УДК 519.1

О ХРОМАТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ НАТУРАЛЬНЫХ МОДУЛЬНЫХ ГРАФОВ

Г.А. ДОНЕЦ, Г.А ШУЛИНОК

Впервые поставлена задача определения хроматического числа для одного подкласса числовых графов — натуральных модульных графов. Доказано несколько утверждений, позволяющих находить хроматическое число указанных графов с числом образующих не больше трех. Для решения общей задачи предлагается метод разностей, описываются его возможности и пример реализации.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что задача определения хроматического числа произвольных графов в общем случае является NP-полной. Только для хроматического числа меньшего трех она является полиномиальной. Однако существуют некоторые довольно обширные подклассы графов, где эта задача может быть решена полиномиальными алгоритмами. Речь идет о числовых графах, исследование которых начато более 20 лет назад [2–8]. В этих работах в основном исследовалась структура числовых графов (связность, цикломатическое число, факторизация) и способы оптимального представления обыкновенных графов в виде числовых.

В данной работе решается задача определения хроматического числа одного из главных представителей числовых графов — натуральных модульных графов (NM-графов).

Определение 1. Натуральным модульным графом $G(X,U)$ называется n-вершинный граф $(n>1)$, представленный двумя множествами:

$X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}=N_n$ — множеством вершин и

$U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}\in N$ — множеством образующих.

Две вершины $x_i,x_j\in X$ смежны, если $\left|x_i-x_j\right|\in U$.

Каждая образующая u_i $(i=1,2,\dots,m)$ соответствует $n-u_i$ ребрам графа. Регулярный NM-граф степени 2 представляется множеством из двух образующих $U=\{u,n-u\}$ и состоит из k циклов длины $\dfrac{n}{k}$, где $k=\text{НОД}(u,n)$. Если n и u взаимно просты, то $k=1$, и такой граф представляет собой гамильтонов цикл. Регулярный граф степени $2k\left(k<\left\lceil\dfrac{n}{2}\right\rceil\right)$ описывается множеством образующих

$$U=\{u_1,u_2,\dots,u_k,n-u_k,\dots,n-u_2,n-u_1\},$$

где $1 \le u_i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Регулярный граф степени $2k+1\,(k \ge 1)$ существует только для четных n и отличается от предыдущего наличием дополнительной образующей $u = \frac{n}{2}$.

Определение 2. Хроматическим числом NM-графа называется наименьшее число $\lambda(G)$, которому соответствует разбиение множества вершин X на $\lambda(G)$ взаимно непересекающихся подмножеств $X(1), X(2), \ldots, X(\lambda)$ таких, что любые две вершины $x, y \in X(i)$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$ несмежны, т.е.

$$|x - y| \notin U .$$

Очевидно, что если НОД$(u_1, u_2, \ldots, u_m) = c > 1$, то граф состоит из c компонент связности, и вопрос о хроматическом числе исходного графа сводится к тому же вопросу для графа с $\left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil$ вершинами и множеством образующих $U' = \left\{ \frac{u_1}{c}, \frac{u_2}{c}, \ldots, \frac{u_m}{c} \right\}$.

ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ПРОСТЕЙШИХ NM-ГРАФОВ

Для NM-графов с числом образующих меньше трех определить хроматическое число несложно. Так как NM-граф с одной образующей $U = \{u\}$ представляет собой набор из u цепей, то справедливо следующее

Утверждение 1. Хроматическое число $\lambda(G)$ NM-графа с одной образующей равно 2.

Рассмотрим теперь NM-графы с двумя образующими, при этом число вершин NM-графа будем считать произвольным.

