) = C^1 \wedge O(x) = C^2) \vee (I(x) =$

$= C^2 \wedge O(x) = C^1$ ); функция взвешивания  $W : (V \rightarrow \mathbb{N}) \cup (E \rightarrow \mathbb{N})$  сопоставляет вершине количество переменных соответствующего клана, а ребру — количество контактных переменных. Кроме того, для каждой вершины выполняется неравенство  $w(v) \geq \sum_u w(v, u)$ , поскольку контактные переменные учитываются совместно с внутренними переменными при оценке размера клана.

Представим последовательную композицию следующим образом. Пусть задан граф  $G$  декомпозиции линейной системы  $S$ . Выберем некоторое подмножество вершин  $V^1 \subseteq V$ , порождающее связный подграф  $H^1 = (V^1)$  графа  $G$ . Заменяем его одной вершиной и перейдем к рассмотрению полученного графа  $G^1$ . Продолжая процесс, мы преобразуем исходный граф в единственную вершину. Процесс последовательной композиции можно представить следующим образом:

$$G = G^0 \xrightarrow[d_1]{V^1} G^1 \xrightarrow[d_2]{V^2} G^2 \rightarrow \dots \xrightarrow[d_k]{V^k} G^k,$$

причем заключительный граф последовательности  $G^k$  состоит из единственной вершины и соответствует завершению процесса композиционного решения. Число  $d_i$  равно сумме весов ребер графа  $H^i$  и соответствует размерности системы композиции, решаемой на шаге  $i$ . Пример коллапса подграфов показан на рис. 1, а на рис. 2 — пример реберного коллапса для последовательности подграфов, изображенной на рис. 1.

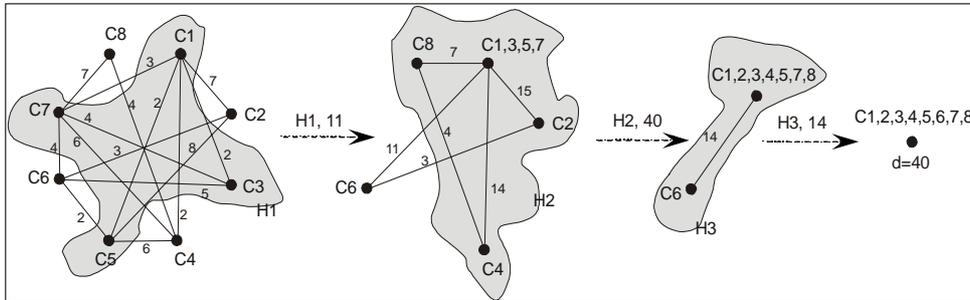


Рис. 1. Пример коллапса подграфов

Пусть  $M(q)$  сложность решения системы размерности  $q$ . Тогда сложность последовательной композиции можно оценить как  $Y(q) = \sum_{i=1,k} M(d_i)$ .

Следует отметить, что  $\sum_{i=1,k} d_i = p$ , где  $p$  — сумма весов ребер исходного графа (общее количество контактных переменных)  $p = \sum_e w(e)$ .

Таким образом, как для полиномиальной, так и для экспоненциальной сложности решения систем последовательная композиция не хуже одновременной.

Так как исходный граф декомпозиции системы на кланы сжимается в единственную вершину, по аналогии с процессами, исследуемыми в астро-

физике, процесс последовательной композиции назван коллапсом графа. С точки зрения сложности решения систем нас интересует коллапс, обеспечивающий минимальную вычислительную сложность решения исходной

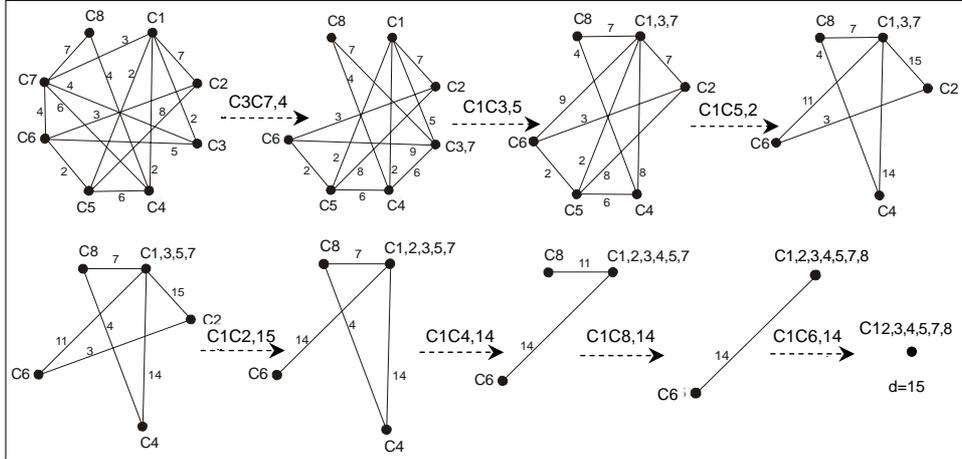


Рис. 2. Пример реберного коллапса

системы. Такой коллапс назовем оптимальным. В зависимости от того, рассматриваются ли методы полиномиальной либо экспоненциальной сложности, имеются два основных варианта постановки соответствующей оптимизационной задачи:

