

УДК 518.9

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР СО СЛУЧАЙНОЙ ПОМЕХОЙ**

В.В. ОСТАПЕНКО, Е.В. ОСТАПЕНКО, С.Н. АМИРГАЛИЕВА

Рассматриваются дифференциальные игры, в которых роль одного из игроков играет случайная помеха. Предлагается приближенный метод решения таких игр. Для его описания вводится и исследуется новое понятие почти выпуклой функции.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории дифференциальных игр игроки не знают действия противника в будущем и выбирают управления, основываясь на текущем или прошедшем состоянии динамической системы. В некоторых подходах допускается определенная информационная дискриминация одного из игроков. Так, например, если догоняющий игрок P играет в ε -стратегиях [1, 2], то он выбирает свое управление, зная управление убегающего игрока E на время ε вперед. Величину ε выбирает игрок E .

В ряде прикладных задач в качестве игрока E выступает некоторая помеха. Если помеха является случайной величиной и игроку P известны ее вероятностные характеристики, то он может использовать эту информацию о возможном будущем управлении противника для построения своей стратегии.

В работе [3] описана структура дифференциальной игры со случайной помехой и детально изучен некоторый класс линейных игр. В данной статье рассматриваются игры в общем линейном и нелинейном случаях и приводится приближенный метод их решения, для обоснования которого используются элементы выпуклого и обобщенного выпуклого анализа. Вводится новое понятие выпуклой функции, обобщающее классическое, и исследуются ее свойства.

Приближенные методы для решения классических дифференциальных игр изложены в работах [2, 4–6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим управляемый объект, динамика которого описывается уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1)$$

где $z \in E^n$, $u \in U$, $v \in V$, E^n — n -мерное евклидово пространство; U — компакт из евклидова пространства; V — измеримое подмножество евклидова пространства.

На функцию f и множество U налагаем ограничения:

- 1) $f(z, u, v)$ — непрерывна по совокупности переменных;
- 2) $\|f(z, u, v)\| \leq C(v)(1 + \|z\|)$, где $C(v)$ — непрерывная функция;
- 3) $f(z, U, v)$ — выпуклое множество.

Параметром u распоряжается игрок P , параметр v является случайной помехой с функцией распределения $\mu(\cdot)$.

Пусть θ — фиксированный момент времени; Φ — непрерывный функционал, определенный на E^n .

Рассмотрим задачу минимизации игроком P функции $\Phi(z(\theta))$, где $z(\cdot)$ — решение уравнения (1).

Опишем стратегию игрока P . Пусть $\omega = \{\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = \theta\}$ — конечное разбиение интервала $[0, \theta]$, $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$. Будем считать, что при фиксированном разбиении ω функция $v(t)$ является кусочно-постоянной с интервалами постоянства $[\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \dots, k$. Игрок P в начальный момент $\tau_0 = 0$ знает начальную позицию $z(0) = z_0$, величину δ_1 , значение помехи v_1 на интервале $[\tau_0, \tau_1)$ и выбирает свое управление $u(t)$ на $[\tau_0, \tau_1)$. Аналогично в момент времени τ_{i-1} игрок P знает $z(\tau_{i-1})$, величину δ_i , значение помехи v_i на интервале $[\tau_{i-1}, \tau_i)$ и выбирает свое управление $u_i(t)$, $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i)$. Кроме того, игрок P знает функцию распределения $\mu(\cdot)$.

Описанную стратегию игрока P назовем ε -стратегией и обозначим Γ_P . Она является аналогом ε -стратегии [1,2]. Игрок P при этом не знает заранее разбиения ω , и ему лишь по ходу игры становятся известными значения длин интервалов δ_i . Поэтому естественно ввести второго игрока E и оставить за ним право выбора разбиения ω .

Обозначим R_ε оператор, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $\psi(x)$ функцию

$$\psi_\varepsilon(x) = \int_V \inf_{U(\cdot)} \psi(z(\varepsilon | u(\cdot), v, x)) \mu(dv), \quad (2)$$

где $z(t | u(\cdot), v, x)$ — решение (1), соответствующее управлениям $u(\cdot)$, v и начальной позиции x . Инфинум в (2) берется по всем допустимым управлениям игрока P на интервале $[0, \varepsilon]$, т.е. по всем измеримым функциям на $[0, \varepsilon]$ со значениями в U . Отметим, что в силу ограничений на функцию f и непрерывности ψ инфинум в (2) достигается.