Теорема 1. Хроматическое число NM-графа $G(X,U)$ для $U = \{u_1, u_2\}$ равно

$$\lambda(G) = \begin{cases} 2, & \text{если} \quad n < u_1 + u_2 - c + 1, \\ 2 + \dfrac{u_1 + u_2}{c} (\mathrm{mod}\, 2), & \text{если} \quad n \ge u_1 + u_2 - c + 1, \end{cases} \qquad (1)$$

где $c =$ НОД(u_1, u_2).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $c = 1$. Тогда граф для $n < u_1 + u_2$ представляет собой несколько отдельных цепей, поэтому для него $\lambda(G) = 2$. Для $n \ge u_1 + u_2$ граф состоит из одного большого цикла длиной $u_1 + u_2$ и нескольких циклов длиной 4 [9]. В зависимости от четности числа $u_1 + u_2$ большой цикл можно раскрасить двумя или тремя цветами. Каждая вершина $j = u_1 + u_2 + i$ $(i > 0)$ соединяется с вершинами $u_1 + i$ и $u_2 + i$, которые смежны с вершиной i. Придадим вершине j тот же цвет, что и вершине i. Поскольку цвет этой вершины не противоречит цветам смежных с ней вершин, а вершина j смежна с теми же вершинами, то такая раскраска не увеличит хроматическое число графа и формула (1) верна для этого случая.

Пусть теперь $c > 1$. В этом случае граф состоит из c компонент связности. Компонента с номером i $(1 \le i \le c)$ состоит из тех вершин, номер которых $i(\bmod c)$. Рассмотрим компоненту $i = 1$. Она содержит не меньше вершин, чем остальные, и число их $n' = \left\lceil \frac{n}{c} \right\rceil$. Таким образом эта компонента изоморфна NM-графу с числом вершин n' и множеством образующих $U' = \left\{ \frac{u_1}{c}, \frac{u_2}{c} \right\} = \{u_1', u_2'\}$, где НОД$(u_1', u_2') = 1$. Тем самым вопрос о хроматическом числе исходного графа свелся к этому же вопросу для графа $G(X', U')$, где $X' = \{1, 2, \ldots, n'\}$. Этот граф не будет содержать большой цикл, если $n' < u_1' + u_2'$. Если $n = u_1 + u_2 - c$, то $n' = u_1' + u_2' - 1 < u_1' + u_2'$. Если же $n = u_1 + u_2 - c + 1$, то $n' = u_1' + u_2'$, и появляется большой цикл, который можно раскрасить двумя или тремя цветами в зависимости от четности суммы $u_1' + u_2'$. Тем самым подтверждается формула (1) и теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые NM-графы с числом образующих больше двух, при этом число вершин будем считать произвольным. Как правило, $n \ge u_1 + u_2$. Множество раскрасок на рисунках обозначим с помощью множества $Q = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\}$. Поставим ему в соответствие множество чисел $Q' = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, а цвет вершины i обозначим $q_i \in Q'$.

Лемма 1. NM-граф с образующими $U = \{1, 2, k\}$ $(k > 2)$ имеет хроматическое число

$$\lambda(G) = 3 + (1 - k^2) \bmod 3. \qquad (2)$$

Действительно, если изобразить такой граф в виде линейной последовательности вершин, то получим рис. 1. Образующие $u_1 = 1$ и $u_2 = 2$ делают раскраску графа вынужденной, если первые три его вершины окрасить цветами α, β и γ.

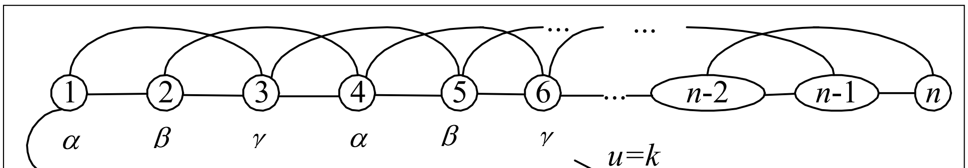

Рис. 1. Граф для $U = \{1, 2, k\}$

Вершина 4 смежна с вершиной 2 цвета β и вершиной 3 цвета γ, поэтому ее цвет однозначен — α, т.е. $q_4 = 0$. Аналогично рассуждая, получаем $q_i \equiv (i - 1)(\bmod 3)$. Если $k \equiv 0(\bmod 3)$, то эта образующая будет соединять одноцветные вершины, что делает невозможным окрасить весь граф тремя цветами. Его легко раскрасить четырьмя цветами, так как после раскраски трех первых вершин последующие связаны не более, чем с тремя уже раскрашенными вершинами. Это дает возможность всегда выбрать свободную четвертую краску. Таким образом, если $k \neq 0(\bmod 3)$, то в формуле (2) $k^2 \equiv 1(\bmod 3)$, и формула верна.

