УДК 519.873

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧНОСТИ ЧАСТИЧНОГО КАЛЕНДАРНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО–ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, Р.А. ПРИХОДЬКО

Построена математическая модель и найдены приближенные значения стационарных характеристик надежности последовательно-параллельной системы с частичным календарным техническим обслуживанием ее последовательной части. Определены оптимальные сроки проведения технического обслуживания.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из серьезных проблем надежности функционирования технических систем — организация технического обслуживания (ТО). Модели и стратегии ТО одно- и двухкомпонентных систем достаточно изучены [1–4]. Многокомпонентные системы исследованы меньше из-за своей размерности и сложной структуры. Классы моделей и методов исследования таких систем описаны в работах [3–6].

В данной статье рассматривается многокомпонентная система, имеющая следующую функциональную структуру: часть элементов соединена последовательно, остальные — параллельно. Распределения времен безотказной работы элементов и их восстановления предполагаются общего вида. В некоторый момент времени после начала работы проводится предупредительное ТО (полное обновление) элементов только последовательной части системы. Находятся стационарные характеристики функционирования системы: стационарный коэффициент готовности, средняя прибыль за единицу времени и средние затраты за единицу времени исправного функционирования системы. Определяются моменты проведения ТО для достижения оптимальных значений указанных критериев качества функционирования системы.

Для решения задачи привлекается аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Приближенные значения стационарных характеристик системы находятся с помощью метода, основанного на алгоритме фазового укрупнения [7, 8].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система состоит из $N+M$ технологических ячеек (ТЯ), из которых N ТЯ соединены последовательно, а M — параллельно. Время безотказной работы i-й ТЯ из последовательной цепочки — случайная величина (СВ) α_i^p

с функцией распределения (ФР) $F_i^p(t) = P(\alpha_i^p \le t)$, $i = \overline{1, N}$, время безотказной работы *j*-й ТЯ из параллельной части системы — СВ α_j с ФР $F_j(t) = P(\alpha_j \le t)$, $j = \overline{1, M}$. Индикация отказа ТЯ происходит мгновенно и восстановление (аварийное) *i*-й ТЯ из последовательной части системы длится случайное время β_i^p с ФР $G_i^p(t) = P\ (\beta_i^p \le t)$, $i = \overline{1, N}$, а восстановление *j*-й ТЯ из параллельной части — случайное время β_j с ФР $G_j(t) = P(\beta_j \le t)$, $i = \overline{1, M}$.

Отказ системы наступает либо в результате отказа любой ТЯ из последовательной цепочки, либо в результате отказа всех ТЯ, соединенных параллельно. При отказе системы работоспособные ТЯ отключаются. После возобновления работы отключенные ТЯ включаются в работу с теми же характеристиками безотказности, с которыми их застал отказ.

В момент начала работы системы (нулевой момент времени) планируется проведение предупредительного ТО последовательной части системы через время, получаемое как реализация СВ γ с ФР $\Phi(t) = P(\gamma \le t)$. При этом ТО проводится только в том случае, если система находится в работоспособном состоянии. В противном случае ТО откладывается на время γ. Длительность проведения ТО — СВ ζ с ФР $\Psi(t) = P(\zeta \le t)$. В момент окончания ТО последующее ТО перепланируется. Предполагается, что после проведения любой из восстановительных работ ТЯ полностью обновляются. СВ α_i^p, β_i^p, $i = \overline{1, N}$, α_i, β_i, $i = \overline{1, M}$, γ, ζ предполагаются независимыми в совокупности, имеющими соответствующие плотности распределения $f_i(t)$, $f_i^p(t)$, $g_i^p(t)$, $g_i(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, конечные математические ожидания $M\alpha_i^p$, $M\beta_i^p$, $M\alpha_i$, $M\beta_i$, $M\gamma$, $M\zeta$ и дисперсии.

Требуется определить следующие стационарные характеристики системы при условии быстрого восстановления ее элементов: среднюю наработку на отказ T_+, среднее время восстановления T_-, коэффициент готовности *К*г, среднюю прибыль *S* за единицу календарного времени, средние затраты *C* за единицу времени исправного функционирования системы; оптимальные моменты времени проведения ТО последовательной цепочки ТЯ для достижения наилучших значений показателей функционирования системы *К*г, S, C.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ

Построим полумарковскую модель рассматриваемой системы. Введем следующую кодировку физических состояний ТЯ: 1 — ТЯ находится в работоспособном состоянии, 0 — в отказовом. Кодами физических состояний системы будут совокупности двух двоичных векторов $\overline{d}$ и $\overline{b}$. Компоненты *N*-мерного вектора $\overline{d}$ описывают состояния ТЯ из последовательной части, а компоненты *M*-мерного вектора $\overline{b}$ — состояния ТЯ из параллельной части системы.

Фазовое пространство полумарковских состояний рассматриваемой системы S имеет вид

$$E=\left\{i\bar{d}\,\bar{x}^{(i)}\bar{b}\,\bar{y}z,\ i=\overline{1,N};\ \ \bar{d}\,\bar{x}\,j\bar{b}\,\bar{y}^{(j)}z,\ \ j=\overline{1,M};\ \ 0\bar{d}\,\bar{x}\bar{b}\,\bar{y},\ \ k\bar{y},k=0,1\right\},$$

где $i\,(j)$ — номер ТЯ, изменившей свое состояние последней; $\bar{x}=$ $=(x_1,...,x_N)$, x_k — время, оставшееся до ближайшего изменения состояния k-й последовательной ТЯ, $k=\overline{1,N}$; $\bar{y}=(y_1,...,y_M)$, y_k — время, оставшееся до ближайшего изменения состояния k-й параллельной ТЯ, $k=\overline{1,M}$; $\bar{x}^{(i)}$, $\bar{y}^{(j)}$ — векторы, у которых соответственно i-я и j-я компоненты равны нулю; z — время до ближайшего планового момента проведения ТО. Кодом $0\bar{y}$ обозначено начало ТО, $1\bar{y}$ — начало работы системы после ТО, $0\bar{d}\,\bar{x}\bar{b}\,\bar{y}$ — наступление планового момента ТО, которое не проводится из-за нахождения системы в отказе.

Для нахождения приближенных значений стационарных характеристик используем метод, основанный на алгоритме фазового укрупнения [7, 8].

Предположим, что времена аварийного восстановления ТЯ и длительность ТО зависят от некоторого малого параметра ε так, что для $\beta_i^p=$ $=\beta_i^{p,\varepsilon}$, $\beta_j=\beta_j^{\varepsilon}$, $\zeta=\zeta^{\varepsilon}$ справедливы предельные равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M\beta_i^{p,\varepsilon}=$ $=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M\beta_j^{\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}M\zeta^{\varepsilon}=0$.

