УДК 519.8

К ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ ТОЧНОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Г.М. БАКАН, А.В. ШОЛОХОВ

Решается задача гарантированной оценки точности линейной системы в дискретном времени при условии, что на входе системы действует ограниченная помеха, а начальное ее состояние известно с точностью до эллипсоидального множества в фазовом пространстве состояний. Используется матрица сжатия (растяжения) пространства, что позволяет получить более простое в вычислительном отношении решение по сравнению с известным. Приведены результаты моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема оценки точности управляемой системы возникает, в частности, тогда, когда система функционирует в условиях, не предусмотренных при ее расчете. Начальные условия могут существенно отличаться от расчетных, а реализуемые расчетные управления искажаются не учтенными при синтезе помехами. Если информация о мешающих факторах в том или ином виде задана, то можно решать задачу об оценке влияния этих факторов на отклонение от расчетной траектории движения системы. Подобная задача рассматривается в этой статье. Предполагается, что все мешающие факторы ограничены и известны множества принимаемых ими значений. В этих условиях решается задача о построении гарантированной оценки точности системы как отклонения от расчетной (идеальной) траектории ее движения. Она входит в класс задач, связанных с построением так называемых множеств достижимости [1]. В данной статье предлагается сравнительно простой алгоритм решения, учитывающий специфику рассматриваемой задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается линейная управляемая система с аддитивной помехой, действующей на ее входе, и не точно известным начальным состоянием. Уравнение системы в фазовом пространстве переменных состояния имеет вид

$$x_{j+1} = Ax_j + Bu_j + w_j, \;\; j \in T_0, \tag{1}$$

где $j \in T_0 = [0,1,\dots,k]$ — дискретное время ($k \le \infty$); $x_j \in R^n$ — вектор фазового состояния (в момент времени j); $u_j \in R^1$ — управление в тот же момент; $w_j \in R^n$ — вектор помехи; $A_j \in R^{n\times n}$, $B = R^{n\times 1}$ — заданные матрицы такие, что пара (A, B) управляема. Предполагается, что матрицы A, B имеют каноническую форму, в частности, $B^T = (0\ 0\ \dots 1)$.

Управления $u_j \in R^1$ заданы на всем интервале T_0 управления, образуя программу

$$\{ u_j \in R^1,\ j \in T_0 \}. \tag{2}$$

Помеха w_j действует аддитивно по отношению к управляющему воздействию. Она имеет вид

$$w_j = \lambda_j e_n; \tag{3}$$

где $\lambda_j \in R^1$ — ограниченный мешающий фактор такой, что

$$\forall j \in T_0 \quad |\lambda_j| \le d,\ d \ge 0;$$

$e_n^T = (0\,0 \dots 1)$ — единичный орт в R^n; $d \ge 0$ — заданная константа.

Для множества реализаций помехи w_j можно записать

$$\left\{ w_j : \left| l^T w_j \right| \le d\sqrt{l^T e_n e_n^T l},\quad \forall l \in R^n \right\}. \tag{4}$$

Вектор $x_0 \in R^n$ начального состояния точно не задан. Известно, что он может принимать значения из ограниченного множества

$$E_0 = \left\{ x_0 : (x_0 - \bar{x}_0)^T \, \overline{H}_0^{-1} (x_0 - \bar{x}_0) \le 1 \right\}, \tag{5}$$

где $E_0 \subset R^n$ — многомерный эллипсоид с заданными параметрами $\bar{x}_0 \in R^n$ и $\overline{H}_0 \in R^{n\times n}$, $(\overline{H}_0^T = \overline{H}_0 > 0)$.

Пусть $\{\tilde{x}_j,\ j \in T_0\}$ расчетная траектория системы есть решение уравнения

$$\tilde{x}_{j+1} = A\tilde{x}_j + Bu_j, \tilde{x}_j \Big|_{j=0} = \bar{x}_0 \tag{6}$$

при управлениях (2).