Лемма 2. Если в NM-графе все $u_i \equiv 1(\bmod 2)$, то

$$\lambda(G) = 2 .$$

Это можно легко показать, если всем вершинам с четными номерами приписать цвет β, всем вершинам с нечетными — α. В общем случае положить $q_i \equiv i(\bmod 2)$. Образующие не могут соединять вершины, номера которых имеют одинаковую четность, поэтому вершины с одинаковой окраской всегда несмежны.

Следствие. Если в NM-графе $G(X,U)$ все образующие имеют вид $u_i = 2k_i l + l$, где $k_i \geq 0$, а l — заданная положительная константа, то

$$\lambda(G) = 2 .$$

Действительно, в этом случае НОД$(u_1, u_2, \ldots, u_m) = l$, и каждая образующая имеет вид $l(2k_i + 1)$. Вопрос о хроматическом числе исходного графа сводится к графу, у которого число вершин $n' = \left\lceil \frac{n}{l} \right\rceil$ и образующие имеют вид $u_i = 2k_i + 1$ или $u_i \equiv 1(\bmod 2)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. По лемме 2 это равносильно $\lambda(G) = 2$.

Теорема 2. Хроматическое число NM-графов с образующими $U = \{k, l, k+l\}$ при $n \geq 2(k+l)$ равно

$$\lambda(G) = 3 + (l-k)^2 (\bmod 3) . \qquad (3)$$

Доказательство. Как указывалось выше, для $n < k + l$ $\lambda(G) = 2$. Пусть $n = k + l$. В этом случае NM-граф представляет собой гамильтонов цикл. Если проследить за последовательностью номеров вершин, образующих ребра цикла, то они представляют k возрастающих арифметических прогрессий типа $i+k, i+2k, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Как только номер попадает в интервал $(n-k+1, n)$, то с помощью ребра, соответствующего образующей l, делается переход (путем вычитания l) к следующей возрастающей последовательности.

Положим теперь $n = 2k + l$. Каждая вершина $k + l + i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ будет смежной с вершиной i и двумя соседними с ней по циклу. На рис. 2 каждой такой вершине соответствуют две соседние заштрихованные треугольные грани. Дополним число вершин до $2k + 2l$ и получим рис. 2.

Если окрасить вершину 1 цветом α, а вершину 5 цветом β, то раскраска всего графа тремя цветами произойдет однозначно. Если взять за основание внутренний цикл, то весь граф на рис. 2 можно разбить на $k + l$ четырехугольников с диагоналями (блоков). Если придерживаться упорядоченности раскрасок во множестве Q, то все вертикальные ребра в блоках имеют раскраску вершин (α,β), (β,γ) или (γ,α), что соответствует числам из множества Q' $(i,i+1)(\bmod 3)$ $(i=0,1,2)$. Если теперь в блоках проследить переход раскраски вершин левого ребра к раскраске вершин правого, то получим следующую зависимость: в одних блоках происходит переход $(\alpha,\beta)\to(\beta,\gamma)$, $(\beta,\gamma)\to(\gamma,\alpha)$ и $(\gamma,\alpha)\to(\alpha,\beta)$, а в других — $(\alpha,\beta)\to(\gamma,\alpha)$, $(\beta,\gamma)\to(\alpha,\beta)$ и $(\gamma,\alpha)\to(\beta,\gamma)$. Эти блоки различаются положением диагонали. Назовем блоки первого типа плюс-блоками, так как в них происходит переход $[(i,i+1)\to(i+1,i+2)](\bmod 3)$. Соответственно блоки второго типа назовем минус-блоками, так как в них происходит переход $[(i,i+1)\to(i-1,i)](\bmod 3)$ (рис. 3).