$$\text{I. } \begin{cases} \sum d_i^u \rightarrow \min, \\ \sum_i d_i = q, \\ d_i > 0. \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} \sum u^{d_i} \rightarrow \min, \\ \sum_i d_i = q, \\ d_i > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Как правило, для полиномиальных методов в задаче I рассматриваются  $u \geq 3$ , а для экспоненциальных методов в задаче II —  $u \geq 2$ . В соответствии с теорией сложности в оценках экспоненциальных функций слагаемые низших степеней могут быть опущены. Таким образом, для экспоненциальных методов становится актуальным параметр  $d = \max_i(d_i)$ , названный шириной коллапса и равный максимальному из чисел  $d_i$ . Тогда сложность последовательной композиции можно оценить как  $u^d$ , а дополнительное ускорение вычислений по сравнению с одновременной композицией как  $u^{p-d}$ . Хотя для методов полиномиальной сложности аналогичные упрощения являются довольно грубыми, выражение  $k d^u$  можно рассматривать как оценку верхней границы сложности. В ряде случаев в качестве квазиоптимального коллапса целесообразно рассматривать коллапс, имеющий минимальную ширину. Действительно, при произвольном разбиении числа  $p$  на  $k$  частей как в задаче I, так и в задаче II, оптимальным является равномерное разбиение  $d_i = p/k$ . Таким образом, снижение максимума последовательности  $d_i$  способствует приближению к равномерному разбиению.

Сравнительные оценки сложности различных способов организации последовательного коллапса приведены в табл. 1. Композиция подграфов соответствует последовательности на рис. 1. Реберная композиция 1 соответствует последовательности на рис. 2. Реберная композиция 2 соответствует оптимальному коллапсу. Реберная композиция 3 соответствует наихудшему коллапсу. Графические изображения реберных композиций 2, 3 описаны в работе [5]. Следует отметить, что использование ширины коллапса позволяет получить простые и достаточно хорошие оценки сложности. Заметим, что ускорения вычислений для наилучшего коллапса по сравнению с одновременной композицией имеют порядок  $10^{15}$  для методов экспоненциальной сложности.

**Таблица 1.** Сравнительные оценки сложности композиционного решения систем

Композиция	Последовательность	$d$	Сложность решения систем			
			Полином		Экспонента	
			$d^4$	$\sum d_i^4$	$2^d$	$\sum 2^{d_i}$
Подграфы	H1,11–H2,40–H3,14	40	$2,56 \cdot 10^6$	$2,61 \cdot 10^6$	$1,1 \cdot 10^{12}$	$1,99 \cdot 10^{12}$
Реберная 1	C3C7,4–C1C3,5–C1C5,2–C1C2,15–C1C4,14–C1C8,11–C1C6,14	15	$5,06 \cdot 10^4$	$1,43 \cdot 10^5$	$3,28 \cdot 10^4$	$6,76 \cdot 10^4$
Реберная 2	C2C5,8–C1C2,9–C1C4,8–C1C7,9–C1C8,11–C1C6,9–C1C3,11	11	$1,46 \cdot 10^4$	$5,72 \cdot 10^4$	$2,05 \cdot 10^3$	$6,14 \cdot 10^3$
Реберная 3	C5C6,2–C1C3,2–C1C4,2–C1C8,4–C5C7,4–C1C2,7–C1C4,44	44	$3,75 \cdot 10^6$	$3,75 \cdot 10^6$	$1,76 \cdot 10^{13}$	$1,76 \cdot 10^{13}$
Одновременная	C1C2C3C4C5C6C7C8,65	65	$1,79 \cdot 10^7$	$1,79 \cdot 10^7$	$3,69 \cdot 10^{19}$	$3,69 \cdot 10^{19}$

При выборе способа реализации последовательной композиции следует рассмотреть два основных вопроса:

1. Может ли применение не минимальных кланов ускорить процесс решения.
2. Может ли композиция подграфов быть более эффективной, чем парная композиция.

