УДК 518.9

УСЛОВИЕ ПОЛНОГО ВЫМЕТАНИЯ И ЕГО ОБОБЩЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

В.В. ОСТАПЕНКО, И.Л. ЯКУНИНА, И.Н. ТЕРЕЩЕНКО, С.Н. АМИРГАЛИЕВА

Рассмотрены дифференциальные игры с фиксированным временем окончания. Описаны множества начальных позиций, благоприятных для догоняющего и убегающего игроков. В случае выполнения определенных условий выметания справедливы теоремы об альтернативе. Игры рассматриваются для разделенных управлений игроков отдельно с позиций догоняющего и убегающего. Описаны стратегии игроков для различных классов игр с преимуществом того или иного игрока.

ВВЕДЕНИЕ

Современная теория дифференциальных игр в основном развивается как теория управляемых динамических систем с геометрическими ограничениями на управления игроков [1–5]. Описаны структуры дифференциальных игр. Исследованы различные способы задания стратегий игроков, при которых они не знают управление противника в будущем. Разработаны общие подходы и конкретные методы решения различных классов дифференциальных игр.

В [6, 7] разработан метод, позволяющий сводить дифференциальную игру к обычной задаче управления. При этом важную роль играет условие полного выметания, которое накладывается на области управления игроков. В работе [8] это условие заменялось однотипностью интегральных ограничений для обоих игроков.

В данной статье игры рассматриваются отдельно с позиций догоняющего и убегающего игроков. Это позволило расширить класс игр, решаемых в работах [6, 7].

Пусть M, N — выпуклые подмножества E^n. Рассмотрим некоторые свойства геометрической разности

$$M \overset{*}{-} N = \{x \in E^n : x + N \subset M\} = \bigcap_{y \in N} \{M - y\} . \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что

$$(M + N) \overset{*}{-} N = M .$$

Однако

$$(M \overset{*}{-} N) + N \subset M\,, \tag{2}$$

и равенство

$$(M \overset{*}{-} N) + N = M$$

достигается не всегда. К примеру, если $M \overset{*}{-} N = \varnothing$, то сумма в (2) не определена либо ее следует определить как пустое множество. Менее тривиальный и наглядный пример заключается в следующем.

Пусть

$$M = \{x = (x^1, x^2):\ -2 \le x^i \le 2\} \text{ — квадрат,}$$

$$N_1 = \{x = (x^1, x^2): \|x\| \le 1\} \text{ — единичный круг.}$$

Нетрудно видеть, что $M \overset{*}{-} N_1 = \{x = (x^1, x^2): -1 \le x^i \le 1\}$ также квадрат. Однако множество $(M \overset{*}{-} N_1) + N_1$ уже не является квадратом, так как оно не содержит точек $(\pm 2, \pm 2)$, т.е. включение (2) является строгим. Если же вместо круга N_1 взять $N_2 = \{x = (x^1, x^2): \| x \| \le 2\}$, то $M \overset{*}{-} N_2 = \{0\}$ состоит из одной точки — центра координат и, очевидно, $(M \overset{*}{-} N_2) + N_2 = N_2 \ne M$.

В описанных примерах множества N_1 и N_2 не полностью «выметают» множество M. Это и приводит к строгому включению (2). Определим понятие полного выметания.

Определение 1. Множество N полностью выметает множество M (или M полностью выметается N), если

$$(M \overset{*}{-} N) + N = M\,. \tag{3}$$

Если обозначить $M \overset{*}{-} N = L$, то равенство (3) принимает вид

$$M = N + L\,,$$

т.е. множество M в определенном смысле (с точностью до сдвига) шире множества N, причем насколько M шире N точно описывается множеством L. Из (1) следует, что L является пересечением множеств $M - y$. Поэтому, если M выпукло, то и L выпукло, если M замкнуто, то и L замкнуто, если M компактно, то и L компактно.

Понятие полного выметания позволяет полностью решать игры с разделенным управлением игроков, т.е. с динамикой вида

$$\dot{z} = A(z)u + B(z)v\,,$$

где $u \in U$, $v \in V$; U, V — выпуклые компакты в евклидовых пространствах; $A(z)$, $B(z)$ — непрерывные операторы по z. Условие, когда множество U «шире» множества V описано в работе [6]. Здесь исследуются различные случаи взаимосвязи множеств U и V, и для простоты рассматриваются линейные игры.