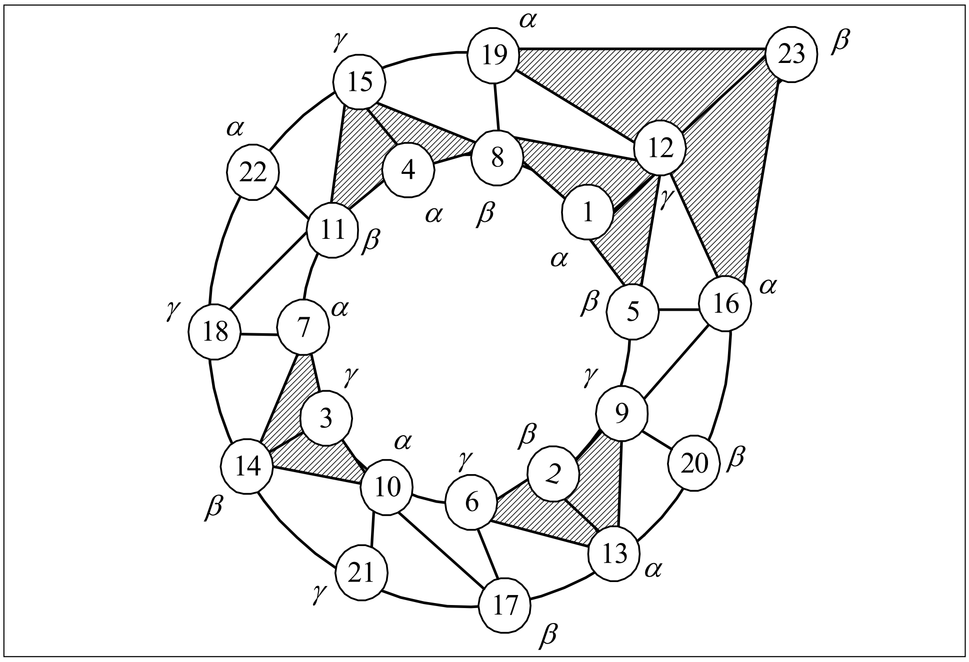

Рис. 2. Граф с образующими $U=\{4,7,11\}$

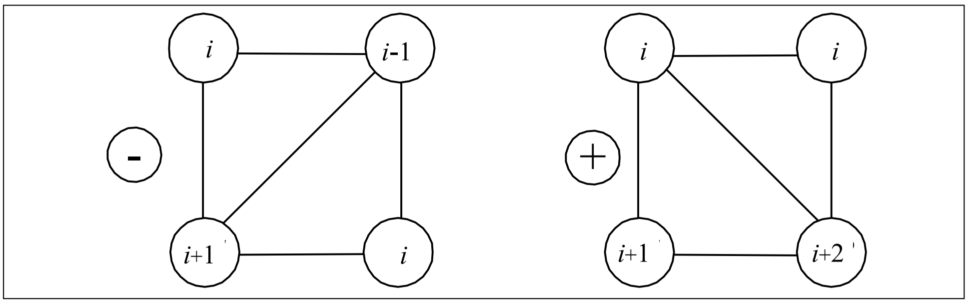

Рис. 3. Два типа раскрашенных блоков

Как видно из рис. 2, минус блоки являются левыми частями в парах раскрашенных треугольников, поэтому их число равно k. Так как число блоков $k+l$, то отсюда вытекает, что число плюс-блоков l. Раскраска графа будет непротиворечивой, если сумма всех знаков плюс- и минус-блоков $0(\bmod 3)$. Отсюда условие существования раскраски графа тремя цветами

$$l - k \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3),$$

что дает первое условие (3). Для большего числа вершин дальнейшая раскраска однозначна, так как в качестве основания выбирается внешний цикл. Это видно на примере вершины 23 на рис. 2. Покажем теперь, что для любых k и l достаточно четырех красок, чтобы раскрасить исходный NM-граф. Это достигается многими способами. Один из них состоит в том, чтобы раскрасить тремя цветами исходный цикл (вершины от 1 до $k+l$). Следующие вершины смежны только с тремя ранее окрашенными вершинами, поэтому всегда есть четвертый свободный цвет.