Выбор не минимальных кланов предполагает решение единственной системы уравнений для составного клана без решения промежуточных систем для внутренних минимальных кланов. Композиция подграфов предполагает одновременную композицию всех вершин подграфа. Полученные в результате графы совпадают. Отличие состоит только в сложности решения системы для подграфа, которая в одном случае решается обычными методами (без применения композиции), а в другом — с помощью одновременной композиции.

Справедливы следующие оценки сложности: подграф без композиции  $q = \sum_{v \in H} w(v) - \sum_{e \in H} w(e)$ ; подграф с одновременной композицией  $q = \max_{v \in H} (\max w(v), \sum_{e \in H} w(e))$ .

**Лемма 1.** Для любого графа декомпозиции выполняется неравенство

$$\max(\max w(v), \sum w(e)) \leq \sum w(v) - \sum w(e). \quad (4)$$

**Доказательство.** Неравенство (4) можно представить в виде эквивалентной системы неравенств

$$\begin{cases} \max w(v) \leq \sum w(v) - \sum w(e), \\ \sum w(e) \leq \sum w(v) - \sum w(e). \end{cases}$$

Докажем выполнение каждого из неравенств системы. В соответствии с определением графа декомпозиции

$$w(v) \geq \sum_u w(v, u).$$

Просуммируем неравенство по всем вершинам графа

$$\sum_v w(v) \geq \sum_v \sum_u w(v, u).$$

Учитывая известное из теории графов [7] равенство

$$\sum_v \sum_u w(v, u) = 2 \sum_e w(e), \quad (5)$$

получаем

$$\sum_v w(v) \geq 2 \sum_e w(e).$$

И, далее

$$\sum w(e) \leq \sum w(v) - \sum w(e).$$

Справедливость второго из неравенств доказана. Докажем справедливость первого. Покажем, что неравенство

$$w(v') \leq \sum w(v) - \sum w(e)$$

выполняется для произвольной вершины  $v' \in V$  графа  $G$ . Имеем

$$0 \leq \sum_{v \neq v'} w(v) - \sum w(e).$$

Для доказательства неравенства

$$\sum w(e) \leq \sum_{v \neq v'} w(v)$$

будем учитывать тот факт, что вес ребра уже содержится в весе каждой инцидентной ему вершины таким образом, что

$$w(v) \geq \sum_u w(v, u).$$

Тогда

$$\sum_{v \neq v'} w(v) \geq \sum_{v \neq v'} \sum_u w(v, u).$$

Учитывая соотношение (5), получаем

$$\sum_{v \neq v'} \sum_u w(v, u) = 2 \sum_{v \neq v'} w(e) + \sum_{v'} w(e) = \sum w(e) + \sum_{v \neq v'} w(e).$$

Заметим, что индекс суммирования ребер задан множеством инцидентных вершин. Принимая во внимание неравенство

$$\sum_{v \neq v'} w(e) \geq 0,$$

получаем

$$\sum w(e) \leq \sum_{v \neq u} w(v),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Следствие.** Использование минимальных кланов в процессе последовательной композиции является более эффективным.

Таким образом, решение систем уравнений для всех минимальных кланов является обязательным этапом. Поэтому в дальнейшем изложении веса вершин графа декомпозиции могут быть опущены. В качестве графа декомпозиции на кланы выберем взвешенный граф  $G = (V, E, W)$ , где отображение  $W : E \rightarrow N$  задает кратность его ребер.

Проанализируем последовательный коллапс графа путем слияния (коллапса) подграфов, порожденных указанным множеством вершин. Не ограничивая общности, рассмотрим связные подграфы. В качестве основного параметра коллапса примем его ширину  $d$ . Задача состоит в построении такой последовательности стягивания подграфов, которая обеспечит минимальную ширину коллапса. Возможны два упомянутых ранее способа организации этого процесса: одновременный и последовательный. Последовательный коллапс может быть организован как парный (реберный) либо как коллапс произвольных подграфов, порожденных указанным множеством вершин.

**Лемма 2.** Парный (реберный) коллапс не хуже произвольного коллапса подграфов.

**Доказательство.** Во-первых, результат применения реберного коллапса подграфа совпадает с результатом применения одновременного коллапса по отношению к окружению подграфа. Т.е. в обоих случаях будет получен один и тот же граф.

Отличие состоит в ширине коллапса выбранного подграфа. Так как ширина одновременного коллапса известна и равна сумме весов ребер, необходимо оценить ширину реберного коллапса подграфа. Покажем, что в результате реберного коллапса не может появиться ребро веса, превышающего сумму весов всех ребер.