Рассмотрим игру с фиксированным временем окончания с динамикой

$$\dot{z} = Az + \varphi B(u,v),$$

где $z \in E^n$; $u \in U$; $v \in V$; E^n — n-мерное евклидово пространство; U и V — компакты в евклидовых пространствах; $L: \dim L \le n$; $\varphi: L \to E^n$ — линейный оператор вложения; $\pi: E^n \to L$ — линейное отображение (например, π может быть оператором ортогонального проектирования, если L — линейное подпространство в E^n); $A: E^n \to E^n$ — линейный оператор; $B: U \times V \to L$ — непрерывное отображение.

Параметрами u и v распоряжаются соответственно игроки P (догоняющий) и E (убегающий). Под допустимыми управлениями игроков P и E будем понимать измеримые функции $u(t)$ и $v(t)$ со значениями соответственно в U и V. Игра ведется на интервале $[0;\theta]$, где θ — фиксированный момент времени. Множества всех допустимых управлений игроков P и E, определенных на отрезке $[0;\theta]$, обозначим $U[0;\theta]$ и $V[0;\theta]$. Положим $z(0) = z_0$ — начальная позиция. Зададим терминальное множество $M \subset E^n$, полагая его замкнутым. Цель игрока P — вывести траекторию уравнения на M, цель игрока E — противоположная.

Решим это уравнение.

$$\pi z(\theta) = \pi e^{A\theta} z_0 + \int_0^\theta \pi e^{A(\theta - t)} \varphi B(u(t), v(t))\, dt.$$

Далее обозначим $x(\theta) = \pi z(\theta)$, $x_0 = \pi e^{A\theta} z_0$, $C(t) = \pi e^{A(\theta-t)} \varphi$ и получим

$$x(\theta) = x_0 + \int_0^\theta C(t) B(u(t), v(t))\, dt.$$

Предположим, что оператор $C = \int_0^\theta C(t)\, dt$ имеет обратный. Обозначим $y(\theta) = C^{-1} x(\theta)$, $y_0 = C^{-1} x_0$, $D(t) = C^{-1} C(t)$. Тогда

$$y(\theta) = y_0 + \int_0^\theta D(t) B(u(t), v(t)) dt,$$

причем $\int_0^\theta D(t) dt = E$. Последняя формула описывает решение в момент $t = \theta$ следующего уравнения

$$\dot{y} = D(t) B(u,v).$$

Из замены $C(t)=\pi e^{A(\theta-t)}\varphi$ следует, что матрица $C(t)$ может быть квадратной. Если же в уравнении оператор φ отсутствует и рассматривается динамика

$$\dot{z}=Az+B(u,v),$$

то получаем

$$\pi z(\theta)=\pi e^{A\theta}z_0+\int_0^\theta \pi e^{A(\theta-t)}B(u(t),v(t))dt.$$

В этом случае $C(t)=\pi e^{A(\theta-t)}$, и тогда матрица $C(t)$ является прямоугольной.

Таким образом, игры с фиксированным временем окончания сводятся к игре с динамикой

$$\dot{z}=C(t)B(u,v),$$

где $\Re=\{C(t),\ t\in[0,\theta]\}$ — ограниченное измеримое семейство линейных операторов в пространстве E^n такое, что $\int_0^\theta C(t)\,dt=E$. Цель игрока P — добиться включения $z(\theta)\in M$, $M\subset E^n$.

В общем случае приходится ограничиваться уравнением

$$\dot{z}=C(t)B(u,v),$$

где $\{C(t)\}$ — семейство линейных операторов.

Предположим, что $C(t)$ непрерывна на $[0,\theta]$, и рассмотрим случай разделенных управлений

$$\dot{z}=C(t)[-u+v], \qquad (4)$$

где $u\in U$; $v\in V$; U, V — выпуклые компакты в E^n.

Обозначим $W_*(t)=C(t)U\overset{*}{-}C(t)V$. Отметим, что если для каждого $t\in[0,\theta]$ матрица $C(t)$ квадратная и имеет обратную, то $W_*(t)=C(t)W_*$, где $W_*=U\overset{*}{-}V$. Предположим также, что $W_*(t)\neq\varnothing$. Тогда

$$C(t)U\supset C(t)V+W_*(t). \qquad (5)$$

Так как $W_*(t)$ — выпуклый компакт, то $\int_0^\theta W_*(t)dt$ также выпуклый компакт.

Теорема 1. Пусть $z_0\in M+\int_0^\theta W_*(t)\,dt$. Тогда существует отображение $u_{z_0}(v,t)$ со значениями в U, определенное для $v\in V$ и $t\in[0,\theta]$ такое, что для любого $v(\cdot)\in V[0,\theta]$:

а) $u_{z_0}(v(t),t)$ — допустимое управление игрока P;

б) для траектории $z(t)$ с началом в z_0, соответствующей $u_{z_0}(v(t),t)$ и $v(t)$, выполняется $z(\theta) \in M$.