В дальнейшем для упрощения записи формул параметр ε будем опускать. В качестве опорной системы S_0 рассмотрим систему, в которой ТО и аварийное восстановление ТЯ проводятся мгновенно. Опорная система имеет пространство состояний

$$E_0=\left\{i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z,\ \ i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z,\ i=\overline{1,N};\right.$$

$$\left.\bar{1}\bar{x}\,j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z,\ \bar{1}\bar{x}\,j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z,\ \ j=\overline{1,M},\ 0\bar{y},\ 1\bar{y}\right\},$$

где $\bar{1}$ — вектор, все компоненты которого равны 1; $\bar{1}^{(i)}$ ($\bar{1}^{(j)}$) — вектор, у которого i-я (j-я) компонента равна 0, остальные — 1.

Времена пребывания опорной системы в состояниях (см. рисунок) определяются формулами

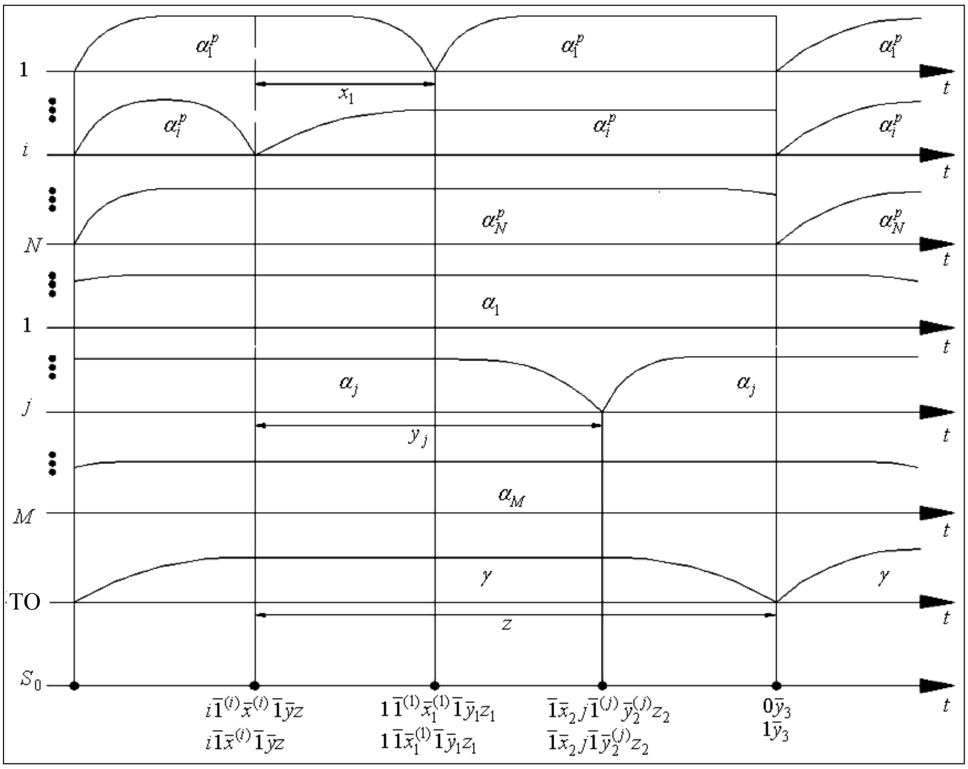
$$\theta_{1\bar{y}}=\bigwedge_{i=1}^{N}\alpha_i^p\wedge\gamma\wedge y_{\min},\ \ \theta_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z}=\alpha_i^p\wedge x_{\min}^i\wedge y_{\min}\wedge z,\quad i=\overline{1,N};$$

$$\theta_{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z}=x_{\min}\wedge\alpha_j\wedge y_{\min}^j\wedge z,\quad j=\overline{1,M},$$

где $\wedge$ — знак минимума;

$$x_{\min}=\bigwedge_{i=1}^{N}x_i;\ \ x_{\min}^i=\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}x_l;\ \ y_{\min}=\bigwedge_{j=1}^{M}y_i;\ \ y_{\min}^j=\bigwedge_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M}y_l.$$

Состояния $0\bar{y}$, $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z$, $\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z$ являются мгновенными.



Временная диаграмма функционирования опорной системы

Определим вероятности переходов вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{\xi_n^0,\ n\ge 0\}$ полумарковского процесса (ПМП), описывающего функционирование опорной системы.

1. Из состояний $0\bar{y}$, $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z$, $\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z$ система с вероятностью 1 переходит соответственно в состояния $1\bar{y}$, $i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z$, $\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z$.

2. Из состояния $1\bar{y}$ система переходит в одно из состояний $0(\bar{y}-\bar{t})$, $i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}(\bar{y}-\bar{t})z$, $\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}'^{(j)}z$ в зависимости от значения $\bigwedge\limits_{i=1}^{N}\alpha_i^p\wedge\gamma\wedge$ $\wedge\, y_{\min}$:

а) если $\gamma<\bigwedge\limits_{i=1}^{N}\alpha_i^p\wedge y_{\min}$, тогда $p_{1\bar{y}}^{0(\bar{y}-\bar{t})}=\varphi(t)\prod\limits_{i=1}^{N}\bar{F}_i^p(t)$, $t<y_{\min}$;

б) если $\alpha_i^p<\bigwedge\limits_{\substack{l=1\\l\ne i}}^{N}\alpha_l^p\wedge y_{\min}\wedge\gamma$, тогда $p_{1\bar{y}}^{i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}(\bar{y}-\bar{t})z}=f_i^p(t)\prod\limits_{\substack{l=1\\l\ne i}}^{N}f_l^p\times$ $\times(t+x_l)\varphi(t+z)$, $x_l>0$, $z>0$, $t<y_{\min}$, $i=\overline{1,N}$;

в) если $y_j<\bigwedge\limits_{i=1}^{N}\alpha_i^p\wedge y_{\min}^j\wedge\gamma$, тогда $p_{1\bar{y}}^{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}'^{(j)}z}=\prod\limits_{i=1}^{N}f_i^p(x_i+y_j)\times$ $\times\varphi(y_j+z)$, $y_l'=y_l-y_j$, $l=\overline{1,M}$, $x_i,z>0$, $j=\overline{1,M}$.