Выберем произвольное ребро  $e' \in E$ . При слиянии вершин веса ребер, инцидентных общей вершине, суммируются и, следовательно, сумма весов ребер полученного графа равна

$$\sum_e w(e) - w(e').$$

Эта сумма и является верхней границей оценки сложности реберного коллапса полученного графа. Продолжение коллапса не приведет к появлению

нию ребра большего веса, а ширина реберного коллапса равна максимальному весу ребра. Поэтому

$$\sum_e w(e) = w(e') + \sum_{e \neq e'} w(e).$$

Тогда

$$\sum_e w(e) \geq \max \left( w(e), \sum_{e \neq e'} w(e) \right). \square$$

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать реберный коллапс как более эффективный способ композиции при экспоненциальной сложности решения системы. Следует отметить, что приведенные оценки сложности являются асимптотическими. В частных случаях при небольшой размерности кланов, когда конкретные значения оценок экспоненциальной сложности сопоставимы с полиномиальными сомножителями, коллапс подграфов может иметь меньшую вычислительную сложность.

### ОЦЕНКИ ШИРИНЫ РЕБЕРНОГО КОЛЛАПСА

Пусть задан взвешенный граф  $G = (V, E, W)$ . Не ограничивая общности, считаем, что  $G$  связный, иначе выполняем коллапс по компонентам. Определим операцию реберного коллапса  $G \setminus e$  для некоторого  $e \in E$  следующим образом.

Пусть  $e = v_1 v_2$ . Тогда  $G \setminus e = G' = (V', E', W')$ , где  $V' = (V \setminus v_1 v_2) \cup v$  ( $v$  — новая вершина, представляющая собой слияние (коллапс) вершин  $v_1, v_2$ ), т.е.

$$E' = (E \setminus (v_1 v_2 \cup \{v_1 u \mid u \in V, v_1 u \in E\} \cup \{v_2 u \mid u \in V, v_2 u \in E\})) \cup \{vu \mid u \in V', v_1 u \in E \vee v_2 u \in E\},$$

$$W'(vu) = \begin{cases} W(v_1 u) + W(v_2 u), & v_1 u \in E \wedge v_2 u \in E, \\ W(v_1 u), & v_1 u \in E \wedge v_2 u \notin E, \\ W(v_2 u), & v_2 u \in E \wedge v_1 u \notin E. \end{cases}$$

Таким образом, при слиянии вершин ребра объединяются ребра, инцидентные обеим вершинам.

**Утверждение 1.** Операция реберного коллапса сохраняет связность графа.

**Утверждение 2.** Верно следующее равенство для суммы весов ребер:

$$S(G) = S(G') + w(e).$$

В соответствии с терминологией [7], граф, в котором  $|V| = k$ , а  $|E| = p$ , будем называть  $(k, p)$ -графом либо  $k$ -графом. Так как при выполнении операции реберного коллапса объединяется пара смежных вершин графа, то реберный коллапс всего графа состоит в последовательном выполнении

$(k - 1)$  операций реберного коллапса. Процесс последовательного реберного коллапса взвешенного  $k$ -графа — это последовательность  $(k - 1)$  операций реберного коллапса

$$G^0 = G \rightarrow G^1 = G^0 \setminus e_1 \rightarrow G^2 = G^1 \setminus e_2 \rightarrow \dots \rightarrow G^{k-1} = G^{k-2} \setminus e_k.$$

Заметим, что полученный в результате граф  $G^{k-1}$  состоит из единственной вершины. Это вполне соответствует названию процесса, сжимающего исходный граф в вершину. В качестве основного параметра коллапса будем рассматривать его ширину, равную максимальному весу стягиваемого ребра. *Ширина коллапса* — это максимальный вес ребра в процессе коллапса

$$d(\sigma) = \max_{e \in \sigma} w(e).$$

Выбор различных последовательностей ребер  $e_1 e_2 \dots e_k$  в общем случае приводит к различным значениям ширины коллапса. *Оптимальным процессом коллапса* будем называть последовательность ребер, обеспечивающую минимизацию общей сложности решения систем (4). *Квазиоптимальным процессом коллапса* будем называть коллапс, имеющий наименьшую ширину. Отметим, что минимальная ширина коллапса является свойством заданного графа. Введем рекуррентное определение минимальной ширины коллапса. Обозначим  $d(G)$  ширину реберного коллапса графа  $G$ . Тогда

$$\begin{cases} d(G) = \min_e d(G, e), \\ d(G, e) = \max(w(e), d(G \setminus e)), \end{cases}$$

где функция двух аргументов  $d(G, e)$  определяет минимальную ширину реберного коллапса графа  $G$  при условии, что первоначально будет выполнен коллапс ребра  $e$ .