Лемма 3. Хроматическое число NM-графов с множеством образующих $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, где u_i не удовлетворяют условиям леммы 2 и ее следствию, и $u_i \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, 3) \quad (i = 1, 2, 3)$ равно

$$\lambda(G) = 3.$$

Действительно, в этом случае вершине с номером i можно придать цвет $q_i \equiv i (\mathrm{mod} 3)$. Любые две одинаково окрашенные вершины x и y несмежны, иначе было бы $|x - y| \in U$, т.е. какая-то образующая равна $0 (\mathrm{mod} 3)$, что противоречит начальному условию. Очевидно, что лемма 1 является следствием леммы 3.

МЕТОДЫ РАСКРАСКИ NM-ГРАФОВ

Существует несколько способов (алгоритмов) раскраски графов произвольным числом цветов. Обозначим $f(G, \lambda)$ число всех раскрасок n-вершинного графа $G(X, U)$ с помощью λ различных цветов. Известно [10], что если в графе G существует две несмежные вершины a и b, то

$$f(G, \lambda) = f(G \cup ab, \lambda) + f(G(a \equiv b), \lambda), \tag{4}$$

где $G \cup ab$ — граф G, у которого вершины a и b соединены ребром, а $G(a \equiv b)$ — граф G, у которого вершины a и b стянуты в одну. Продолжая применять формулу (4) для графов в правой части до тех пор, пока в них найдутся несмежные вершины, получаем окончательное выражение

$$f(G, \lambda) = \sum_{i=s}^{n} c_i f(k_i, \lambda), \tag{5}$$

где k_i — полный $i-$вершинный граф, а c_i — неотрицательные целые числа. Очевидно, что $f(k_i, \lambda) = 0$, если $i > \lambda$. Поэтому исходный граф G может быть раскрашенным в λ цветов только тогда, когда $s \le \lambda$.

Однако на практике применять формулу (5) очень сложно, разве что для очень специальных или простых графов. Рассмотрим произвольный NM-граф с двумя образующими $U = \{u_1, u_2\}$ и $n = u_1 + u_2$, НОД$(u_1, u_2) = 1$. Этот граф является гамильтоновым циклом. Если добавлять к нему новые вершины с номерами $u_1 + u_2 + i \quad (i \ge 1)$, то к исходному циклу добавятся новые внешние циклы длиной 4 вида $(i,\ i+u_1,\ i+u_1+u_2,\ i+u_2)$. В этих циклах всегда вершины i и $i+u_1+u_2$ несмежны, поэтому к ним можно применить формулу (4). Отбросим в правой части те слагаемые, которые соответствуют графам, где добавляются ребра, соединяющие несмежные вершины. В результате равенство (4) превращается в неравенство (рис. 4).