Доказательство. Поскольку $z_0 \in M + \int_0^\theta W_*(t)dt$, то существует такое $w(t) \in W_*(t)$, что $z_0 \in M + \int_0^\theta w(t)dt$. Из (5) следует: для любого $v \in V$ и $w(t) \in W_*(t)$ существует $u_{z_0}(v,t) \in U$ такое, что

$$C(t)u_{z_0}(v,t) - C(t)v = w(t).$$

Отсюда для $v(\cdot) \in V[0,\theta]$ получим

$$z(\theta) = z_0 + \int_0^\theta \left(-C(t)u_{z_0}(v(t),t) + C(t)v(t)\right)dt = z_0 - \int_0^\theta w(t)dt \in M.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 следует, что она справедлива в случае не разделенных управлений. При этом в качестве многозначного отображения $W_*(t)$ можно выбрать

$$W_*(t) = \bigcap_{v \in V} C(t)B(U,v).$$

Способ построения управления догоняющего игрока в теореме 1 основан на идеях первого метода Л.С. Понтрягина.

Пусть $W^*(t)$ — выпуклозначное, компактнозначное отображение такое, что

$$C(t)U \subset C(t)V + W^*(t). \tag{6}$$

Предположим также, что множества $W^*(t)$ ограничены в совокупности по $t \in [0,\theta]$.

Отметим: если $C(t)V$ полностью выметает $C(t)U$, то в качестве $W^*(t)$ можно взять $W_*(t)$. В этом случае $W(t) = W_*(t) = W^*(t) = C(t)U \overset{*}{-} C(t)V$ и $C(t)U = C(t)V + W(t)$.

Теорема 2. Пусть $z_0 \notin M + \int_0^\theta W^*(t)dt$. Тогда существуют такие $\bar{v} \in V$, отображение $v_{z_0} : U \times [0,\theta] \to V$ и число $h > 0$, что для любого $u(\cdot) \in U[0,\theta]$:

а) функция $\tilde{v}(t) = \begin{cases} \bar{v}, & t \in [0,h), \\ v_{z_0}(u(t-h),t), & t \in [h,\theta] \end{cases}$ является допустимым управлением игрока E;

б) для траектории $z(t)$ с началом в z_0, соответствующей $u(t)$ и $\tilde{v}(t)$, выполняется $z(\theta) \notin M$.

Доказательство. Из (6) следует, что для любого $u \in U$ существует такое $v_{z_0}(u,t)$, что

$$C(t)u - C(t)v_{z_0}(u,t) \in W^*(t) .$$

Применим управление $\widetilde{v}(t)$. Тогда

$$z(\theta) = z_0 + \int_0^\theta C(t)(-u(t) + \widetilde{v}(t))\,dt =$$

$$= z_0 - \int_0^\theta C(t)u(t)dt + \int_0^h C(t)\widetilde{v}(t)dt + \int_h^\theta C(t)\widetilde{v}(t)\,dt =$$

$$= z_0 + \int_h^\theta C(t)(-u(t-h) + \widetilde{v}(t))\,dt - \int_0^\theta C(t)u(t)\,dt + \int_h^\theta C(t)u(t-h)\,dt + \int_0^h C(t)\bar{v}\,dt =$$

$$= z_0 + \int_h^\theta C(t)(-u(t-h) + \widetilde{v}(t))dt - \int_0^\theta C(t)u(t)dt + \int_0^{\theta-h} C(t+h)u(t)dt + \int_0^h C(t)\bar{v}\,dt =$$

$$= z_0 + \int_h^\theta C(t)(-u(t-h) + \widetilde{v}(t))dt - \int_0^{\theta-h} C(t)u(t)dt - \int_{\theta-h}^{\theta} C(t)u(t)dt +$$

$$+ \int_0^{\theta-h} C(t+h)u(t)dt + \int_0^h C(t)\bar{v}\,dt = z_0 + \int_h^\theta C(t)(-u(t-h) + \widetilde{v}(t))dt -$$

$$- \int_0^{\theta-h} \big(C(t) - C(t+h)\big)u(t)dt - \int_{\theta-h}^{\theta} C(t)u(t)dt + \int_0^h C(t)\bar{v}\,dt = z_0 - \int_h^\theta w(t)\,dt + D(h),$$

где $w(t) \in W^*(t),\ \ t \in [h,\theta]$, а $D(h)$ — сумма последних трех интегралов. Доопределим $w(t) \in W^*(t)$ произвольным образом на интервале $[0,h)$. Если обозначить $D_0(h) = D(h) + \int_0^h w(t)\,dt$, то получим $z(\theta) = z_0 - \int_0^\theta w(t)dt + D_0(h)$.