Реберный коллапс представляет собой комбинаторную задачу, для решения которой применим универсальный метод полного перебора всех возможных последовательностей ребер. Пример дерева полного перебора реберного коллапса графа показан на рис. 3. Заметим, что минимальная ширина коллапса составляет 14, максимальная 23, а сумма весов ребер (ширина одновременного коллапса) равна 35. Точное число различных последовательностей  $K(G) = \prod_{i=0, k-2} |E^i|$ . На каждом шаге стягивается пара смежных

вершин, а наибольшее количество смежных вершин имеет место в полном графе. Количество ребер полного  $k$ -графа равно  $\frac{k(k-1)}{2}$ . Тогда  $\hat{K}(G) =$

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=2, k} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{k!(k-1)!}{2^{k-1}} = \frac{(k!)^2}{k \cdot 2^{k-1}}. \text{ Например, } \hat{K}(10) = 2,6 \cdot 10^9, \text{ а } \hat{K}(20) = \\ &= 5,7 \cdot 10^{29}, \hat{K}(100) = 1,4 \cdot 10^{284}. \end{aligned}$$

Таким образом, необходим поиск эффективных методов решения задачи оптимального (квазиоптимального) реберного коллапса.

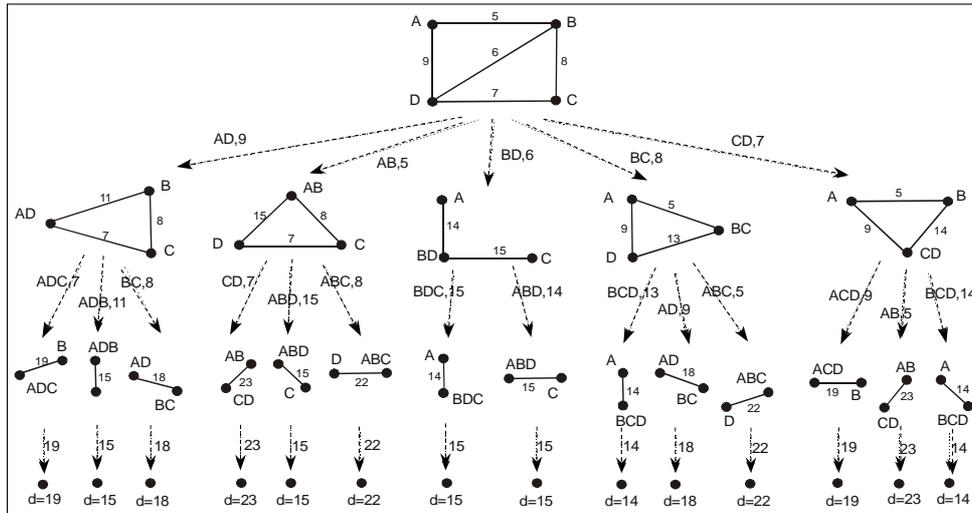


Рис. 3. Пример дерева полного перебора реберного коллапса

**Теорема 1.** Ширина коллапса ациклического графа равна максимальному весу ребра.

**Доказательство.** Операция реберного коллапса ациклического графа приводит к получению нового ациклического графа, содержащего количество ребер меньше на единицу, чем исходный граф. Кроме того, эта операция не изменяет веса оставшихся ребер. Таким образом, ширина коллапса не зависит от порядка выбора ребер и равна максимальному весу ребра. □

Любая простая цепь может быть заменена ребром минимального веса при ширине ее коллапса, равного максимальному весу ребра. Это соответствует выбору на шаге коллапса ребра максимального веса. Не ограничивая общности, можно рассматривать компактные графы, не содержащие простых цепей и висячих вершин.

**Утверждение 3.** Если граф имеет точки сочленения, то ширина коллапса равна максимальной ширине среди его двусвязных компонентов (блоков).