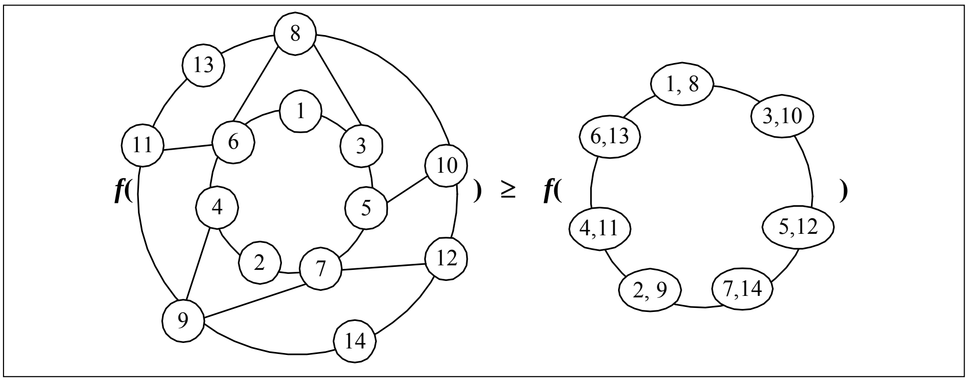

Рис. 4. Пример для графа с $U=\{2,5\}$ и $n=14$

Хроматическое число графа, полученного справа, равно 2 или 3 в зависимости от четности числа u_1+u_2. Граф слева также может быть окрашен как и правый граф, если склеенные вершины окрасить одним цветом. Значит, его хроматическое число не может быть больше, чем у графа справа. Можно сказать, что здесь повторно доказана теорема 1.

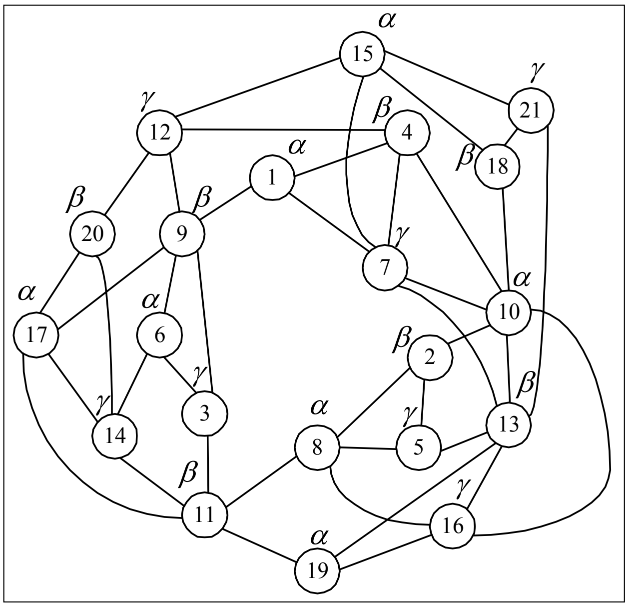

Рис. 5. Граф с $U=\{3, 6, 8\}$ и $n=21$

Но для NM-графов уже с тремя образующими, применяя только операции стягивания, можно получить в правой части (4) очень сложный граф. Его хроматическое число вычислить не всегда просто. Поэтому для таких графов предлагается другой метод раскраски, который назовем методом разностей. Для лучшего усвоения сути этого метода рассмотрим пример NM-графа на рис. 5, раскрашенного в три цвета. Для него $n=21$ и $U=\{3, 6, 8\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что в раскрашенном графе всегда вершина с номером 1 имеет цвет α, а следующая с наименьшим номером — β. Выпишем последовательности вершин графа на рис. 5, которые соответствуют каждому цвету, в возрастающем порядке.

$$\begin{aligned} \alpha &\sim 1,6,8,10,15,17,19, \\ \beta &\sim 2,4,9,11,13,18,20, \\ \gamma &\sim 3,5,7,12,14,16,21. \end{aligned} \tag{6}$$

Вычислим разности между соседними элементами этих последовательностей:

$$\begin{aligned} \alpha &\sim 5,2,2,5,2,2, \\ \beta &\sim 2,5,2,2,5,2, \\ \gamma &\sim 2,2,5,2,2,5. \end{aligned} \tag{7}$$

Легко заметить, что последние последовательности периодические. Для цвета α периодически повторяющиеся числа (5,2,2), для β — (2, 5, 2) и для γ — (2, 2, 5). Назовем эти числа кодами раскраски и обозначим их соответственно Δ_α, Δ_β, Δ_γ. В данном примере все коды раскраски имеют одинаковую длину, а Δ_β и Δ_γ можно получить из кода Δ_α путем сдвига его компонент по циклу. Однако эти свойства для них выполняются не всегда. Если коды раскраски известны, то тем самым определяется и раскраска графа для произвольного числа вершин. Покажем, что коды раскрасок обладают некоторыми постоянными свойствами, которые помогут нам в некоторых случаях.