Величину

$$\varepsilon_j = x_j - \tilde{x}_j,$$

где x_j — решение уравнения (1), при некотором $x_0 \in E_0$ и условиях (2), (4), (5) назовем ошибкой системы.

Задача состоит в том, чтобы построить такое эллипсоидальное множество $E_j \subset R^n$ наименьшего многомерного объема, чтобы

$$\forall j \in T_0,\quad \varepsilon_j \in E_j. \tag{7}$$

Множество E_j назовем гарантированной оценкой точности системы (в j-й момент времени) или гарантированной оценкой точности реализации программы (2).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пусть искомая эллипсоидальная оценка в j-й момент времени имеет вид многомерного эллипсоида

$$E_j = \{x_0 : (x_j - \bar{x}_j)^T H_j^{-1} (x_j - \bar{x}_j) \le 1\}, \tag{8}$$

где параметры $\bar{x}_0 \in R^n$ и $H_j \in R^{n \times n}$, $\left(H_j > 0\right)$ предполагаются известными. В частности, для $j = 0$ $\bar{x}_j\Big|_{j=0} = \bar{x}_0$, $H_0 = \overline{H}_0$.

Эллипсоид (8) можно записать в параметрическом виде

$$E_j = \left\{x_j : x_j = \bar{x}_j + \sqrt{H_j}\,\xi_j,\ \ \|\xi\| \le 1\right\}, \tag{9}$$

где $\xi_j \in R^n$ — вспомогательный параметр и $\|\bullet\|$ — евклидова норма вектора.

Для определения оценки E_{j+1} на $j+1$-м такте найдем образ эллипсоида при отображении его с помощью линейного преобразования (1). Для этого, пользуясь параметрическим представлением (9), исключим вектор x_j из уравнения (1). Тогда получим

$$x_{j+1} = A\bar{x}_j + A\sqrt{H_j}\,\xi_j + Bu_j + w_j\,.$$

Обозначим

$$\bar{x}_{j+1} = A\bar{x}_j + Bu_j\,, \tag{10}$$

тогда

$$x_{j+1} - \bar{x}_{j+1} = A\sqrt{H_j}\,\xi_j + w_j\,. \tag{11}$$

Так как в (10) $\bar{x}_j\Big|_{j=0} = \bar{x}_0$, а управления определяются программой (2), следует считать $\bar{x}_{j+1} \equiv \tilde{x}_{j+1}$. С учетом этого для ошибки $\varepsilon_{j+1} = x_{j+1} - \tilde{x}_{j+1}$ согласно (11) можем записать

$$E_{j+1}^* = \left\{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1} = z_j + w_j,\ z_j = A\sqrt{H_j}\,\xi_j,\ \left\|\xi_j\right\| \le 1,\ \ w_j = \lambda_j e_n,\ |\lambda| \le d\right\}. \tag{12}$$

В соответствии с определением переменной z_j в (12) она принимает значения из множества

$$\{z_j :\ l^T z_j \le \sqrt{l^T A H_j A^T l},\ \ \forall\ l \in R^n\}. \tag{13}$$

Таким образом, ошибка ε_{j+1} на $j+1$-м такте представляет собой сумму двух переменных, каждая из которых принимает значения из эллипсоидальных множеств (4) и (13). Учитывая, что эти множества заданы своими огибающими функциями, для множества (12) получаем

$$E^*_{j+1} = \{\varepsilon_{j+1} :\ l^T \varepsilon_{j+1} \le \sqrt{l^T H_{j+1|j} l} + \sqrt{l^T e_n e_n^T l}\, d,\ \forall\ l \in R^n\}\,, \tag{14}$$

где

$$H_{j+1|j} = AH_j A^T\,.$$

Здесь использован тот факт, что сумма двух векторов, каждый из которых задан эллипсоидальным множеством, принадлежит множеству с огибающей функцией, равной сумме огибающих функций исходных эллипсоидов.