**Теорема 2.** Ширина коллапса простого цикла равна  $\max_{e, e_1, e_2} (w(e), \min(w(e_1) + w(e_2)))$ .

**Доказательство.** Простой цикл преобразуется в цикл меньшей размерности до тех пор, пока не будет получен треугольник. При коллапсе треугольника будет получен граф, состоящий из одного ребра, вес которого равен сумме весов ребер, отличных от стягиваемого. Таким образом, ширина коллапса определяется, с одной стороны, максимальным весом ребра перед стягиванием треугольника, а с другой — весом последнего ребра. Следовательно, нижней границей ширины является как вес максимального ребра, так и суммарный вес пары ребер. □

**Теорема 3.** Оптимальный коллапс простого цикла соответствует выбору на шаге коллапса ребра максимального веса.

**Доказательство.** Коллапс простого цикла продолжается без изменения весов ребер до тех пор, пока не будет получен треугольник. Выбор максимального ребра гарантирует, что при получении треугольника останется три

ребра минимального веса. Кроме того, при коллапсе треугольника выбор ребра максимального веса обеспечит минимальный суммарный вес оставшихся ребер. Действительно, имеет место соотношение  $\min_{e_1, e_2} (w(e_1) +$

$$+ w(e_2)) = \min_{e_1} (e_1) + \min_{e_2 \neq e_1} (e_2). \quad \square$$

Графы, образованные в результате стягивания ребер, называют минорами исходного графа [7]. Рассмотрим решетку миноров, полученных в результате коллапса, которую назовем *частичной решеткой коллапса*. Она состоит из  $(k - 1)$  уровней. На  $i$ -м уровне точками представлены ребра текущего графа  $G^i$ . Линии соответствуют отношению частичного порядка  $\ll$  ребер текущего и предыдущего уровней таким образом, что

$$e_1^i \ll e_3^{i+1} \Leftrightarrow e_3^{i+1} = e_1^i \vee e_3^{i+1} = e_1^i + e_2^i.$$

Частичная решетка является наглядным представлением процесса коллапса. В соответствии с определением операции коллапса на каждом шаге стягивается одно ребро. Если концы этого ребра не имеют общих смежных вершин (не формируют треугольников вместе с другими ребрами), то на следующем уровне присутствуют все ребра за исключением стягиваемого. Если ребро образует один либо несколько треугольников, то каждая пара ребер треугольника заменяется одним ребром. Рекуррентное соотношение для числа ребер  $p_i = p_{i-1} - t$ , где  $t$  — количество треугольников, определяемых стягиваемым ребром. Решетка иллюстрирует взаимосвязи ребер. Таким образом, каждое ребро на шаге коллапса представляет собой либо ребро исходного графа, либо сумму некоторых ребер. Решетки двух различных последовательностей коллапса (рис. 3), изображены на рис. 4. Стягиваемые ребра помечены диагональным крестом.

**Утверждение 4.** Каждое ребро на шаге коллапса является суммой некоторых ребер исходного графа.

Таким образом, ширина коллапса равна весу ребра, полученного на некотором шаге. Такое ребро будем называть *критическим ребром коллапса*. Критическое ребро либо просто стягивается в процессе коллапса, либо остается его последним ребром.

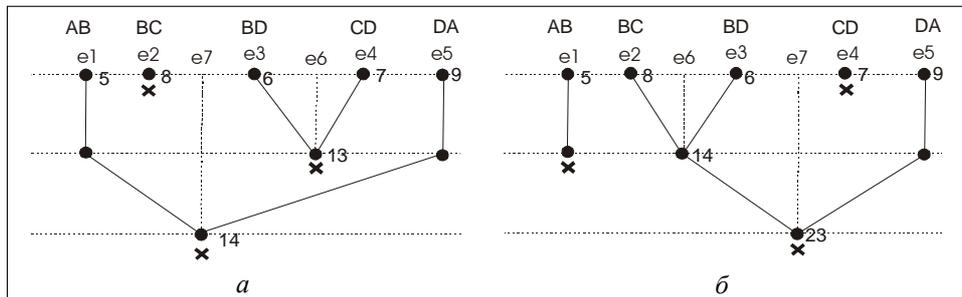


Рис. 4. Примеры частичных решеток коллапса: *a* — BC, BCD, ABCD; *б* — CD, AB, ABCC

Верхние и нижние оценки ширины коллапса могут быть использованы при поиске оптимального коллапса с помощью метода ветвей и границ [8]. В соответствии с определением ширины реберного коллапса

$$\max_e w(e) \leq d(G) \leq \sum_e w(e).$$

Построим более точные верхние оценки ширины коллапса. В лемме 2 была представлена оценка

$$d(G) \leq \max \left( w(e), \sum_{e \neq e'} w(e) \right).$$

Действительно, по крайней мере, одно ребро будет аннулировано и ширина коллапса оставшегося графа не превысит сумму его ребер. Продолжая описанный процесс не более  $(k-1)$  раз, можно прийти к следующей оценке.