Положим

$$R^\omega \Phi = R_{\delta_1} \dots R_{\delta_k} \Phi, \quad \tilde{R}_\theta \Phi = \sup_{\omega} R^\omega \Phi,$$

где супремум берется по всем разбиениям ω интервала $[0, \theta]$.

Будем считать, что при фиксированном ω значения помехи v_i на интервалах $[\tau_{i-1}; \tau_i)$ являются независимыми случайными величинами. Предположим, что игрок P выбрал некоторую стратегию Γ_P , описанную выше. Это означает, что его управления $u_i(\cdot)$ на интервалах $[\tau_{i-1}; \tau_i)$ зависят от реализации случайных помех v_i и текущих значений $z(\tau_{i-1})$. Обозначим $z(\theta|\Gamma_P, v_1, \dots, v_k, x)$ решение (1), соответствующее стратегии Γ_P и реализациям v_1, \dots, v_k при начальном условии $z_0 = x$. Тогда

$$M_\omega(\Phi(z(\theta|\Gamma_P, x))) = \int_V \dots \int_V \Phi(z(\theta|\Gamma_P, v_1, \dots, v_k, x)) \mu(dv_k) \dots \mu(dv_1) \quad (3)$$

является математическим ожиданием значения функционала Φ на конце траектории $z(\theta)$, соответствующее ε -стратегии Γ_P и разбиению ω .

Цель игрока P — минимизировать функционал (3).

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует стратегия Γ_P^* игрока P такая, что для любого разбиения ω

$$M_\omega \Phi(z(\theta|\Gamma_P^*, x)) \leq \tilde{R}_\theta \Phi(x) + \varepsilon.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение ω_ε такое, что для любой стратегии Γ_P

$$M_{\omega_\varepsilon} \Phi(z(\theta|\Gamma_P, x)) \geq \tilde{R}_\theta \Phi(x) - \varepsilon.$$

Из теоремы 1 следует, что для описания гарантированного математического ожидания минимума функционала $\Phi(z(\theta))$ и построения стратегии Γ_P^* можно использовать оператор \tilde{R}_θ .

ПОЧТИ ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть K — выпуклое подмножество пространства E^n .

Определение 1. Функция $\varphi(x)$ называется слабо почти выпуклой с константой $\kappa \geq 0$, если для любых векторов $x_i \in K$ и чисел $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, I — произвольное конечное множество индексов, выполняется

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2,$$

где $r = \max_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$.

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется сильно почти выпуклой с константой $\kappa \geq 0$, если для любых $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ существует такое $y \in K$, что

$$\left\| y - \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\| \leq \kappa r^2, \quad \varphi(y) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i),$$

где $r = \max_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L и является сильно почти выпуклой с константой κ . Тогда $\varphi(x)$ — слабо почти выпуклая функция с константой $L\kappa$.

Доказательство. Обозначим $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$. В силу условий леммы

$$\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(y) + L\|y - \bar{x}\| \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + L\kappa r^2,$$

что и доказывает слабую почти выпуклость функции φ . Величины x_i , λ_i , y и r взяты из определения 2.

Обозначим $\text{epi } \varphi = \{(x, \gamma) \in E^{n+1} : x \in K, \varphi(x) \leq \gamma\}$ надграфик функции φ .

Определение 3. Множество $M \subset E^n$ называется почти выпуклым с константой $\kappa \geq 0$, если для любых $x_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ выполняется

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in M + \kappa r^2 S,$$

где $r = \max_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$, $S = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар.

Обычная выпуклость функции φ связана с выпуклостью множества $\text{epi } \varphi$. Посмотрим, что происходит в случае почти выпуклости.

Лемма 2. Пусть φ — слабо почти выпуклая с константой κ функция. Тогда $\text{epi } \varphi$ — почти выпуклое с константой κ множество.

Доказательство. Пусть $(x_i, \gamma_i) \in \text{epi } \varphi$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Тогда $\varphi(x_i) \leq \gamma_i$, $i \in I$. Положим $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, $\bar{\gamma} = \sum_{i \in I} \lambda_i \gamma_i$. Из слабой почти выпуклости следует $\varphi(\bar{x}) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2 \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \gamma_i + \kappa r^2 = \bar{\gamma} + \kappa r^2 = \mu$.

