УДК 517.9

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕЧІТКИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Є.В. ІВОХІН, С.О. ВОЛЧКОВ

Проводиться аналіз стійкоподібних властивостей функціонування нечітких дискретних систем на прикладі систем прийняття рішень. Вводиться визначення стійкості розв'язків нечітких систем. Запропоновано алгоритми обчислення значень функції належності для забезпечення моделювання динаміки систем прийняття рішень. На основі методу функцій Ляпунова доведено твердження про умови стійкості в дискретних нечітких системах.

Математичне моделювання різних фізичних явищ складається із двох принципових етапів, які потребують врахування складності та невизначеності відповідних моделей. Перший з них об'єктивно обумовлений відсутністю точного опису процесів функціонування, що моделюються. Це, в свою чергу, веде до неможливості сформулювати точний вигляд моделі фізичного процесу. Незручності використання конкретних моделей на практиці пояснюються також наявністю в моделях багатьох невизначеностей. Другий етап, пов'язаний з проблемою адекватності математичного моделювання реальних систем, полягає у суб'єктивній неспроможності оцінювати стани процесів абсолютно точно. Неясність, нечіткість поведінки систем, відсутність достатньої інформації для моделювання процесів не дозволяють коректно описувати моделі в рамках традиційних підходів, які враховують невизначеність. Останнім часом для вирішення цих проблем досить широко використовується теорія нечітких множин [1–5].

Існує багато підходів до побудови та математичного обгрунтування загальної теорії нечітких множин. Потрібно відмітити, що аксіоматика даної теорії досить повно вивчена [5], а область застосування нечітких множин постійно розширюється завдяки використанню основних принципів теорії в аналізі складних систем різного призначення (економічних, екологічних, соціальних, медичних, політичних та ін.).

Існує велика кількість нечітких моделей, які дозволяють описувати динаміку процесів (явищ, ситуацій і под.). Проте зрозуміло, що без якісного дослідження поведінки розв'язків аналіз моделей не може бути повним. Питанням дослідження стійкості нечітких динамічних систем поки що присвячено небагато робіт [2, 4, 7, 9]. Це пов'язано з тим, що термін «стійкість нечіткої системи» залишається не до кінця формалізованим поняттям, яке трактується в залежності від моделей дослідження динаміки та від поглядів на зміст властивості «стійкості».

Метою цієї роботи є спроба отримати умови традиційного поняття стійкості розв'язків нечітких динамічних систем та побудувати такі аналоги теорем Ляпунова, які встановлюватимуть факти стійкості за допомогою дослідження допоміжних функцій (функцій Ляпунова).

Визначимо поняття нечіткої множини з використанням узагальненого поняття належності [1].

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Розглянемо довільний скінченновимірний простір над полем дійсних чисел $X = R^n$. Будемо називати X універсальною множиною.

Визначення 1.1. Множина пар $(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))$ називається нечіткою множиною $\widetilde{A}$ в X, де $x \in X$,

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) : X \to [0,1]. \tag{1.1}$$

Функція $\mu_{\widetilde{A}}(x)$: $X \to [0,1]$ називається функцією належності нечіткої множини $\widetilde{A}$.

Далі всі нечіткі множини будемо позначати великими літерами з хвилею над ними і ототожнювати їх із відповідними функціями належності. Простір всіх нечітких множин в X позначимо E^n.

Визначення 1.2. Нечітким відображенням R з X у довільний скінченновимірний простір Y називається нечітка множина $\widetilde{R}$ у $X \times Y$ з функцією належності

$$\mu_{\widetilde{R}}(x, y) : X \times Y \to [0,1], \quad x \in X, \quad y \in Y. \tag{1.2}$$

У відповідності до правил дій з нечіткими множинами [6] для обчислення значень функцій належності об'єднання та перетину нечітких множин використовуємо операції max і min

$$\begin{aligned} &\forall x \in A_1 \cup A_2, \quad \mu_{\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2}(x) = \max\,(\mu_{\widetilde{A}_1}(x), \mu_{\widetilde{A}_2}(x)), \\ &\forall x \in A_1 \cap A_2, \quad \mu_{\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2}(x) = \min\,(\mu_{\widetilde{A}_1}(x), \mu_{\widetilde{A}_2}(x)). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Під висотою нечіткої множини $\widetilde{A}$ у X розуміємо

$$h(\widetilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x). \tag{1.4}$$

Множинами α-рівня (α-зрізи, $\alpha \in [0,1]$) нечіткої множини $\widetilde{A}$ називають звичайні множини

$$\overline{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) \ge \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1]. \tag{1.5}$$

При цьому має місце розкладення нечіткої множини за множинами α–рівня

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \overline{A}_\alpha, \tag{1.6}$$

де $\alpha \overline{A}_\alpha = \widetilde{B}$ — нечітка множина в X з функцією належності $\mu_{\widetilde{B}}(x) = \alpha$, $x \in X$.