3. Из состояния $i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z$, $i=\overline{1,N}$ система переходит в состояния $i\bar{1}^{(i)}(\bar{x}-\bar{t})^{(i)}\bar{1}(\bar{y}-\bar{t})(z-t)$, $j\bar{1}^{(j)}\overline{x'}^{(j)}\bar{1}\overline{y'}z'$, $j\neq i$, $\bar{1}\overline{x'}j\bar{1}^{(j)}\overline{y'}^{(j)}z'$, $0\overline{y'}$:

а) если $\alpha_i^p < x_{\min}^i \wedge y_{\min} \wedge z$, тогда $p_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z}^{i\bar{1}^{(i)}(\bar{x}-\bar{t})^{(i)}\bar{1}(\bar{y}-\bar{t})(z-t)} = f_i^p(t)$, $t < < x_{\min}^i \wedge y_{\min} \wedge z$;

б) если $x_j = x_{\min}^i < \alpha_i^p \wedge y_{\min} \wedge z$, тогда $p_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z}^{j\bar{1}^{(j)}\overline{x'}^{(j)}\bar{1}\overline{y'}(z-x_j)} = f_i^p(t+x_j)$, $x'_i = t$, $x'_l = x_l - x_j$, $l=\overline{1,N}$, $l\neq i,j$, $y'_l = y_l - x_j$, $l=\overline{1,M}$, $t>0$;

в) если $y_j = y_{\min} < \alpha_i^p \wedge x_{\min}^i \wedge z$, тогда $p_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z}^{\bar{1}\overline{x'}j\bar{1}^{(j)}\overline{y'}^{(j)}(z-y_j)} = f_i^p(t+y_j)$, $x'_i = t$, $x'_l = x_l - y_j$, $l=\overline{1,N}$, $l\neq i$, $y'_l = y_l - y_j$, $l=\overline{1,M}$, $l\neq j$, $t>0$;

г) если $z < \alpha_i^p \wedge x_{\min}^i \wedge y_{\min}$, тогда $P_{i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z}^{0\overline{y'}} = \bar{F}_i^p(z)$, $y'_l = y_l - z$, $l=\overline{1,M}$.

4. Из состояния $\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z$, $j=\overline{1,M}$ система может перейти в состояния $\bar{1}\bar{x}'j\bar{1}^{(j)}\bar{y}'^{(j)}z'$, $i\bar{1}^{(i)}\overline{x'}^{(i)}\bar{1}\overline{y'}z'$, $\bar{1}\overline{x'}i\bar{1}^{(i)}\overline{y'}^{(i)}z'$, $i\neq j$, $0\overline{y'}$:

а) если $\alpha_j < x_{\min} \wedge y_{\min}^j \wedge z$, тогда $p_{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z}^{\bar{1}\bar{x}'j\bar{1}^{(j)}\bar{y}'^{(j)}(z-t)} = f_j(t)$, $t < x_{\min} \wedge \wedge y_{\min}^j \wedge z$, $x'_l = x_l - t$, $l=\overline{1,N}$, $y'_l = y_l - t$, $l=\overline{1,M}$, $l\neq j$;

б) если $x_i = x_{\min} < \alpha_j \wedge y_{\min}^j \wedge z$, тогда $p_{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z}^{i\bar{1}^{(i)}\overline{x'}^{(i)}\bar{1}\overline{y'}z'} = f_j(t+x_i)$, $x'_l = = x_l - x_i$, $l=\overline{1,N}$, $l\neq i$, $y'_l = y_l - x_i$, $l=\overline{1,M}$, $l\neq j$, $z' = z - x_i$, $t>0$;

в) если $y_i = y_{\min}^j < \alpha_j \wedge x_{\min} \wedge z$, тогда $p_{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z}^{\bar{1}\overline{x'}i\bar{1}^{(i)}\overline{y'}^{(i)}z'} = f_j(t+y_i)$, $x'_l = = x_l - y_i$, $l=\overline{1,N}$, $y'_j = t$, $y'_l = y_l - y_i$, $l=\overline{1,M}$, $l\neq i,j$, $t>0$;

г) если $z < \alpha_j \wedge x_{\min} \wedge y_{\min}^j$, тогда $p_{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z}^{0\bar{y}'} = f_j(t+z)$, $y_j = t$, $y'_l = = y_l - z$, $l=\overline{1,M}$, $l\neq j$, $t>0$.

НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Фазовое пространство системы E разобьем на два непересекающихся подмножества E_+ (работоспособных состояний) и E_- (отказовых состояний). Найдем приближенные значения следующих стационарных характеристик системы: T_+, T_-, Kг, S, C. Значения перечисленных характеристик найдем по формулам [8–10].

$$T_+ \approx \frac{\int\limits_{E_+} m(x)\rho(dx)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx)P(x,E_-)}, T_- \approx \frac{\int\limits_{E_-} m(x)\rho(dx)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx)P(x,E_-)}, \; K\text{г} = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{1}$$

$$S \approx \frac{\int\limits_E m(x) f_S(x) \rho(dx)}{\int\limits_E m(x)\rho(dx)}, \; C \approx \frac{\int\limits_E m(x) f_C(x) \rho(dx)}{\int\limits_{E_+} m(x)\rho(dx)}, \qquad (2)$$

где $\rho(\bullet)$ — стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ опорной системы; $m(x)$ — средние времена пребывания в состояниях исходной системы; $P(x, E_-)$ — вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \geq 0\}$ исходной системы из работоспособных состояний в отказовые; $f_S(x)$ ($f_C(x)$) — функции, определяющие доход (затраты) в каждом состоянии.

Начнем с нахождения стационарного распределения ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$. Система интегральных уравнений для стационарных плотностей $\rho(\bullet)$ имеет вид

$$\rho(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z) = \sum_{\substack{j=1 \\ x_i=0}}^{N} \int\limits_0^\infty f_j^p(t+x_j)\rho\Big(j\overline{1}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(j)}\,\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})(z+t)\Big)dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int\limits_0^\infty f_j(t+y_j)\rho\Big(\overline{1}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})j\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})^{(j)}(z+t)\Big)dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty f_i^p(t)\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{N} f_l^p(t+x_l)\varphi(z+t)\rho(1(\overline{y}+\overline{t}))dt, \; i=\overline{1,N},$$

$$\rho(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{x}^{(j)}z) = \sum_{\substack{l=1 \\ y_j=0}}^{M}\int\limits_0^\infty f_l\;(t+y_l)\rho\Big(\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})l\overline{1}(\overline{y}^{(j)}+\overline{t})^{(l)}(z+t)\Big)dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^\infty f_i^p(x_i+t)\rho\Big(i\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})^{(i)}\,\overline{1}(\overline{y}^{(j)}+\overline{t})(z+t)\Big)dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty \varphi(t+z)\prod_{i=1}^{N} f_i^p(t+x_i)\rho(1(\overline{y}^{(j)}+\overline{t}))\,dt, \; j=\overline{1,M},$$

$$\rho(0\overline{y}) = \int\limits_0^\infty \varphi(t)\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^p(t)\rho(1(\overline{y}+\overline{t}))\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{R_+^{N,i}} d\overline{x}^{(i)}\int\limits_0^\infty \overline{F}_i(t)\rho\Big(i\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})^{(i)}\,\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})t\Big)dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int\limits_0^\infty f_j(t+y_j)dt\int\limits_{R_+^N}\rho\Big(\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})j\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})^{(j)}t\Big)d\overline{x},$$

$$\rho(0\overline{y}) = \rho(1\overline{y}), \;\; \rho\Big(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z\Big) = \rho\Big(i\overline{1}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z\Big),$$

$$\rho\left(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{y}^{(j)}z\right)=\rho\left(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}\,\overline{y}^{(j)}z\right),$$

$$2\left[\int\limits_{R_+^M}\rho(0\overline{y})d\overline{y}+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{R_+^{N,i}}d\overline{x}^{(i)}\int\limits_{R_+^M}d\overline{y}\int\limits_0^{\infty}\rho(i\overline{1}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)dz+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{R_+^N}d\overline{x}\int\limits_{R_+^{M,j}}d\overline{y}^{(j)}\int\limits_0^{\infty}\rho(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}\,\overline{x}^{(i)}z)dz\right]=1, \qquad (3)$$