Таким образом поставленная задача свелась к тому, чтобы аппроксимировать множество (14) эллипсоидальным множеством E_{j+1} наименьшего объема.

Исчерпывающее решение данной задачи содержится в монографии [1]. Однако оно связано с необходимостью одновременного приведения исходных эллипсоидов к диагональной форме, для чего приходится решать соответствующее характеристическое уравнение.

В этой статье предлагается более простой способ решения, учитывающий специфику рассматриваемой задачи. В его основе лежит идея использования матрицы сжатия [2] по заданному направлению, что позволяет относительно просто вычислять, а затем и минимизировать объем искомой эллипсоидальной оценки.

Поскольку множество (14) не является эллипсоидальным, найдем аппроксимирующее его эллипсоидальное множество. Для этого воспользуемся леммой, которую применительно к рассматриваемой здесь задаче запишем в уже принятых обозначениях, опуская индексы j и $j+1$.

Лемма. Пусть $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ — числовые параметры такие, что

$$\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1\,. \tag{15}$$

Тогда любой эллипсоид из параметрического семейства

$$E(\gamma_1, \gamma_2) = \left\{\varepsilon : \varepsilon \le \sqrt{l^T (\gamma_1 e_n e_n^T\, d^2 + \gamma_2 H)\, l},\ \ \forall\ l \in R^n\right\} \tag{16}$$

имеет свойство

$$\forall\, \gamma_1, \gamma_2\ \ E^* \subset E(\gamma_1, \gamma_2)\,, \tag{17}$$

где

$$E^* = \left\{\varepsilon : l^T \varepsilon \le \sqrt{l^T e_n e_n^T l} d + \sqrt{l^T H l}\right\}.$$

Доказательство леммы основано на известном неравенстве [3]

$$\|x\| + \|y\| \le \sqrt{\gamma_1 x^T x + \gamma_2 y^T y}\,, \tag{18}$$

где $x, y \in R^n$, $\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1$.

На основании этой леммы для аппроксимирующих множества (14) эллипсоидов можем использовать семейство

$$E(\gamma_1, \gamma_2) = \left\{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon_{j+1}^T H_{j+1}^{-1}(\gamma_1, \gamma_2)\varepsilon_{j+1} \le 1\right\}, \tag{19}$$

где

$$H_{j+1}(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_{1,j} e_n e_n^T\, d^2 + \gamma_{2,j} H_{j+1|j}) \tag{20}$$

и

$$\gamma_{1,j}^{-1} + \gamma_{2,j}^{-1} = 1\,. \tag{21}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы выбрать из семейства (19) аппроксимирующий эллипсоид наименьшего объема. Найдем выражения для объема эллипсоида (19) как функцию от параметров $\gamma_{1,j}$ и $\gamma_{2,j}$. По определению имеем

$$v(E(\gamma_{1,j},\gamma_{2,j})) = v(1)(\det H_{j+1}(\gamma_{1,j},\gamma_{2,j}))^{1/2}\,, \tag{22}$$

где $v(1)$ — объем единичного шара в R^n; $\det H$ – определитель матрицы $H \in R^{n\times n}$. С использованием матрицы сжатия (растяжения) матрицу (20) представим в виде

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j},\gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j}\sqrt{H_{j+1|j}}\;R_{\beta_j^{-2}}\left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}e_n\right)\sqrt{H_{j+1|j}}\,, \tag{23}$$

где $R_{\beta_j^{-2}}\left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}e_n\right)$ — матрица сжатия (растяжения) по направлению $\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}\,e_n$

$$R_{\beta_j^{-2}}\left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}e_n\right) = I - \left(1-\beta_j^{-2}\right)\frac{\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}\,e_n e_n^T\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}}{e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n}\,, \tag{24}$$