Пусть  $w^{\max} = \max_{e \in G} w(e)$  — максимальный вес ребра исходного графа, а  $w^{\min} = \min_{e \in G} w(e)$  — минимальный. На первом шаге не может появиться ребро большего веса, чем  $2w^{\max}$ , на третьем  $2w^{\max} + 2w^{\max} = 4w^{\max}$  и так далее. Получим рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} w_0^{\max} = w^{\max}, \\ w_i^{\max} = 2w_{i-1}^{\max}, \quad i = \overline{1, k-2}. \end{cases}$$

Тогда

$$d(G) \leq w_{k-2}^{\max} = 2^{k-2} w^{\max}.$$

С другой стороны, после первого шага сумма весов ребер оставшейся части графа не превысит  $\sum w(e) - w^{\min}$ , после второго  $\sum w(e) - 2w^{\min}$ . Продолжая оценки до завершения коллапса, получаем

$$d(G) \leq \max \left( 2^{k-2} w^{\max}, \sum w(e) - (k-2)w^{\min} \right).$$

Хотя оценка является довольно грубой, она дополняет ранее полученные. Для более точных оценок рассмотрим процесс добавления ребер, соединяющих пару несмежных вершин. Изучим влияние этой операции на ширину коллапса.

**Теорема 4.** Добавление ребра, соединяющего пару несмежных вершин графа, увеличивает ширину коллапса не более чем на вес добавленного ребра.

**Доказательство.** Пусть ширина коллапса графа  $G$  равна  $d(G)$  и достигается с помощью последовательности  $\sigma$ . Рассмотрим граф  $G+e$  и выполним его коллапс с помощью той же последовательности  $\sigma$ . Пусть  $e = v_1v_2$ .

При выполнении операции коллапса пометим символом  $v_1$  все вершины, стягиваемые с вершиной  $v_1$ , и символом  $v_2$  все вершины, стягиваемые с  $v_2$ . Во-первых, вершины  $v_1, v_2$  несмежные в исходном графе. Во-вторых, граф связный. Следовательно, на некотором шаге коллапса получаем вершину  $u$ , смежную как с  $v_1$ , так и с  $v_2$ . Стягивание этой вершины в графе  $G$

с одной из вершин  $v_1, v_2$  приводит к образованию ребра  $e' = v_1 v_2$ . В дальнейшем это ребро может участвовать в образовании критического ребра либо будет просто аннулировано.

Рассмотрим выполнение рассмотренной операции в графе  $G + e$ . Перед получением треугольника, образованного ребром  $e$  и некоторой вершиной  $u$ , процесс не отличается от ранее рассмотренного. При стягивании вершины  $u$  с одной из вершин  $v_1, v_2$  вместо ребра веса  $w(e')$  будет получено ребро веса  $w(e') + w(e)$ . Далее это ребро либо войдет в критическое ребро коллапса, либо будет просто аннулировано. В первом случае ширина коллапса увеличится на величину  $w(e)$ , во втором случае не изменится.  $\square$

Для получения более точных верхних оценок рассмотрим процесс добавления недостающих ребер к некоторому остову  $R$  графа  $G$ . Поскольку ширина коллапса ациклического графа в соответствии с теоремой 1 равна максимальному весу ребра, то может быть дана следующая оценка ширины коллапса.

**Теорема 5.** Ширина коллапса не превышает сумму веса максимального ребра остова и весов оставшихся ребер

$$d(G) \leq \max_{e \in R} w(e) + \sum_{e \notin R} w(e), \text{ где } R \text{ — остов графа } G.$$

Для улучшения оценки можно выбирать остов, содержащий ребра максимального веса, таким образом, чтобы минимизировать сумму, и в качестве хорошего приближения рассматривать стандартную задачу выбора остова максимального веса [7]. Заметим, что количество оставшихся ребер равно цикломатическому числу графа  $\nu(G) = p - k + 1$ . Тогда оценка представляется как

$$d(G) \leq (\nu(G) + 1) w^{\max} = (p - k + 2) w^{\max}.$$

## ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО КОЛЛАПСА

Оптимальный коллапс для полиномиальной и экспоненциальной оценок сложности, а также квазиоптимальный коллапс минимальной ширины — это задачи, для решения которых в предыдущем разделе предложено применить универсальный метод полного перебора, имеющий экспоненциальную сложность по отношению к размеру графа. Однако являются ли указанные задачи NP-полными? Построим и статистически обоснуем эвристические алгоритмы решения задач оптимального коллапса, основанные на одношаговых стратегиях выбора стягиваемого ребра. Применение таких алгоритмов целесообразно также потому, что отсутствуют точные оценки количества базисных решений подсистем композиции.