где R_+^N (R_+^M) — $N(M)$-мерные ортанты векторов с неотрицательными компонентами; $R_+^{N,i}=\{\overline{x}^{(i)},\ x_k\ge 0,\ k=\overline{1,N}\}$, $R_+^{M,j}=\{\overline{y}^{(j)}\ge 0,\ l=\overline{1,M}\}$.

Покажем, что решения системы (3) определяются формулами

$$\begin{cases}\rho(i\overline{1}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)=\rho(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)=\\ =\rho_0\prod\limits_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)\int\limits_0^{\infty}h_i^p(t)\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{N}v_l^p(t,x_l)\varphi(z+t)dt,\ i=\overline{1,N},\\ \rho(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}\,\overline{y}^{(j)}z)=\rho(\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{y}^{(j)}z)=\\ =\rho_0\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\ne j}}^{M}\overline{F}_l(y_l)\int\limits_0^{\infty}\prod\limits_{i=1}^{N}v_i^p(t,x_i)\varphi(z+t)dt,\ i=\overline{1,M},\\ \rho(0\overline{y})=\rho(1\overline{y})=\rho_0\prod\limits_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j),\\ \rho_0=\dfrac{1}{2}\left[\prod\limits_{l=1}^{M}M\alpha_l\left(1+\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt+M\gamma\sum\limits_{j=1}^{M}\dfrac{1}{M\alpha_j}\right)\right]^{-1},\end{cases} \qquad (4)$$

где $\overline{F}_j(t)=1-F_j(t)$; $\overline{\Phi}(t)=1-\Phi(t)$; $h_i^p(t)$ — плотность функции восстановления $H_i^p(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_i^{p*(n)}(t)$ рекуррентного потока, порожденного СВ α_i^p; $v_i^p(t,x_i)$ — плотность функции распределения прямого остаточного времени восстановления.

В дальнейших преобразованиях будем использовать следующие тождества:

$$\prod_{i=1}^{N}f_i^p(x_i+t)\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(t+y_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{t}h_i^p(\tau)f_i^p(t-\tau+x_i)\prod_{\substack{l=1\\ l\ne i}}^{N}v_l^p(\tau,x_l+t-\tau)\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(t-\tau+y_j)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t f_j\,(t-\tau+y_j)\prod_{i=1}^{N}v_i^p(\tau,x_i+t-\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\overline{F}_l(t-\tau+y_l)d\tau=$$

$$=\prod_{i=1}^{N}v_i^p(t,x_i)\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j),\quad y_j,x_i,t\geq 0\,, \tag{5}$$

$$\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(t)\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(t+y_j)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t h_i^p(t-\tau)\overline{F}_i^{\,p}(\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^{\,p}(t-\tau,\tau)\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(\tau+y_j)d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t f_j\,(\tau+y_j)\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t-\tau,\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\overline{F}_l(\tau+y_l)d\tau=\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j),\ \ y_j,t\geq 0\,, \tag{6}$$

$$\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(t)\prod_{j=1}^{M}\int_t^{\infty}\overline{F}_j(s)ds+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t h_i^p(t-\tau)\overline{F}_i(\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^{\,p}(t-\tau,\tau)d\tau\prod_{j=1}^{M}\int_\tau^{\infty}\overline{F}_j(s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \overline{F}_j(\tau)\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t-\tau,\tau)d\tau\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_\tau^{\infty}\overline{F}_l(s)ds=\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j,\ \ t\geq 0\,, \tag{7}$$

$$\prod_{i=1}^{N}f_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{F}_l^{\,p}(t)\prod_{j=1}^{M}\int_t^{\infty}\overline{F}_j(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\int_0^t h_l^p(t-\tau)\overline{F}_l^{\,p}(\tau)v_i^p(t-\tau,\tau)\prod_{\substack{m=1\\m\neq l,i}}^{N}\overline{V}_m^{\,p}(t-\tau,\tau)d\tau\prod_{j=1}^{M}\int_\tau^{\infty}\overline{F}_j(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^t h_i^p(t-\tau)f_i^p(\tau)\prod_{\substack{m=1\\m\neq i}}^{N}\overline{V}_m^{\,p}(t-\tau,\tau)d\tau\prod_{j=1}^{M}\int_\tau^{\infty}\overline{F}_j(s)ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\int_0^t v_i^p(t-\tau,\tau)\overline{F}_j(\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^{\,p}(t-\tau,\tau)\,d\tau\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_\tau^{\infty}\overline{F}_l(s)\,ds=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}h_i^p(t)\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j,\ \ t\geq 0, \tag{8}$$

где $\overline{V}_i^{\,p}(t,z)=\int_z^{\infty}v_i^p(t,s)ds$ — нестационарный коэффициент оперативной готовности [1] i-й ТЯ, т.е. вероятность того, что ячейка, работающая к моменту t, не откажет на промежутке $(t,t+z]$.

Тождество (5) следует из формулы интегрирования по частям определенного интеграла с учетом того, что $\frac{d}{d\tau} v_i^p(\tau, x_i + t - \tau) = h_i^p(\tau) \times$ $\times f_i^p(t - \tau + x_i)$, $v_i^p(0, x_i + t) = f_i^p(x_i + t)$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i^p(\tau) f_i^p(t - \tau + x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} v_l^p(\tau, x_l + t - \tau) \prod_{j=1}^{M} \overline{F}_j(t - \tau + y_j) \, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \int_0^t f_j(t - \tau + y_j) \prod_{i=1}^{N} v_i^p(\tau, t - \tau + x_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{M} \overline{F}_l(t - \tau + y_l) \, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{d\tau} \left(\prod_{i=1}^{N} v_i^p(\tau, t - \tau + x_i) \prod_{j=1}^{M} \overline{F}_j(t - \tau + y_j) \right) d\tau =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} v_i^p(t, x_i) \prod_{j=1}^{M} \overline{F}_j(y_j) - \prod_{i=1}^{N} f_i^p(x_i + t) \prod_{j=1}^{M} \overline{F}_j(t + y_j).$$

Если проинтегрировать обе части равенства (5) по ортанту R_+^N, то получим тождество (6). Интегрирование обеих частей тождества (6) по ортанту R_+^M приводит к тождеству (7).