Отсюда $(\bar{x}, \mu) \in \text{epi } \varphi$. С другой стороны, $\|(\bar{x}, \bar{\gamma}) - (\bar{x}, \mu)\| \leq \kappa r^2$. Это и означает почти выпуклость с константой κ множества $\text{epi } \varphi$.

Лемма 3. Пусть функция φ удовлетворяет условию Липшица с константой L , $\text{epi } \varphi$ — почти выпуклое множество с константой κ . Тогда функция φ — слабо почти выпукла с константой $(\kappa + L\kappa)$.

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, $\gamma_i = \varphi(x_i)$, $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, $\bar{\gamma} = \sum_{i \in I} \lambda_i \gamma_i$.

Так как $(x_i, \gamma_i) \in \text{epi } \varphi$, то существует пара $(y, \mu) \in \text{epi } \varphi$ такая, что $\|(\bar{x}, \bar{\gamma}) - (y, \mu)\| \leq \kappa r^2$.

Отсюда $\|\bar{x} - y\| \leq \kappa r^2$, $\|\bar{\gamma} - \mu\| \leq \kappa r^2$. В результате получаем

$$\varphi(y) \leq \mu \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \kappa r^2.$$

В силу условия Липшица $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(y) + L\kappa r^2 \leq \bar{\gamma} + \kappa r^2 + L\kappa r^2$.

Лемма 4. Пусть функция φ — дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности множества K и $\kappa = \sup_{x \in K} \left\| \frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) \right\| < \infty$. Тогда φ — слабо почти выпукла с константой κ .

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, $r = \max_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$. По формуле Тейлора $\varphi(x_i) = \varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + o(\|x_i - \bar{x}\|)$, где $|o(\|x_i - \bar{x}\|)| \leq \kappa r^2$. Отсюда, так как

$$\left| \sum_{i \in I} \lambda_i o(\|x_i - \bar{x}\|) \right| \leq \sum_{i \in I} \lambda_i |o(\|x_i - \bar{x}\|)| \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \kappa r^2 = \kappa r^2,$$

то

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) = \varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x}) \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i - \bar{x} \right) + \sum_{i \in I} \lambda_i o(\|x_i - \bar{x}\|) \geq \varphi(\bar{x}) - \kappa r^2.$$

Пусть $f : E^n \rightarrow E^n$ — непрерывно дифференцируемая функция; U — выпуклый компакт в пространстве E^n ; $h > 0$ — число.

Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \min_{u \in U} \varphi(x + f(x)h + uh). \quad (4)$$

Лемма 5. Пусть φ удовлетворяет условию Липшица с константой L и является слабо почти выпуклой с константой κ ; $D = \sup_{x \in K} \left\| \frac{d^2}{dx^2} f(x) \right\|$. Тогда функция ψ — слабо почти выпукла с константой $\kappa + LDh$.

Доказательство. Пусть $x_i \in K$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, $r = \max_{i, j \in I} \|x_i - x_j\|$. По формуле Тейлора $f(x_i) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_i - \bar{x}) + o(\|x_i - \bar{x}\|)$, где $|o(\|x_i - \bar{x}\|)| \leq Dr^2$. Из (4) следует существование таких $u_i \in U$, что $\psi(x_i) = \varphi(x_i + f(x_i)h + u_i h)$. Поскольку U выпукло, то существует $\bar{u} \in U$ такое, что $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \bar{u}$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i \psi(x_i) &= \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i + f(\bar{x})h + f'_x(\bar{x})(x_i - \bar{x})h + o(\|x_i - \bar{x}\|)h + u_i h) \geq \\ &\geq \varphi(\bar{x} + f(\bar{x})h + o(\|x_i - \bar{x}\|)h + \bar{u}h) - \kappa r^2 \geq \\ &\geq \varphi(\bar{x} + f(\bar{x})h + \bar{u}h) - \kappa r^2 - DLhr^2. \end{aligned}$$

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД

Будем предполагать, что множество V — компакт, а функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_K на каждом компакте K . В этом случае функцию $\tilde{R}_\theta \Phi$ можно представить следующим образом.