где $I \in R^{n\times n}$ — единичная матрица и

$$\beta_j^{-2} = 1 + \frac{\gamma_{1,j}}{\gamma_{2,j}}\kappa_j^2\,, \tag{25}$$

где

$$\kappa_j^2 = e_n^T H_{j+1|j}^{-1} e_n d^2\,. \tag{26}$$

С учетом свойства матрицы сжатия

$$\det R_{\beta_j^{-2}}\left(\sqrt{H_{j+1|j}^{-1}}e_n\right) = \beta_j^{-2} \tag{27}$$

для объема (22) находим

$$v\left(E(\gamma_{1,j},\gamma_{2,j})\right) = v(1)\gamma_{2,j}^{n/2}\beta_j^{-1}\left(\det H_{j+1|j}\right)^{1/2}\,. \tag{28}$$

Утверждение. Пусть δ_j^+ положительный корень уравнения

$$n\,\delta_j^2 + \kappa_j^2(n-1)\delta_j - \kappa_j^2 = 0\,, \tag{29}$$

тогда оптимальные значения $\overset{*}{\gamma}_{1,j}$ и $\overset{*}{\gamma}_{2,j}$ параметров $\gamma_{1,j}$ и $\gamma_{2,j}$, на которых достигается минимальное значение объема (22) аппроксимирующего эллипсоида, связаны между собой соотношением

$$\delta_j^+ = \frac{\overset{*}{\gamma}_{2,j}}{\overset{*}{\gamma}_{1,j}}\,, \tag{30}$$

что с учетом ограничения (21) дает

$$\gamma^*_{1,j} = \frac{1+\delta^+_j}{\delta^+_j}, \quad \gamma^*_{2,j} = 1+\delta^+_j. \tag{31}$$

Доказательство утверждения следует непосредственно из необходимого условия минимума функции (28) с учетом ограничения (15).

Таким образом, для искомой оптимальной оценки ошибки на $j+1$-м такте находим

$$E_{j+1} = \{\varepsilon_{j+1} : \varepsilon^T_{j+1} H^{-1}_{j+1} \varepsilon_{j+1} \le 1\}, \tag{32}$$

где матрица $H_{j+1} = H_{j+1}(\gamma^*_{1,j}, \gamma^*_{2,j})$ в соответствии с (20) равна

$$H_{j+1} = \gamma^*_{1,j} e_n e_n^T d^2 + \gamma^*_{2,j} H_{j+1|j}.$$

Для максимального положительного корня, решая уравнение (29), получаем

$$\delta^+_j = d(e_n^T \, H^{-1}_{j+1|j} e_n)^{1/2} b_j = \kappa_j b_j,$$

где

$$b_j = \frac{\sqrt{\kappa_j^2 (n-1)^2 + 4n}}{2n} - \frac{\kappa_j (n-1)}{2n}.$$

Используя соотношения (31), с учетом полученного выражения для максимального корня искомую матрицу H_{j+1} можем записать

$$H_{j+1} = (1+\delta^+_j)\left(H_{j+1|1} + \frac{d}{b_j} \frac{e_n e_n^T}{(e_n^T \; H^{-1}_{j+1|1} \;\; e_n)} \right). \tag{33}$$

Формулы (5) и (33) с учетом определения ошибки $\varepsilon_{j+1} = x_{j+1} - \widetilde{x}_{j+1}$ дают искомый рекуррентный алгоритм построения гарантированной оценки ошибки реализации программы (2). Начальными значениями здесь служат параметры априорного множества (3).

Заметим, что уравнение (29) совпадает с уравнением, полученным в работе [1] для частного случая, когда матрица $H_{j+1|j} = I$.