Если в тождестве (5) последовательно положить $x_i = 0$, $i = \overline{1, N}$, проинтегрировать обе части полученных тождеств соответственно по ортанту $R_+^{N,i}$ и R_+^M и почленно сложить полученные равенства, то получим тождество (8).

Непосредственная подстановка с учетом тождества (5) показывает, что формулы (4) определяют решение первых N уравнений системы (3).

$$\rho_0 \sum_{\substack{j=1 \\ x_i=0}}^{N} \int_0^\infty f_j^p(t + x_j) \prod_{k=1}^{M} \overline{F}_k(t + y_k) dt \int_0^\infty h_i^p(s) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} v_l^p(s, t + x_l) \varphi(s + z + t) ds +$$

$$+ \rho_0 \sum_{j=1}^{M} \int_0^\infty f_j(t + y_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M} \overline{F}_k(t + y_k) dt \int_0^\infty \prod_{\substack{l=1 \\ x_i=0}}^{N} v_l^p(s, x_l + t) \varphi(s + z + t) ds +$$

$$+ \rho_0 \int_0^\infty f_i^p(t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} f_l^p(t + x_l) \varphi(z + t) \prod_{j=1}^{M} \overline{F}_j(t + y_j) \, dt =$$

$$= \rho_0 \int_0^\infty \varphi(z + \tau) \left[\sum_{\substack{j=1 \\ x_i=0}}^{N} \int_0^\tau h_j^p(\tau - t) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{N} v_l^p(\tau - t, t + x_l) f_j^p(t + x_j) \prod_{k=1}^{M} \overline{F}_k(t + y_k) \, dt + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\tau}\prod_{\substack{l=1\\x_i=0}}^{N} v_l^p(\tau-t,x_l+t)f_j(t+y_j)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M}\overline{F}_k(t+y_k)dt+$$

$$\left.+\prod_{\substack{l=1\\x_i=0}}^{N} f_l^p(t+x_l)\prod_{k=1}^{M}\overline{F}_j(\tau+y_k)\right]d\tau=$$

$$=\rho_0\prod_{k=1}^{M}\overline{F}_k(y_k)\int_0^{\infty}h_i^p(\tau)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}v_l^p(\tau,x_l)\varphi(z+\tau)\,d\tau=\rho(i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z).$$

Аналогично можно убедиться, что формулы (4) определяют решения остальных уравнений системы (3). Значения постоянной ρ_0 находятся из условия нормировки.

Найдем приближенные значения стационарных характеристик рассматриваемой системы по формулам (1) и (2). В подмножество работоспособных состояний E_+ попадают эргодические состояния опорной системы $1\overline{y}$, $i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z$, $i=\overline{1,N}$; $\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\overline{y}^{(j)}z$, $\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z$, $j=\overline{1,M}$, а в подмножество отказовых состояний E_- — эргодические состояния $0\overline{y}$, $i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z$, $i=\overline{1,N}$. Средние времена пребывания реальной системы в эргодических состояниях опорной системы определяются формулами

$$m(1\overline{y})=\int_0^{y_{\min}}\overline{\Phi}(t)\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(t)dt\,,\quad m(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z)=\int_0^{x^i_{\min}\wedge y_{\min}\wedge z}\overline{F}_i^{\,p}(t)dt\,,$$

$$m(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\overline{y}^{(j)}z)=\int_0^{x_{\min}\wedge y^j_{\min}\wedge z}\overline{G}_j(s)ds\,,\quad m(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z)=\int_0^{x_{\min}\wedge y^j_{\min}\wedge z}\overline{F}_j(t)dt\,,$$

$$m(0\overline{y})=\int_0^{y_{\min}}\overline{\Psi}(t)dt\,,\quad m(i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z)=\int_0^{z}\overline{G}_i^{\,p}(s)ds\,.$$

Вычислим функционал в числителе первой дроби формул (1), используя тождество (7).

$$\int_{E_+}m(x)\rho(dx)=\int_{R_+^M}\rho(1\overline{y})\,m(1\overline{y})d\overline{y}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}dz\int_{R_+^{N,i}}d\overline{x}^{(i)}\int_{R_+^M}\rho(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z)m(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z)d\overline{y}+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\infty}dz\int_{R_+^N}d\overline{x}\int_{R_+^{M,j}}\rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z)m(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z)d\overline{y}^{(j)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_{0}^{\infty}dz\int_{R_+^N}d\overline{x}\int_{R_+^{M,j}}\rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{y}^{(j)}z)m(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{y}^{(j)}z)d\overline{y}^{(j)}=$$

$$=\rho_0\left[\int_0^{\infty}\overline{\Phi}(t)\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(t)dt\prod_{j=1}^{M}\int_t^{\infty}\overline{F}_j(y_j)dy_j+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}\overline{F}_i^{\,p}(s)\,ds\prod_{j=1}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_j(y_j)dy_j\int_0^{\infty}h_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^{\,p}(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\infty}\left(\overline{F}_j(s)+\overline{G}_j(s)\right)ds\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_l(y_l)d\overline{y}_l\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt\right]=$$

$$=\rho_0\left[\int_0^{\infty}\overline{\Phi}(\tau)\left(\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(\tau)d\tau\prod_{j=1}^{M}\int_{\tau}^{\infty}\overline{F}_j(y_j)dy_j+\right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\tau}h_i^p(\tau-s)\prod_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^{\,p}(\tau-s,s)\overline{F}_i^{\,p}(s)ds\prod_{j=1}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_j\,(y_j)dy_j+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\tau}\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(\tau-s,s)\overline{F}_j(s)ds\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_l(y_l)dy_l\right)+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\infty}\overline{G}_j(s)ds\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_l(y_l)dy_l\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt\right]=$$

$$=\rho_0\left(M\gamma\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j+\sum_{j=1}^{M}\int_0^{\infty}\overline{G}_j(s)ds\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_l(y_l)dy_l\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt\right).$$

Если учесть, что семейство функций $\dfrac{\overline{G}_j^{\,\varepsilon}(s)}{M\beta_j^{\varepsilon}}$ является δ-образным [11], то при $\varepsilon\to 0$

$$\int_0^{\infty}\overline{G}_j^{\,\varepsilon}(s)ds\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_l(y_l)dy_l\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt\sim M\gamma M\beta_j^{\varepsilon}\prod_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{M}M\alpha_l\,.$$

Поэтому $\int\limits_{E_+} m(z)\rho(dz) \approx \rho_0 M\gamma \prod\limits_{l=1}^{M} M\alpha_l \left(1+\sum\limits_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)$.