Свойство 1. Любая сумма последовательных чисел кода раскраски в (7) не принадлежит U.

Действительно, если бы это было так, то в какой-то одноцветной последовательности (6) нашлись бы два таких номера вершин, разность между которыми принадлежала бы U, что означало бы: вершины смежны, но такого не может быть в силу их одноцветности. В нашем примере суммы равны 2, 4, 5, 7, 9 и больше, и ни одно из этих значений не равно какой-либо образующей.

Пусть длина кода соответствующей раскраски равна l_α, l_β и l_γ. Обозначим компоненты кодов раскраски верхними индексами в скобках. Например, $\Delta_\alpha^{(1)} = 5$, $\Delta_\alpha^{(2)} = \Delta_\alpha^{(3)} = 2$.

Свойство 2. Для кодов раскраски NM-графа справедливо

$$\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = \sum_{i=1}^{l_\beta} \Delta_\beta^{(i)} = \sum_{i=1}^{l_\gamma} \Delta_\gamma^{(i)} = l_\alpha + l_\beta + l_\gamma\ . \tag{8}$$

Предположим сначала, что в каком-то коде раскраски это условие не выполняется. Не нарушая общности, пологаем, что

$$\sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)} = l_\alpha + l_\beta + l_\gamma + \varepsilon \quad (\varepsilon \ge 1)\,. \tag{9}$$

Среди первых l_1 чисел в строке α, первых l_2 чисел в строке β и первых l_3 чисел в строке γ (6) находятся все числа от 1 до $l_1 + l_2 + l_3 + 1$. Всегда можно найти некоторое число x в строке α, а в других строках число y такое, что $y - x = \varepsilon$. Это невозможно только в случае, если $\Delta_\alpha^{(i)} = \varepsilon$ $(i = 1,2,\ldots,l_\alpha)$, но тогда Δ_α не может быть кодом раскраски.

Рассмотрим в строке, где находится x, вершину с номером $N_1 = = x + \sum_{i=1}^{l_\alpha} \Delta_\alpha^{(i)}$. Эта вершина должна быть окрашена цветом α, так как разница между N_1 и x равна повторяющемуся периоду. С другой стороны, вершина с номером $N_2 = y + l_\alpha + l_\beta + l_\gamma$ окрашена в тот же цвет, что и вершина y по той же причине. Но согласно (9) $N_1 = N_2$, поэтому вершины x и y окрашены одним цветом. Пришли к противоречию, что подтверждает справедливость формулы (8).

Метод разностей позволяет, анализируя состав образующих NM-графа, находить правильную раскраску графа и на этом основании судить о его хроматическом числе. В последующих работах будет более подробно показано, как на практике пользоваться таким методом для нахождения соответствующих кодов раскраски. Воспользуемся им для доказательства следующего результата.

Теорема 3. Хроматическое число NM-графа $G(X,U)$ с $U = \{1, 3, 2k\}$ $(k \geq 3)$ равно 3.

Если в кодах раскраски некоторые компоненты повторяются, то мы будем иногда пользоваться записью в виде основания с показателем. Например, $\Delta_\alpha = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 5)$ можно записать как $\Delta_\alpha = (1^2, 2^3, 5)$. Чтобы доказать теорему, просто укажем вид кодов раскрасок для соответствующего цвета. Находим сначала число $d = 2\left\lfloor \frac{k+1}{4} \right\rfloor$. Теперь докажем, что коды раскрасок строятся так:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= (d+3,\ 2^d), \\ \Delta_\beta &= (2^{d/2},\ d+3, 2^{d/2}), \\ \Delta_\gamma &= (2^d,\ d+3). \end{aligned} \tag{10}$$