Визначення 1.3. Нечітка множина $\widetilde{V}$ називається регулярною нечіткою множиною в X, якщо:

1) функція належності $\mu_{\widetilde{V}}(x) : X \to [0,1]$ напівнеперервна зверху;

2) множина $\widetilde{V}$ опукла [7], тобто $\forall x,\ y \in X,\ 0 \le \lambda \le 1$,

$$\mu_{\widetilde{V}}(\lambda x + (1-\lambda) y) \ge \min(\mu_{\widetilde{V}}(x), \mu_{\widetilde{V}}(y));$$

3) існує єдиний елемент $\bar{x} \in X$ такий, що $\mu_{\widetilde{V}}(\bar{x}) = 1$;

4) носій множини $\operatorname{supp} \widetilde{V} = \{x \in X : \mu_{\widetilde{V}}(x) > 0\}$ обмежений в X.

Нехай $d_H(A, B)$ — хаусдорфова відстань між звичайними множинами A і B, тоді

$$d_H(A, B) = \max \|x - y\|. \tag{1.7}$$

Визначимо

$$d[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \sup_{0 \le \alpha \le 1} d_H[\overline{A}_\alpha, \overline{B}_\alpha] \tag{1.8}$$

як відстань між нечіткими множинами $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ у X.

Визначення (1.8) відстані між нечіткими множинами задає метрику в просторі всіх нечітких множин E^n універсальної множини X, при цьому (E^n, d) є повним метричним простором [7].

2. НЕЧІТКІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

Функціонування процесів та явищ нечітких динамічних систем може бути описане нечіткими неперервними

$$\dot{\widetilde{X}}(t) = \widetilde{X}(t) \circ R, \tag{2.1}$$

нечіткими дискретними

$$\widetilde{X}(t+1) = \widetilde{X}(t) \circ R \tag{2.2}$$

або нечіткими матричними диференціальними рівняннями

$$\dot{\widetilde{Y}} = F(\widetilde{Y}, \widetilde{X}), \tag{2.3}$$

де R — нечітке відображення з функцією належності $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$, $x, y \in X$ [6].

Операція «$\circ$» означає максимальну композицію, яка відповідно для (2.1) і (2.2) має вигляд

$$\mu_{\dot{\widetilde{X}}(t)}(y) = \max_{x \in X} [\min(\mu_{\widetilde{X}(t)}(x), \mu_{\widetilde{R}}(x, y))], \tag{2.4}$$

$$\mu_{\widetilde{X}_{t+1}}(y) = \max_{x \in X} [\min(\mu_{\widetilde{X}(t)_t}(x), \mu_{\widetilde{R}}(x, y))]. \tag{2.5}$$

Використання диференціального аналога при роботі з нечіткими множинами, на наш погляд, має більш теоретичний характер. Тому зосередимо увагу на дослідженні дискретних нечітких моделей вигляду (2.2).

Нехай множина $T = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, де N — деяке наперед задане додатне число, визначає дискретні моменти часу. Позначимо $T_n =$

$=\{t_1, t_2, t_3, ..., t_n\} \subset T$ послідовність моментів часу з T, впорядкованих за зростанням.

Будемо розглядати таку дискретну нечітку систему:

$$\widetilde{X}_{k+1} = R_k \circ \widetilde{X}_k, \; k = 0,1,2,..., \tag{2.6}$$

де $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{X}_0 \in E^n$ — компактна множина початкових станів; $\widetilde{X}(t_k) = \widetilde{X}_k$ — нечіткі множини в X можливих станів системи в моменти часу $t_k \in T$, які визначають розв'язки системи; $R(t_k) = R_k$ — деякі нечіткі відображення з X у X, що визначають переходи системи, $k = 0,1,2,...$.