Обозначим $R_h^m = \underbrace{R_h \dots R_h}_m$. Так же, как и в работе [2], доказывается

Теорема 2. $\tilde{R}_\theta \Phi = \sup_{mh=\theta} R_h^m \Phi$ и последовательность $\{R_h^m \Phi\}$, $m = 1, 2, \dots$

равномерно на каждом компакте сходится к функции $\tilde{R}_\theta \Phi$.

Обозначим χ_h оператор, который ставит в соответствие каждой непрерывной функции $\varphi(x)$ функцию $\psi(x) = \int_V \min_{u \in U} \varphi(x + f(x, u, v)h) \mu(dv)$.

В данном пункте рассмотрены вопросы приближения оператора \tilde{R}_t оператором χ_h^m , $mh = t$, где $\chi_h^m = \underbrace{\chi_h \dots \chi_h}_m$. Пусть K — компакт из E^n . По-

ложим

$$K(t_0) = \overline{\text{co}} \bigcup_{\substack{x \in K \\ t \in [0, t_0]}} \bigcup_{\substack{u(\cdot) \\ v(\cdot)}} z(t|u(\cdot), v(\cdot), x),$$

где объединение берется по всем измеримым функциям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ со значениями соответственно U и V . Так же, как и в работе [2], доказывается

Лемма 6. Существует константа $C_1 \geq 0$, зависящая только от $K(t_0)$, такая, что для всех $x \in K$, m и h таких, что $mh \leq t_0$, выполняется

$$|\chi_h^m \Phi(x) - R_h^m \Phi(x)| \leq C_1 h.$$

Из теоремы 2 и леммы 6 следует

Теорема 3. Последовательности функций $\{\chi_h^m \Phi, mh = t\}$ равномерно на каждом компакте сходятся к функции $\tilde{R}_t \Phi$, $t \in [0, t_0]$.

Теорема 4. Пусть $\Phi(x)$ слабо почти выпукла с константой κ на множестве $K(t_0)$, $t_0 \geq 0$. Тогда существует константа $C_2 \geq 0$, зависящая только от $K(t_0)$, такая, что для всех $t \leq t_0$ и $x \in K$ выполняется $|\tilde{R}_t \Phi(x) - \chi_t \Phi(x)| \leq C_2 t^2$.

Доказательство. Обозначим

$$F_1 = \max \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial z} f(z, u, v) \right\| : z \in K(t_0), u \in U, v \in V \right\},$$

F_2 — константа такая, что для всех $t \leq t_0$

$$\left\| z(t | u(\cdot), v(\cdot), x) - \left(x + \int_0^t f(x, u(\tau), v(\tau)) d\tau \right) \right\| \leq F_2 t^2,$$

$$F = F_1 F_2, \quad F_3 = 2 \max \left\{ \|f(z, u, v)\| : z \in K(t_0), u \in U, v \in V \right\}.$$

Поскольку функция $\Phi(x)$ ограничена снизу на компакте $K(t_0)$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(x)$ неотрицательна на $K(t_0)$.

Пусть m и h такие, что $mh = t$. Тогда справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \chi_h^m \Phi(x) &\geq \int_V \min_{u_1 \in U} \int_V \min_{u_2 \in U} \dots \int_V \min_{u_m \in U} \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \times \\ &\quad \times \mu(dv_m) \dots \mu(dv_2) \mu(dv_1) - Ft^2 \geq \\ &\geq \int_V \dots \int_V \min_{\substack{u_i \in U \\ i=1, \dots, m}} \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \mu(dv_m) \dots \mu(dv_1) - Ft^2 \geq \\ &\geq \int_V \min_{\substack{u_i \in U \\ i=1, \dots, m}} \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \mu(dv) - Ft^2 = \\ &= \int_V \min_{u \in U} \Phi(x + f(x, u, v)t) \mu(dv) - Ft^2 = \chi_t \Phi(x) - Ft^2, \\ \chi_h^m \Phi(x) &\leq \int_V \min_{u_1 \in U} \int_V \min_{u_2 \in U} \dots \int_V \min_{u_m \in U} \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i, v_i) h \right) \times \\ &\quad \times \mu(dv_m) \dots \mu(dv_2) \mu(dv_1) + Ft^2 = \\ &= \min_{\substack{u_i(v_1, \dots, v_i) \\ i=1, \dots, m}} \int_V \dots \int_V \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i(v_1, \dots, v_i), v_i) h \right) \mu(dv_m) \dots \mu(dv_1) + Ft^2 \leq \\ &\leq \min_{\substack{u_i(v_i) \\ i=1, \dots, m}} \int_V \dots \int_V \Phi \left(x + \sum_{i=1}^m f(x, u_i(v_i), v_i) h \right) \mu(dv_m) \dots \mu(dv_1) + Ft^2 \leq \\ &\leq \min_{\substack{u(v_i) \\ i=1, \dots, m}} \int_V \dots \int_V \frac{h}{t} [\Phi(x + f(x, u(v_1), v_1)t) + \dots + \Phi(x + f(x, u(v_m), v_m)t)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \mu(dv_m) \dots \mu(dv_1) + \kappa F_3^2 t^2 + F t^2 = \\ & = \min_{u(v)} \int_V \Phi(x + f(x, u(v), v)t) \mu(dv) + (\kappa F_3^2 + F) t^2 = \\ & = \chi_t \Phi(x) + (\chi F_3^2 + F) t^2. \end{aligned}$$