Вычислим функционал в знаменателях дробей формул (1). Для этого понадобятся вероятности перехода реальной системы в отказовые состояния из эргодических состояний опорной системы, входящих в подмножество работоспособных состояний. Предположим, что число ТЯ, соединенных параллельно, больше двух. Тогда из любого эргодического работоспособного состояния система попадает в отказовое за один шаг либо после отказа любой ТЯ из последовательной цепочки, либо в результате ТО системы. К выписанным ранее вероятностям перехода добавим

$$P(\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z, E_-) = \overline{G}_j(x_i)\,,\ x_i < x_{\min}^{i} \wedge y_{\min}^{j} \wedge \beta_j \wedge z\,,$$

$$P(\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z, E_-) = \overline{G}_j(z)\,,\ z < x_{\min} \wedge y_{\min}^{j} \wedge \beta_j\,, \qquad j=\overline{1,M}\,.$$

В следующих преобразованиях используются обозначения $x_{\min}^{i,j} = \bigwedge\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{N} x_l$, $R_+^{N,i,j} = \{\bar{x}^{(i,j)},\ x_k \ge 0,\ k=\overline{1,N},\ x_i = x_j = 0\}$ и тождества (7), (8).

$$\frac{1}{\rho_0}\int\limits_{E_+}\rho(dx)P(x,E_-) =$$

$$= \int\limits_{R_+^M}\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)d\bar{y}\int\limits_{0}^{y_{\min}}\left(\varphi(t)\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^{\,p}(t)dt + \sum_{i=1}^{N} f_i^{\,p}(t)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{F}_l^{\,p}(t)\overline{\Phi}(t)\right)dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\infty}dz\int\limits_{R_+^{N,i}}d\bar{x}^{(i)}\int\limits_{R_+^M}\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)d\bar{y}\int\limits_0^{\infty}h_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}v_l^p(t,x_l)\varphi(z+t)dt\int\limits_0^{x_{\min}^{i}\wedge y_{\min}\wedge z} f_i^{\,p}(s)ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{R_+^{N,i}}d\bar{x}^{(i)}\int\limits_{R_+^M}\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)d\bar{y}\int\limits_0^{\infty}h_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}v_l^p(t,x_l)dt\int\limits_0^{x_{\min}^{i}\wedge y_{\min}}\varphi(z+t)\overline{F}_i^{\,p}(z)dz +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int\limits_0^{\infty}dz\int\limits_{R_+^{N,i,j}}d\bar{x}^{(i,j)}\int\limits_{R_+^M}\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)d\bar{y}\int\limits_0^{\infty}h_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{N}v_l^p(t,x_l)\varphi(z+t)dt\,\times$$

$$\times\int\limits_0^{x_{\min}^{i,j}\wedge y_{\min}\wedge z}\overline{F}_i^{\,p}(x_j)v_j^p(t,x_j)dx_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^{\infty}dz\int\limits_{R_+^{N,i}}d\bar{x}^{(i)}\int\limits_{R_+^{M,j}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M}\overline{F}_l(y_l)d\bar{y}^{(j)}\int\limits_0^{\infty}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}v_l^p(t,x_l)\varphi(z+t)dt\,\times$$

$$\times \int_0^{x_{\min}^i \wedge y_{\min}^j \wedge z} v_i^p(t,x_i)\left(\overline{F}_j(x_i)+\overline{G}_j(x_i)\right)dx_i +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_{R_+^N} d\overline{x} \int_{R_+^{M,j}} \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M} \overline{F}_l(y_l)d\overline{y}^{(j)} \int_0^\infty \prod_{i=1}^{N} v_i^p(t,x_i)dt \int_0^{x_{\min}\wedge y_{\min}^j} \varphi(z+t)\left(\overline{F}_j(z)+\overline{G}_j(z)\right)dz =$$

$$=\int_0^\infty \varphi(t)\left[\prod_{i=1}^{N}\overline{F}_i^p(\tau)d\tau\prod_{j=1}^{M}\int_\tau^\infty \overline{F}_j(y_j)dy_j +\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\tau h_i^p(\tau-s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^p(\tau-s,s)\,\overline{F}_i^p(s)\prod_{j=1}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_j(y_j)dy_j +$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\tau \overline{F}_j(s)\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^p(\tau-s,s)\,ds\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_l(y_l)dy_l\right]d\tau +$$

$$+\int_0^\infty \overline{\Phi}(\tau)\left[\sum_{i=1}^{N} f_i^p(\tau)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{F}_l^p(\tau)\prod_{j=1}^{M}\int_\tau^\infty \overline{F}_j(y_j)dy_j +\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\tau h_i^p(\tau-s)f_i^p(s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^p(\tau-s,s)\,ds\prod_{j=1}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_j(y_j)dy_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_0^\tau h_i^p(\tau-s)\overline{F}_i^p(s)v_i^p(\tau-s,s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i,j}}^{N}\overline{V}_l^p(\tau-s,s)\prod_{j=1}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_j(y_j)dy_j +$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\int_0^\tau v_i^p(\tau-s,s)\overline{F}_j(s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^p(\tau-s,s)ds\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_l(y_l)dy_l\right]d\tau +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \overline{G}_j(s)ds\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{N}\int_s^\infty \overline{F}_l(y_l)dy_l\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty v_i^p(t,s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^p(t,s)\overline{\Phi}(s+t)dt +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^\infty\prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^p(t,s)\varphi(s+t)dt\right)\right]=\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j\left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(\tau)\,\overline{\Phi}(\tau)\,d\tau\right)+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \overline{G}_j(s)ds\times$$

$$\times\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M}\int_s^\infty \overline{F}_l(y_l)dy_l\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty v_i^p(t,s)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}\overline{V}_l^p(t,s)\,\overline{\Phi}(s+t)dt+\int_0^\infty\prod_{l=1}^{N}\overline{V}_l^p(t,s)\varphi(s+t)dt\right)\right]\sim$$

$$\sim \prod_{j=1}^{M} M\alpha_j \left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(\tau)\overline{\Phi}(\tau)d\tau\right)+\sum_{j=1}^{M} M\beta_j \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{M} M\alpha_l \left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt\right)=$$

$$=\prod_{j=1}^{M} M\alpha_j \left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(t)\,\overline{\Phi}(t)\,dt\right)\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right).$$

Следовательно, приближенное значение средней наработки системы на отказ находится по формуле

$$T_+ \approx \frac{M\gamma}{1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(t)\,\overline{\Phi}(t)\,dt}.$$

Если в системе только две ТЯ соединены параллельно (M=2), то отказ системы может произойти в результате последовательного отказа этих ТЯ. В этом случае при вычислении значения функционала $\int_{E_+}\rho(dx)P(x,E_-)$ нужно добавить слагаемое

$$\int_0^\infty \left(\overline{G}_1(s)\,\overline{F}_2(s)+\overline{F}_1(s)\,\overline{G}_2(s)\right)ds\int_0^\infty \prod_{i=1}^{N}\overline{V}_i^{\,p}(t,s)\,\overline{\Phi}(s+t)dt \sim M\gamma\left(M\beta_1+M\beta_2\right).$$

Здесь $T_+ \approx \dfrac{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{2}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty h_i^p(t)\,\overline{\Phi}(t)dt\right)\left(1+\sum_{j=1}^{2}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+\frac{M\gamma}{M\alpha_1 M\alpha_2}\left(M\beta_1+M\beta_2\right)}$.