Оценим $D_0(h)$. Из свойств компактности U и ограниченности $W^*(t)$ следует, что существует такая константа $\alpha \geq 0$, что $\|u\| \leq \alpha,\ \ \|w(t)\| \leq \alpha$ для всех $u \in U$ и $w(t) \in W^*(t)$. Обозначим $\max\limits_{0 \leq t \leq \theta} \|C(t)\| = \beta$, $\max\limits_{0 \leq t \leq \theta-h} \|C(t) - C(t+h)\| = \gamma(h)$. В силу непрерывности $C(t)$ функция $\gamma(h)$ также непрерывна и $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда

$$\|D_0(h)\| = \left\| - \int_0^{\theta-h} \big(C(t) - C(t+h)\big)u(t)dt - \int_{\theta-h}^{\theta} C(t)u(t)dt + \int_0^h C(t)\bar{v}\,dt + \int_0^h w(t)dt \right\| \leq$$

$$\leq \alpha\gamma(h)(\theta - h) + \beta\alpha h - \beta\bar{v}h + \alpha h,$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$ такое, что $\|D_0(h)\| < \varepsilon$.

Из условия теоремы следует, что $\left(z_0 - \int_0^\theta W^*(t)dt\right) \bigcap M = \varnothing$. Из замкнутости M и компактности $z_0 - \int_0^\theta W^*(t)dt$ следует, что некоторая ε-окрестность $z_0 - \int_0^\theta W^*(t)dt$ также не пересекается с M.

Из доказанного выше следует, что существует такое $h > 0$, что $z(\theta)$ принадлежит ε-окрестности $z_0 - \int_0^\theta W^*(t)dt$ и, значит, $z(\theta) \notin M$.

Теорема доказана.

При построении оптимальной стратегии игрока P в теореме 1 используется та же информация, что и в стратегиях, которые строятся на основе вольтерровских отображений. С другой стороны, пользуясь информацией теоремы 2, игрок E может построить соответствующую ε-стратегию. Поэтому справедливо следующее.

Следствие 1. Пусть для любого $t \in [0, \theta]$ множество $C(t)V$ полностью выметает множество $C(t)U$ и $W(t) = C(t)U \overset{*}{-} C(t)V$. Тогда

$$\widetilde{P}_\theta M = M + \int_0^\theta W(t)dt,$$

где $\widetilde{P}_\theta$ определено в работе [4].

Выше рассмотрен случай, когда множество U «шире» V. Теперь рассмотрим противоположный случай. Обозначим

$$\overline{W}_*(t) = C(t)V \overset{*}{-} C(t)U$$

и предположим, что $\overline{W}_*(t) \neq \varnothing$. Тогда

$$C(t)V \supset C(t)U + \overline{W}_*(t).$$

Теорема 3. Пусть $z_0 \notin M \overset{*}{-} \int_0^\theta \overline{W}_*(t)dt$, тогда существуют такие $\bar{v} \in V$, отображение $v_{z_0} : U \times [0,\theta] \to V$ и число $h > 0$, что для любого $u(\cdot) \in U[0,\theta]$:

а) $\widetilde{v}(t) = \begin{cases} \bar{v} \in V, & t \in [0, h), \\ v_{z_0}(u(t-h), t), & t \in [h, \theta] \end{cases}$ является допустимым управлением игрока E;

б) для траектории $z(t)$ с началом в z_0, соответствующей $u(t)$ и $\widetilde{v}(t)$, выполняется $z(\theta) \notin M$.

Пусть теперь $\overline{W}^*(t)$ — выпуклозначное, компактнозначное отображение такое, что

$$C(t)V \subset C(t)U + \overline{W}^*(t).$$

Считаем, что множества $\overline{W}^*(t)$ ограничены в совокупности по $[0,\theta]$.

Отметим: если $C(t)U$ полностью выметает $C(t)V$, то в качестве $\overline{W}^*(t)$ можно взять $\overline{W}_*(t)$ и для $\overline{W}(t)=\overline{W}_*(t)=\overline{W}^*(t)=C(t)V \overset{*}{-} C(t)U$ выполняется $C(t)V=C(t)U+\overline{W}^*(t)$.