Пример моделирования алгоритма. Возьмем систему третьего порядка и зададимся устойчивыми значениями собственных чисел матрицы динамики A: $\lambda_i = 0{,}75;\ 0{,}5;\ -0{,}5$. По ним построим матрицу A, имеющую форму Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0{,}1875 & 0{,}25 & 0{,}75 \end{bmatrix}.$$

Управления в программе (2) примем равными $\bar{u}_j = 1,\ \forall\, j \in \overline{1,k}$, помеху λ_i зададим в виде $\lambda_i = d(-1)^j$. Начальное значение $\bar{x}_0^T = [5 \;\; -10 \;\; 12]$ удовлетворяет условию (5), где

$$H_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Моделирование системы произведем в среде MATLAB. В качестве результата рассмотрим график изменений квадратного корня из определителя матрицы H_j (рис. 1) и график зависимости значения квадратичной формы (32) от номера j итерации (рис. 2).

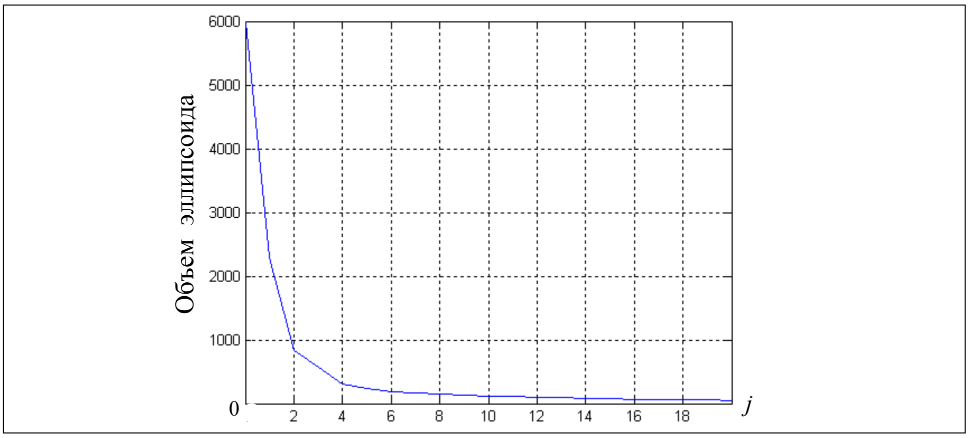

Рис. 1. Аппроксимация множества достижимости при λ_i=0,75; 0,5; – 0,5

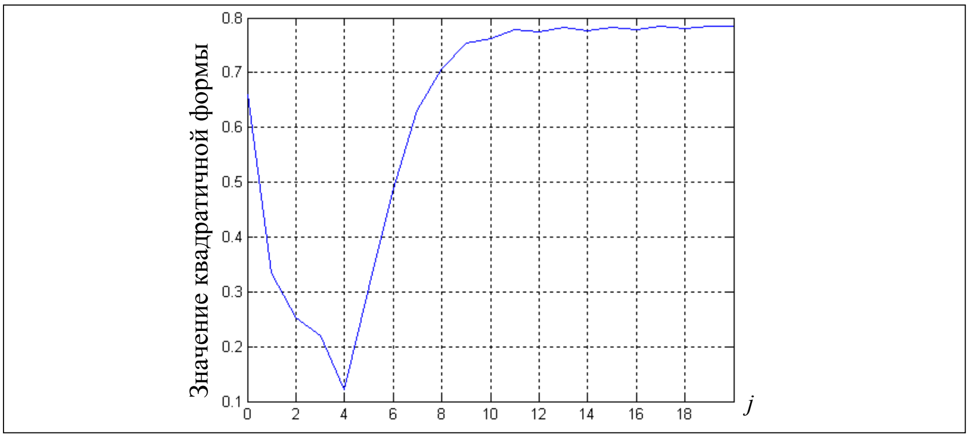

Рис. 2. Оценка вектора ошибки при λ_i =0,75; 0,5; – 0,5

Из рис. 1 видно, что точность гарантированной оценки ошибки возрастает с ростом числа итераций. При этом (рис. 2) эллипсоид (32) гарантированно содержит ошибку в качестве своего элемента.