При нахождении среднего стационарного времени восстановления системы следует учесть средние времена пребывания реальной системы T_- в эргодических отказовых состояниях $0\overline{y}$, $i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z$, которые определяются формулами

$$m(0\overline{y})=M\zeta\,,\ m(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)=\int_0^z \overline{G}_i^{\,p}(s)ds,\ i=\overline{1,N}\,,$$

$$\int_{E_-} m(x)\,\rho(dx)=\int_{R_+^M} m(0\overline{y})\rho(0\overline{y})d\overline{y}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^\infty dz\int_{R_+^{N,i}} d\overline{x}^{(i)}\int_{R_+^M}\rho(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)\,m(i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\,\overline{1}\,\overline{y}z)d\,\overline{y}=$$

$$=\rho_0 M\zeta\prod_{j=1}^{M}\int_0^\infty \overline{F}_j(x_j)\,dx_j\,+$$

$$+\rho_0\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}dz\int_{R_+^{N,i}}d\overline{x}^{(i)}\int_{R_+^{M}}\prod_{j=1}^{M}\overline{F}_j(y_j)d\overline{y}\int_0^{\infty}h_i^p(t)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{N}v_l^p(t,x_l)\,\varphi(z+t)dt\int_0^{z}\overline{G}_i^{\,p}(s)\,ds=$$

$$=\rho_0 M\zeta\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j+\rho_0\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}\overline{G}_i^{\,p}(s)ds\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t+s)dt\prod_{j=1}^{M}\int_s^{\infty}\overline{F}_j\,(y_j)dy_j\sim$$

$$\sim\rho_0\prod_{j=1}^{M}M\alpha_j\left(M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^{\infty}h_i^p(t)\,\overline{\Phi}(t)dt\right).$$

Следовательно,

$$T_-\approx\frac{M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}{\left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt\right)\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)},\ M\geq 3,$$

$$T_-\approx\frac{M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}{\left(1+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{\infty}h_i^p(t)\,\overline{\Phi}(t)dt\right)\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+\frac{M\gamma}{M\alpha_1 M\alpha_2}\left(M\beta_1+M\beta_2\right)},\ M=2.$$

Приближенное значение стационарного коэффициента готовности находится по формуле

$$K\text{г}=\frac{T_+}{T_++T_-}\approx\frac{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}.\qquad(9)$$

Определим экономические показатели функционирования системы на бесконечном интервале времени по формулам (2). Введем следующие обозначения: c_0 — прибыль за единицу времени исправного функционирования системы; c_i^p $(i=\overline{1,N})$, c_j $(j=\overline{1,M})$ — затраты за единицу времени проведения аварийного восстановления i-й последовательной и j-й параллельной ТЯ; $c_{\text{ТО}}$ — затраты за единицу времени проведения ТО системы. Тогда функции дохода $f_S(e)$ и затрат $f_C(e)$ имеют вид

$$f_S(e)=\begin{cases}c_0,\ e\in\left\{\overline{1y},i\overline{1}\,\overline{x}^{(i)}\overline{1}\,\overline{y}z,\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}\,\overline{y}^{(j)}z,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}\right\},\\ c_0-c_j,\ e\in\left\{\overline{1}\,\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\,\overline{y}^{(j)}z,\ j=\overline{1,M}\right\},\\ -c_i^p,\ e\in\left\{i\overline{1}^{(i)}\,\overline{x}^{(i)}\overline{1}\,\overline{y}z,\ i=\overline{1,N}\right\},\\ -c_{\text{ТО}},\ e\in\left\{0\overline{y}\right\}.\end{cases}$$

$$f_C(e)=\begin{cases} 0,\ e\in\left\{1\bar{y}, i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z, \bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z,\ i=\overline{1,N},\ j=\overline{1,M}\right\}, \\ c_j,\ e\in\left\{\bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z,\ j=\overline{1,M}\right\}, \\ c_i^p,\ e\in\left\{i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z,\ i=\overline{1,N}\right\}, \\ c_{\text{ТО}},\ e\in\left\{0\bar{y}\right\}. \end{cases}$$

Приближенные значения средней прибыли S за единицу календарного времени и средних затрат C за единицу времени исправного функционирования системы определяются формулами

$$S\approx\frac{M\gamma\left(c_0+\sum_{j=1}^{M}(c_0-c_j)\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)-c_{\text{ТО}}M\zeta-\sum_{i=1}^{N}c_i^p M\beta_i^p\int_0^\infty h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^\infty h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}, \quad (10)$$

$$C\approx\frac{M\gamma\sum_{j=1}^{M}c_j\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}+c_{\text{ТО}}M\zeta+\sum_{i=1}^{N}c_i^p M\beta_i^p\int_0^\infty h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}. \quad (11)$$

ОПТИМИЗАЦИЯ СРОКОВ ПРОВЕДЕНИЯ ТО СИСТЕМЫ

Определим оптимальные моменты проведения ТО последовательной цепочки ТЯ системы для достижения экстремальных значений характеристик *К*г, S, C. В работе [3] доказано, что локальные экстремумы дробно-линейного функционала достигаются на вырожденных функциях распределения. Если $\overline{\Phi}(t)=\begin{cases}1, t\in[0,\tau]\\ 0, t\in(\tau,+\infty)\end{cases}$, то показатели качества функционирования системы *К*г, S, C зависят от параметра τ.

$$K\text{г}(\tau)\approx\frac{\tau\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}{\tau\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p H_i^p(\tau)},$$

$$S(\tau)\approx\frac{\tau\left(c_0+\sum_{j=1}^{M}(c_0-c_j)\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)-c_{\text{ТО}}M\zeta-\sum_{i=1}^{N}c_i^p M\beta_i^p H_i^p(\tau)}{\tau\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p H_i^p(\tau)},$$

$$C(\tau) \approx \frac{\tau \sum_{j=1}^{M} c_j \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j} + c_{\text{ТО}} M\zeta + \sum_{i=1}^{N} c_i^p M\beta_i^p H_i^p(\tau)}{\tau \left(1 + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)} .$$