Теорема 4. Пусть $z_0 \in M \overset{*}{-} \int\limits_0^\theta \overline{W}^*(t)dt$, тогда существует отображение $u_{z_0}: V\times[0,\theta]\to U$ такое, что для любого $v(\cdot)\in V[0,\theta]$:

а) функция $u_{z_0}(v(t),t)$ является допустимым управлением игрока P;

б) для траектории $z(t)$ с началом в z_0, соответствующей $u_{z_0}(v(t),t)$ и $v(t)$, выполняется $z(\theta)\in M$.

Доказательства теорем 3 и 4 аналогичны доказательствам теорем 1 и 2. При этом следует учесть, что $M \overset{*}{-} \int\limits_0^\theta \overline{W}(t)dt=\{z_0 : z_0+\int\limits_0^\theta \overline{W}(t)dt \subset M\}$. Это означает: для соответствующей начальной позиции z_0 игрок P может привести весь пучок траекторий $z_0+\int\limits_0^\theta \overline{W}(t)dt$ во множество M, а игрок E некоторую траекторию может вывести за M.

Следствие 2. Пусть множество $C(t)U$ полностью выметает множество $C(t)V$ и $\overline{W}(t)=C(t)V \overset{*}{-} C(t)U$. Тогда

$$\widetilde{P}_\theta M = M \overset{*}{-} \int\limits_0^\theta \overline{W}(t)dt .$$

Замечание 2. В теореме 4 не обязательно условие разделимости управлений. В общем случае $\overline{W}^*(t)$ можно выбрать из условия: для любого $v\in V$ существует такое $u\in U$, что $C(t)B(u,v)\in \overline{W}^*(t)$.

Замечание 3. Условия непустоты множеств W_* или $\overline{W}_*$ приводят динамическую систему, управляемую двумя параметрами u и v, к системе, управляемой одним параметром w. При условии полного выметания получены теоремы об альтернативе (следствия 1 и 2).

Пример. Множества W_* или $\overline{W}_*$ строятся однозначно. Множества W^* и $\overline{W}^*$ выбираются. Исходя из постановки задач, эти множества следует выбирать как можно меньшими. Пусть

$$U=\{u=(u^1,\ldots,u^n): -a_i \le u^i \le a_i,\ i=1,\ldots,n\},\ V=\{v: \|v\|\le 1\}.$$

Считаем, что $a_i>1$. Тогда

$$U \overset{*}{-} V=\{u=(u^1,\ldots,u^n): -(a_i-1)\le u^i \le a_i-1,\ i=1,\ldots,n\}.$$

Возьмем множество $W = \{w = (w^1, ..., w^n): -1 \le w^i \le 1,\ i = 1, ..., n\}$. Тогда $(U \overset{*}{-} V) + W = U$.

В более общем случае, если U есть параллелепипед вида

$$U = \{u = (u^1, ..., u^n): a_i \le u^i \le b_i,\ i = 1, ..., n\},$$

то для любого V множество $U \overset{*}{-} V$ также является параллелепипедом такого же вида. Нетрудно видеть, что $U \overset{*}{-} V$ полностью выметает U, если V также параллелепипед. Поэтому в качестве W можно взять множество

$$W = U \overset{*}{-} (U \overset{*}{-} V).$$

ВЫВОДЫ

1. Построены множества начальных позиций, благоприятных для догоняющего и убегающего игроков. Рассмотрены случаи неразделенности управлений игроков.

2. При выполнении определенных условий выметания для разделенных управлений игроков получены теоремы об альтернативе.

3. Описаны стратегии игроков для различных классов игр, которые отличаются от известных ранее результатов тем, что тот или иной игрок имеет преимущество.

4. Полученные результаты можно перенести на дифференциальные игры с терминальной функцией платы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Избранные науч. тр. Том II. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры. — М.: Наука, 1988. — 576 с.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
4. *Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. — Київ: Наук. думка, 1992. — 264 с.
5. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. — Київ: Наук. думка, 1992. — 382 с.
6. *Никольский М.С.* Об одном классе дифференциальных игр // Тр. семинара «Теория оптимальных решений». — Киев: ИК АН УССР, 1968. — № 2. — С. 3–13.
7. *Гусятников П.Б., Никольский М.С.* К проблеме оптимальности времени преследования // Тр. семинара «Теория оптимальных решений». — Киев: ИК АН УССР, 1969. — № 3. — С. 3–21.
8. *Остапенко В.В., Рижкова І.Л.* Про лінійну диференціальну гру з фіксованим часом закінчення та обмеженнями на ресурси // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 178–183.

Поступила 09.01.2005