Результаты аналогичных расчетов приведены на рис. 3 и 4 для случая, когда собственные числа матрицы A равны $\lambda_i = 0{,}5;\ 0{,}4 + 0{,}6i;\ 0{,}4 - 0{,}6i$ при одинаковых прочих условиях.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}26 & -0{,}92 & 1{,}3 \end{bmatrix}.$$

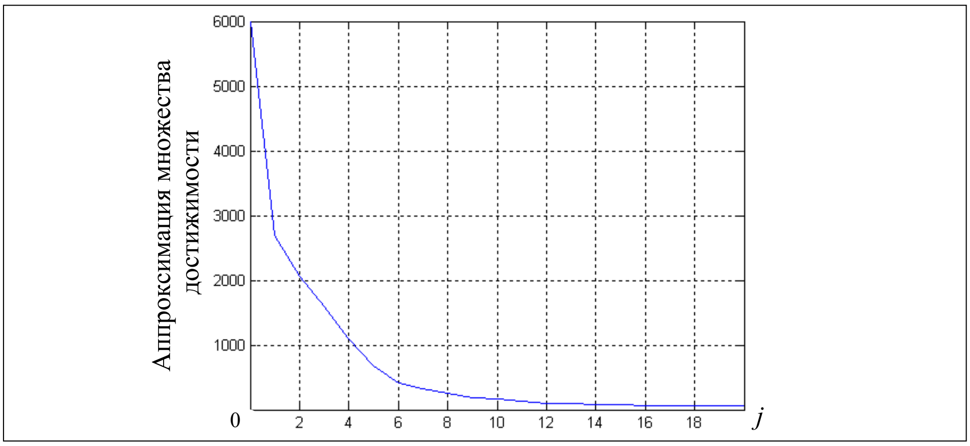

Рис. 3. Аппроксимация множества достижимости при $\lambda_i = 0{,}5;\ 0{,}4 + 0{,}6_i;\ 0{,}4 - 0{,}6_i$

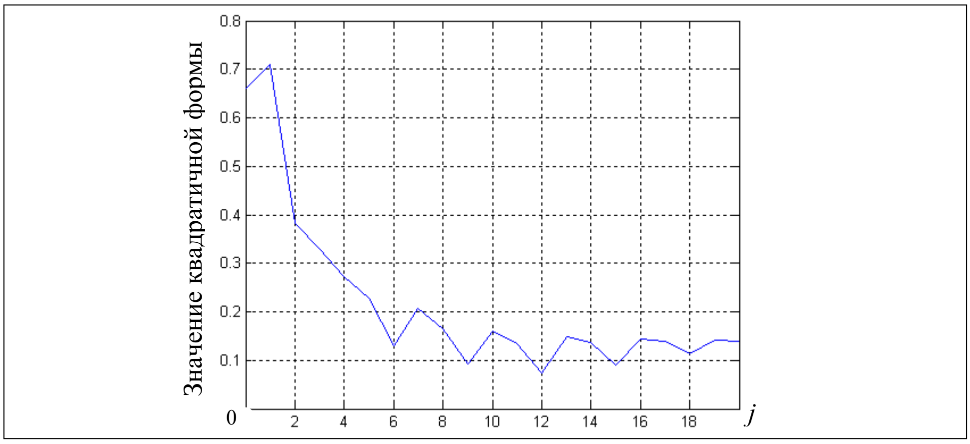

Рис.4. Оценка вектора ошибки при $\lambda_i = 0{,}5;\ 0{,}4 + 0{,}6_i;\ 0{,}4 - 0{,}6_i$

ВЫВОДЫ

С помощью предложенного алгоритма решается поставленная задача гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы для случая скалярных управлений и помехи. При этом решение достигается с меньшими вычислительными затратами по сравнению с алгоритмом, приведенным в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
2. *Шор Н.З.* Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования // Кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 94–95.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

Поступила 03.12.2004