Оптимальные моменты времени τ_K, τ_S, τ_C проведения ТО последовательной части системы, при которых критерии качества *К*г, S, C достигают экстремальных значений, находятся из уравнений

$$\sum_{i=1}^{N} M\beta_i^p \left(\tau h_i^p(\tau) - H_i^p(\tau)\right) = M\zeta , \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M\beta_i^p M\beta_j^p h_i^p(\tau) H_j^p(\tau)(c_i^p - c_j^p) + M\zeta \sum_{i=1}^{N} M\beta_i^p h_i^p(\tau)(c_i^p - c_{\text{ТО}}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} M\beta_i^p \left(\tau h_i^p(\tau) - H_i^p(\tau)\right)\left[c_i^p + c_0 + \sum_{j=1}^{M}\left(c_0 - c_j + c_i^p\right)\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right] =$$

$$= M\zeta\left[c_0 + c_{\text{ТО}} + \sum_{j=1}^{M}\left(c_0 - c_j + c_{\text{ТО}}\right)\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right], \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^p M\beta_i^p \left(\tau h_i^p(\tau) - H_i^p(\tau)\right) = c_{\text{ТО}} M\zeta . \tag{14}$$

В случае существования единственных корней этих уравнений оптимальные показатели качества функционирования системы определяются формулами

$$K\text{г}_{\max} \approx \frac{1 + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j}}{1 + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} M\beta_i^p h_i^p(\tau_K)} ,$$

$$S_{\max} \approx \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{M} (c_0 - c_j) \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j} - \sum_{i=1}^{N} c_i^p M\beta_i^p h_i^p(\tau_S)}{1 + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} M\,\beta_i^p h_i^p(\tau_S)} ,$$

$$C_{\min} \approx \frac{\sum_{j=1}^{M} c_j \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} c_i^p M\beta_i^p h_i^p(\tau_C)}{1 + \sum_{j=1}^{M} \dfrac{M\beta_j}{M\alpha_j}} .$$

Если уравнения (12)−(14) имеют несколько корней, оптимальные значения τ находятся прямой подстановкой каждого их них в формулу для случая единственного корня с последующим отбором лучшего из них, причем необходимо учесть значение показателя при $\tau = \infty$.

$$K\text{г}(\infty) \approx \frac{1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{M\beta_j}{M\alpha_j}}{1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i^p}},$$

$$S(\infty) \approx \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{M} (c_0 - c_j) \frac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} c_i^p \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i^p}}{1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i^p}},$$

$$C(\infty) \approx \frac{\sum_{j=1}^{M} c_j \frac{M\beta_j}{M\alpha_j} + \sum_{i=1}^{N} c_i^p \frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i^p}}{1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{M\beta_j}{M\alpha_j}}.$$

Отметим, что в случае отсутствия в системе параллельно соединенных ТЯ $(M = 0)$ полученные формулы совпадают с соответствующими результатами работы [3], когда ТО проводится при достижении наработки системы уровня τ.

В заключение приведем пример применения полученных результатов (табл. 1, 2). Системы состоят из пяти последовательно и трех параллельно соединенных ТЯ. Наработки на отказ ТЯ и времена их восстановления имеют распределение Эрланга.

$$f_i^p(t) = \frac{\lambda_i^{k_i} t^{k_i - 1} e^{-\lambda_i t}}{(k_i - 1)!}, \quad g_i^p(t) = \frac{\mu_i^{m_i} t^{m_i - 1} e^{-m_i t}}{(m_i - 1)!}, \quad i = \overline{1,5};$$

$$f_i(t) = \frac{\lambda_i^{k_i} t^{k_i - 1} e^{-\lambda_i t}}{(k_i - 1)!}, \quad g_i(t) = \frac{\mu_i^{m_i} t^{m_i - 1} e^{-m_i t}}{(m_i - 1)!}, \quad i = \overline{6,8};$$

$$\psi(t) = \frac{\mu_{\text{ТО}}^{m_{\text{ТО}}} t^{m_{\text{ТО}} - 1} e^{-m_{\text{ТО}} t}}{(m_{\text{ТО}} - 1)!}, \quad t \ge 0.$$

Таким образом, построена математическая модель функционирования системы последовательно-параллельной структуры с учетом проведения календарного частичного ТО ее последовательной части, найдены основные стационарные характеристики надежности системы и оптимальные сроки ТО.

Полученные результаты могут быть использованы в области машино- и приборостроения при эксплуатации автоматизированных производственных систем.

Таблица 1. Исходные данные системы

№	1	2	3	4	5	6	7	8	ТО
k_i	4	3	4	2	3	4	2	3	-
$\lambda_i, ч^{-1}$	0,09	0,05	0,06	0,03	0,06	0,03	0,04	0,05	-
$M\alpha_i, ч$	44,44	60,00	66,67	66,67	50,00	133,33	50,00	60,00	-
m_i	3	4	2	3	4	2	4	2	4
$\mu_i, ч^{-1}$	1,5	1,3	1,2	1,6	1,4	1,5	1,3	1,6	5,0
$M\beta_i, ч$	2,00	3,08	1,67	1,88	2,86	1,33	3,08	1,25	0,80
c_i, у.е./ч	3,2	3,0	3,2	3,1	3,1	3,2	3,4	3,1	1,1
c_0, у.е./ч	10								

Таблица 2. Результаты расчетов

τ_K	$K\text{г}(\tau_K)$	$K\text{г}(\infty)$	τ_S	$S(\tau_S)$	$S(\infty)$	τ_C	$C(\tau_C)$	$C(\infty)$
15,16	0,92	0,84	11,34	9,92	7,68	7,96	0,39	0,87

В дальнейшем предполагается разработка моделей функционирования автоматизированных производственных систем с различными стратегиями проведения планового ТО и нахождение оптимальных моментов времени ее проведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности. — М.: Сов. радио, 1969. — 488 с.
2. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
3. *Барзилович Е.Ю., Каштанов В.А.* Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971. — 272 с.
4. *Каштанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
5. *Cho D.I., Parlar M.* A survey of maintenance models for multi-unit systems // Eur. J. operational research. — 1991. — **51**. — P. 1–23.
6. *Dekker R., Wildeman R.A.* A review of multi-component maintanence models with economic dependence // Math. methods of operational research. — 1997. — **45**. — P. 411–435.
7. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.
8. *Полумарковские* модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А.Н. Корлат, А.Н. Кузнецов, М.И. Новиков, А.Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
9. *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. — М.: Наука, 1989. — 336 с.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ: Учебник. Ч. II. — М.: Наука, 1984. — 640 с.

Поступила 02.03.2005