Здесь минимумы по $u_i(v_1, \dots, v_i)$ и $u(v)$ берутся по всем измеримым отображениям со значениями в U .

Из полученных неравенств, произвольности m и h , а также теоремы 3 следует справедливость теоремы 4.

Предположение 1. Существуют константы $t_0 > 0$ и $\kappa \geq 0$ такие, что функции $\chi_h^k \Phi$ слабо почти выпуклые на K для всех k и h таких, что $kh \leq t_0$.

Теорема 5. Пусть выполняется предположение 1, тогда существует константа $C_3 \geq 0$ такая, что для всех $t \leq t_0$, m и h , $mh = t$, $x \in K$ выполняется

$$\left| \tilde{R}_t \Phi(x) - \chi_h^m \Phi(x) \right| \leq C_3 h.$$

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\tilde{R}_h \Phi(x) \leq \chi_h \Phi(x) + C_2 h^2$. Отсюда

$$\tilde{R}_{2h} \Phi(x) \leq \tilde{R}_h (\chi_h \Phi(x) + C_2 h^2) = \tilde{R}_h \chi_h \Phi(x) + C_2 h^2 \leq \chi_h^2 \Phi(x) + 2C_2 h^2.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\tilde{R}_t \Phi(x) \leq \chi_h^m \Phi(x) + C_2 t h \leq \chi_h^m \Phi(x) + C_2 t_0 h.$$

Аналогично доказывается неравенство в другую сторону.

Приведем случай дифференциальной игры, для которой выполняется предположение 1.

Предположение 2. Функция f имеет вид $f(z, u, v) = f_1(z, v) + f_2(u, v)$. Функция $\Phi(x)$ слабо почти выпуклая с константой κ на множестве $K(t_0)$ и

$$\max_{\substack{z \in K(t_0) \\ v \in V}} \left\| \frac{\partial^2}{\partial z^2} f_1(z, v) \right\| \leq D.$$

Теорема 6. Из предположения 2 следует предположение 1.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что функция $\chi_h \Phi(x)$ слабо почти выпукла на множестве K с константой $(\kappa + DL_{K(t_0)} h)$. Продолжая процесс, нетрудно увидеть, что функция $\chi_h^k \Phi(x)$ слабо почти выпукла на K с константой

$$\kappa + DL_{K(t_0)} k h \leq \kappa + DL_{K(t_0)} t_0.$$

Почти выпуклость служит обобщением понятия выпуклости функции. Для линейного случая можно ограничиться обычной выпуклостью для функций.

Предположение 3. Функция f имеет вид $f(z, u, v) = A(v)z + B(u, v)$, где $A(v)$ — матрица, непрерывная по v ; $B(u, v)$ — непрерывная функция; $\varphi(x)$ — выпуклая функция.

Лемма 7. Пусть функция $\varphi(x, u)$ выпукла по совокупности переменных; $u \in U$, U — выпуклый компакт. Тогда функция $\psi(x) = \min_{u \in U} \varphi(x, u)$ является выпуклой по x .

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in E^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Существует u_i , $i = 1, 2$, такие, что $\psi(x_i) = \varphi(x_i, u_i)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_1 \psi(x_1) + \lambda_2 \psi(x_2) &= \lambda_1 \varphi(x_1, u_1) + \lambda_2 \varphi(x_2, u_2) \geq \\ &\geq \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geq \min_{u \in U} \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, u) = \psi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), \end{aligned}$$

что и означает выпуклость функции $\psi(x)$.