Визначення 2.1. Траєкторією системи (2.6) назвемо послідовність $\left\{x(t_k) = x_k \in X_k = \operatorname{supp}\left\{\widetilde{X}_k\right\} \subset X\right\}_{k=0,1,2,...}$, для елементів якої справедливі співвідношення

$$x_{k+1} = R_k \circ x_k, \; k = 0, 1, 2, ... \; . \tag{2.7}$$

Варто помітити, що будь-який розв'язок системи (2.6) складається із множини траєкторій.

Визначення 2.2. Траєкторію системи (2.6) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,...}$ будемо називати регулярною (РТС), якщо для її елементів справедлива умова

$$\mu_k = \mu(\bar{x}_k) = 1, \; k = 0,1,2,... . \tag{2.8}$$

Нечіткі стани $\widetilde{X}_k$ у моменти часу t_k, $k = 0,1,2,...$, складаються з елементів траєкторій системи x_k, $k = 0,1,2,...$. Очевидно, якщо система (2.6) має єдину регулярну траєкторію, то нечіткі стани X_k, $k = 0,1,2,...$ є регулярними нечіткими множинами в X. Розв'язок системи (2.6) у даному випадку залежить від вибору множини $\widetilde{X}(t_0) = \widetilde{X}_0$. При цьому РТС для (2.6) може бути єдиною або може існувати довільна їх кількість у залежності від X_0.

У системі (2.6) залишається невідомою природа та характер дії операторів R_k, $k = 0,1,2,...$. Формалізуємо модель системи (2.6) у вигляді лінійного дискретного рівняння

$$\widetilde{X}_{k+1} = A_k \circ \widetilde{X}_k, \quad k = 0,1,2,... \tag{2.9}$$

з матрицями A_k, $k = 0,1,2,...$ спеціального виду.

Для цього розглянемо випадок, коли стани системи x_i, $i = \overline{1,n}$, які складають універсальну множину X, з часом не змінюються. Це означає, що модель (2.9) описує динаміку ситуацій прийняття рішень [9] і може бути записана у вигляді

$$\mu_{\widetilde{X}_{k+1}}(x) = A_k \circ \mu_{\widetilde{X}_k}(x), \; k = 0,1,2,..., \tag{2.10}$$

де $\mu_{\widetilde{X}_k}(x)$, $\mu_{\widetilde{X}_{k+1}}(x)$ — вектор-функції належності нечітких множин $X(t)$ відповідно в моменти часу t_k, t_{k+1}. Таке припущення, а рівно й розгляд моделі (2.10), є допустимим за умови визначення правил побудови матриці A та змісту побудови алгебраїчних операцій з нечіткими множинами. Застосуємо підхід, який використовується в теорії прийняття рішень.

Алгоритм 1. Нехай на k -му кроці, $k = 0,1,2,...$, проведено N дослідів (експериментів), в рамках яких визначалися співвідношення станів нечіткої системи (2.9), наприклад, методом парних порівнянь.

Припустимо, для кожного зі станів x_i, $i = \overline{1,n}$ отримано показники a_{ij}^k, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, де a_{ii}^k задає кількість експериментів, які визначають, що система залишається у стані x_i; a_{ij}^k задає кількість дослідів (голосів), що віддають перевагу стану x_i перед станом x_j. В результаті такої обробки даних отримуємо матрицю $A_k = \{a_{ij}^k\}_{i,j=\overline{1,n}}$, $k = 0,1,2,...$.

Використовуючи дії над нечіткими множинами, визначимо

- операцію додавання двох нечітких елементів (x, μ_1) і (x, μ_2) з X у вигляді

$$(x, \mu_1) \tilde{+} (x, \mu_2) = (x, \mu_3), \quad \mu_3 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 * \mu_2; \tag{2.11}$$

- операцію множення елемента $(x, \mu(x))$ на ціле число

$$p \,\tilde{*}\, (x, \mu(x)) = \underbrace{(x, \mu(x)) \tilde{+} (x, \mu(x)) \tilde{+} \ldots \tilde{+} (x, \mu(x))}_{p \text{ раз}}. \tag{2.12}$$

Тоді для матриць A_k, $k = 0,1,2,...$, заданої структури можна розглядати дискретну систему (2.10), для якої

$$\mu_{\tilde{X}_{k+1}}(x_i) = a_{ii}^k \,\tilde{*}\, (x_i, \mu_{\tilde{X}_k}(x_i)) \tilde{+} \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} a_{ij}^k \,\tilde{*}\, (x_i, 1 - \mu_{\tilde{X}_k}(x_j)), \; i = \overline{1,n}. \tag{2.13}$$

Таким чином, за формулою (2.13) обчислюється значення функції належності елементів x_i, $i = \overline{1,n}$, нечіткої множини $\tilde{X} = ((x_1, \mu_{\tilde{X}}(x_1)),...$ $...,(x_n, \mu_{\tilde{X}}(x_n)))$.