В соответствии с результатами, полученными для простой цепи и простого цикла, можно предложить выбор ребра максимального веса на шаге коллапса: первое либо случайное ребро максимального веса в случае, если имеется несколько таких ребер. Алгоритм состоит в простой реализации операции коллапса в соответствии с определением, дополненной правилом

выбора ребра максимального веса. Сложность такого алгоритма оценивается как  $kp^2$ . Действительно, необходимо выполнить  $k-1$  шагов и на каждом шаге следует обработать не более  $p$  ребер, для которых при коллапсе треугольников обрабатывается не более  $p$  смежных ребер. Следует отметить, что описанный «жадный» алгоритм не всегда гарантирует оптимальный коллапс, хотя и обеспечивает достаточно хорошее приближение. Так для графа, изображенного на рис. 3, «жадный» алгоритм дает ширину 15, в то время как оптимальная ширина равна 14. Примеры коллапса графа (см. рис. 1) с использованием выбора максимального, минимального и случайного ребра приведены в работе [5].

Для сравнения различных правил выбора ребра на шаге коллапса генерировались случайные графы и выполнялся их реберный коллапс. Сравнялся выбор максимального, минимального и случайного ребра на шаге. Полученные результаты приведены в табл. 2.

Для построения табл. 2 использованы случайные равномерно распределенные веса ребер в диапазоне от 4 до 20. Использование других диапазонов приводит к другим абсолютным величинам, но сохраняет процентные соотношения. Оценивалась ширина коллапса, а также сложность последовательной композиции для полиномиальных и экспоненциальных методов решения систем.

Можно сделать вывод, что худшим является выбор ребра минимального веса. Он приближается к случайному выбору ребра с ростом количества вершин. Лучшим выбором на шаге является выбор ребра максимального веса, который обеспечивает существенно меньшую ширину коллапса.

**Таблица 2.** Сравнение коллапсов случайных графов

Количество вершин графа	Плотность графа, %	Ширина одновременного коллапса	Ширина последовательного коллапса					
			Максимальное ребро		Случайное ребро		Минимальное ребро	
			Ширина	%	Ширина	%	Ширина	%
20	20	442	35	7,9	191	44,6	231	52,3
	40	869	66	7,6	367	42,2	533	61,3
	60	1372	102	7,4	651	47,4	829	60,4
	80	1825	160	8,8	876	48,0	990	54,2
40	20	1836	73	4,0	632	34,4	1002	54,6
	40	3699	139	3,8	1664	45,0	2133	57,7
	60	5539	214	3,9	2665	48,1	2948	53,2
	80	7354	314	4,3	3608	49,0	3908	53,1
100	20	11602	160	1,4	4827	41,6	5829	50,2
	40	22973	316	1,4	7617	33,2	12341	53,7
	60	34334	501	1,5	13282	38,7	17559	51,1
	80	45582	754	1,7	17144	37,6	23008	50,5
200	20	46073	288	0,63	19673	42,7	23781	51,6
	40	91715	612	0,67	42260	46,0	91715	50,5
	60	137684	997	0,72	67609	49,1	68957	50,0
	80	183652	1486	0,81	91015	49,6	91669	49,9

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В настоящей работе предложен новый метод решения линейных систем с помощью последовательной композиции их кланов. Применение метода целесообразно в случае, если количество контактных переменных превышает максимальный размер клана.

По сравнению с ранее изученной одновременной композицией кланов последовательная композиция позволяет получить дополнительные ускорения вычислений путем решения последовательности систем существенно меньшей размерности. Задача формализована в терминах теории графов и названа оптимальным коллапсом взвешенного графа. Получены оценки верхней и нижней границ ширины коллапса. Построен и статистически обоснован эвристический алгоритм оптимального коллапса полиномиальной сложности.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. — М.: Наука, 1980. — 177 с.
2. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. — М.: Мир, 1991. — 726 с.
3. Кривый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместимости систем линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1999, № 4. — С. 12–36.
4. Зайцев Д.А. Решение линейных систем с помощью декомпозиции // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 2. — С. 131–143.
5. Zaitsev D.A. Functional Petri Nets, Universite Paris-Dauphine, Cahier du Lamsade 224, Avril 2005. — 62 p. ([www.lamsade.dauphine.fr/cahiers.html](http://www.lamsade.dauphine.fr/cahiers.html)).
6. Зайцев Д.А. К вопросу о вычислительной сложности метода Тудика // Искусственный интеллект. — 2004. — № 1. — С. 29–37.
7. Тамм У. Теория графов. — М.: Мир, 1988. — 424 с.
8. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. — Киев, Наук. думка, 1988. — 472 с.

*Поступила 1.09.2005*