Из леммы 7 и того, что $B(U, v)$ — выпуклый компакт, следует

Теорема 7. При выполнении предположения 3 функция $\chi_h \Phi(x)$ выпукла.

Рассмотрим построение стратегии игрока P , решающую приближенно дифференциальную игру. Предположим, что выполняется предположение 1 и $\theta \leq t_0$, $mh = \theta$.

На первом шаге игрок P знает начальную позицию z_0 и строит функцию $u_{z_0}(v)$ как решение задачи минимизации

$$\min_{u \in U} \chi_h^{m-1} \Phi(z_0 + f(z_0, u, v)h) = \chi_h^{m-1} \Phi(z_0 + f(z_0, u_{z_0}(v), v)h).$$

Поскольку таких решений может быть много, то выбираем в качестве $u_{z_0}(v)$ минимальное в лексикографическом смысле. Если помеха имеет конкретную реализацию v^* на некотором подынтервале $[\tau_1, \tau_2) \subset [0, h]$, то игрок P выбирает на $[\tau_1, \tau_2)$ управление $u_{z_0}(v^*)$. Пусть $v(t)$, $t \in [0, h)$ — функция, составленная из реализаций помехи на интервале $[0, h)$; $u(t)$ — соответствующее управление игрока P . Обозначим $z_1 = z(h | u(\cdot), v(\cdot), z_0)$. На k -м шаге игрок P знает позицию z_{k-1} и строит функцию $u_{z_{k-1}}$ как решение задачи минимизации

$$\min_{u \in U} \chi_h^{m-k} \Phi(z_{k-1} + f(z_{k-1}, u, v)h) = \chi_h^{m-k} \Phi(z_{k-1} + f(z_{k-1}, u_{z_{k-1}}(v), v)h).$$

Как и ранее, $u_{z_{k-1}}(v)$ — решение минимальное в лексикографическом смысле. Пусть $v(t)$, $t \in [(k-1)h, kh)$ — функция, составленная из реализаций помехи на интервале $[(k-1)h, kh)$; $u(t)$ — соответствующее управление игрока P . Положим $u_k(t) = u(t - (k-1)h)$, $v_k(t) = v(t - (k-1)h)$, $t \in [(k-1)h, kh)$, $z_k = z(h | u_k(\cdot), v_k(\cdot), z_{k-1})$ и продолжим процесс. Обозначим построенную таким образом стратегию игрока P через Γ_P^h .

Пользуясь теоремой 5 и аппаратом, разработанным в работах [2, 4], получаем следующий результат.

Теорема 8. Существуют константа $C_4 \geq 0$ и для каждого h стратегия Γ_P^h такие, что для любого ω

$$M_{\omega} \Phi(z(\theta | \Gamma_P^h, z_0)) \leq \tilde{R}_{\theta} \Phi(z_0) + C_4 h.$$

Игрок E в качестве разбиения может выбрать равномерное разбиение $\omega_h = \{0 < h < 2h < \dots < mh = \theta\}$. Из теоремы 5 следует

Теорема 9. Существует константа $C_5 \geq 0$ такая, что для любой стратегии Γ_P игрока P

$$M_{\omega_h} \Phi(z(\theta | \Gamma_P, z_0)) \geq \tilde{R}_{\theta} \Phi(z_0) - C_5 h.$$

ВЫВОДЫ

Построены приближенные методы решения дифференциальной игры со случайной помехой, которые позволяют аппроксимировать гарантированные выигрыши убегающего и догоняющего игроков, а также строить соответствующие стратегии.

При определенных предположениях получены оценки близости точного и приближенного решений. Эти результаты можно развить на ситуации, когда помеха описывается некоторым случайным процессом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1969. — **184**, № 2. — С. 285–287.
2. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наук. думка, 1992. — 260 с.
3. Остапенко В.В., Тимошенко О.М. Методы решения дифференциальных игр при различных стратегиях игроков // Докл. НАН Украины. — 1995. — № 6. — С. 5–7.
4. Остапенко В.В. Приближение основного оператора в дифференциальных играх с фиксированным временем окончания // Кибернетика. — 1984. — № 1. — С. 85–89.
5. Ушаков В.Е. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальных играх сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. — 1980. — № 4. — С. 29–36.
6. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. — 295 с.

Поступила 19.03.2004