Так как в этих кодах $l_\alpha = l_\beta = l_\gamma = d+1$, то второе свойство кодов для них легко проверить:

$$\sum_{i=1}^{d+1} \Delta_\alpha^{(i)} = \sum_{i=1}^{d+1} \Delta_\beta^{(i)} = \sum_{i=1}^{d+1} \Delta_\gamma^{(i)} = d + 3 + 2d = 3(d+1).$$

Чтобы проверить первое свойство, образуем всевозможные последовательные суммы компонент кодов раскраски. Легко видеть, что никакие такие суммы не равны $u_1 = 1$ или $u_2 = 3$. Если взять только двойки, то суммы принимают значения $2, 4, \ldots, 2d = 4\left\lfloor \frac{k+1}{4} \right\rfloor$. Для всех $p, q > 0$ справедливо $q\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = p - p \pmod q$. Поэтому $2d = k + 1 - (k+1) \pmod 4 < 2k = u_3$. Если брать суммы с привлечением одного слагаемого $d+3$, то полученные суммы будут нечетными. Поэтому $\neq 2k$. Если слагаемое $d+3$ использовать два раза, то все полученные суммы будут не меньше $2(d+3) + 2d = 2[2d+3] =$

$=2[k+1-k+1)(\mathrm{mod}\,4)+3]$. Так как наибольшее значение $(k+1)(\mathrm{mod}\,4)$ равно 3, то все суммы будут не меньше $2(k+1)$, т. е. больше u_3.

Согласно кодам (10) построим непосредственно последовательности раскрашенных вершин (6) с номерами от 1 до $3d+3$.

$$\alpha \ \sim \ 1\,\underline{\qquad\qquad},\ d+4, d+6, \ldots, 2d+2, 2d+4, \ldots, 3d+2,$$

$$\beta \ \sim \ 2, 4, 6, \ldots, d+2\,\underline{\qquad\qquad},\ 2d+5, \ldots, 3d+3,$$

$$\gamma \ \sim \ 3, 5, 7, \ldots, d+3, d+5, d+7, \ldots, 2d+3\,\underline{\qquad\qquad}\,.$$

Здесь прямыми отрезками отмечены разности, равные $d+3$, остальные — 2. Эти последовательности можно продлевать до любой величины, так как они периодические с периодом $3d+3$, что и подтверждает справедливость теоремы.

Очевидно, что найденные выше раскраски являются избыточными, т. е. они годятся и для NM-графов с большим числом образующих. Так как наименьшая нечетная сумма последовательных компонент кодов раскраски равна $d+3$, то U может содержать нечетные образующие, которые меньше этого числа. Это значит, что раскраска исходного NM-графа та же, что и у графа с образующими $U'=\{1, 3, 5, \ldots, d+1, 2k\}$. Отсюда можно сделать вывод, что раскраска с помощью метода разниц может применяться для NM-графов с произвольным числом образующих.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. *Донец Г.А.* О графах, задаваемых аналитическим образом // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. — С. 20 –27.
3. *Донец Г.А.* Об оптимальном кодировании однородных деревьев в арифметических графах // Методы решения экстремальных задач и смежные вопросы. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1987. — С. 72–77.
4. *Донець Г.П., Неженцев Ю.І.* Арифметичні графи та їх представлення // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1990. — № 11. — С. 5 – 8.
5. *Донец Г.А., Шулинок И.Э.* Об общем представлении числовых графов // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. — С. 11 – 18.
6. *Шулинок И.Э.* Об одном классе числовых графов // Теория и приложения методов оптимизации. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1998. — С. 24 – 29.
7. *Шулинок И.Э.* О связности и цикломатическом числе натуральных модульных графов // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 1999. — С. 51 – 57.
8. *Шулінок Г.О.* Про ізоморфізм натуральних модульних графів // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2004. — С. 69 – 73.
9. *Шулинок Г.А.* Об изоморфизме регулярных NM-графов // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, 2005. — С. 100 – 106.
10. *Лекции* по теории графов / В.А Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990. — 384 с.

Поступила 20.10.2005