Розглянуті операції з нечіткими елементами дозволяють моделювати динаміку системи (2.9), але вони не дають можливості оцінювати вплив співвідношення результатів дослідів (експериментів) на розвиток процесу.

Врахування даних опитування в системі (2.10) і формування елементів матриць A_k, $k = 0,1,2,...$, будемо проводити за допомогою методу максимізуючої множини [8], схема якого на кожному кроці матиме такий вигляд.

Алгоритм 2. Нехай на k -му кроці, $k = 0,1,2,...$, для заданих станів системи (2.9) x_i, $i = \overline{1,n}$, проводиться голосування (опитування) експертів, за яким визначається можливість переходу системи із стану x_i, $i = \overline{1,n}$, у стан x_j, $j = \overline{1,n}$. Кількість голосів, що визначають таку можливість, позначимо a_{ij}^k, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, $k = 0,1,2,...$. У результаті отримаємо матриці A_k, $k = 0,1,2,...$, моделі (2.9).

Визначимо правила переходу нечітких станів $\widetilde{X}_k$, $k=0,1,2,...$, системи (2.9) за умови наявності інформації про елементи матриць A_k, $k=0,1,2,...$. Розглянемо довільний крок k, $k=0,1,2,...$. Стан системи (як вже було сказано вище) описується нечіткою множиною $\widetilde{X}_k=\left\{\left(x_i,\mu_{\widetilde{X}_k}(x_i)\right)\right\}$, $x_i\in X$, $i=\overline{1,n}$. Використаємо дані про стан об'єкта і сформуємо нечіткі множини

$$\widetilde{A}_i^k=\left\{\left(a_{ij}{}^k,\mu_{\widetilde{X}_k}(x_j)\right)\right\}_{j=\overline{1,n}},\quad i=\overline{1,n},\quad k=0,1,2,.... \tag{2.14}$$

Визначення 2.1. Максимізуючою множиною $M(Y)$ для Y називається нечітка множина, ступінь належності до якої кожного елемента $y\in Y$ відображає близькість y до $\sup Y$.

Розглянемо множину Y, що містить усі значення елементів заданої матриці A

$$Y=\left\{a_{ij}^k\right\}_{i,j=\overline{1,n}}. \tag{2.15}$$

Позначимо $y_{\max}=\sup Y$. Визначимо максимізуючі множини для кожного $i=\overline{1,n}$

$$\widetilde{A}_i^{k*}=\left\{\left(a_{ij}^k,\left(a_{ij}^k/y_{\max}\right)\right)\right\}_{j=\overline{1,n}}. \tag{2.16}$$

На основі перетину нечітких множин $\widetilde{A}_i^k$ та $\widetilde{A}_i^{k*}$ визначимо нечіткі множини $\widetilde{A}_i^{k0}$, $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,...$

$$\widetilde{A}_i^{k0}=\left\{\left(a_{ij}^k,\nu_i{}^k\left(x_j\right)\right)\right\}_{j=\overline{1,n}},\ i=\overline{1,n}, \tag{2.17}$$

для яких $\nu_i{}^k\left(x_j\right)=\begin{cases}\min\left(\mu_{\widetilde{X}_k}(x_i),\ a_{ii}^k/y_{\max}\right), & \text{якщо } i=j,\\ \min\left(1-\mu_{\widetilde{X}_k}\left(x_j\right),\ 1-a_{ij}^k/y_{\max}\right), & \text{якщо } i\neq j,\end{cases}$ $i=\overline{1,n}$, $k=0,1,2,...$.

Нечітку множину $\widetilde{X}_{k+1}=\left\{\left(x_i,\mu_{\widetilde{X}_{k+1}}(x_i)\right)\right\}_{i=\overline{1,n}}$, де $\mu_{\widetilde{X}_{k+1}}(x_i)=\max\limits_{j=\overline{1,n}}\nu_i{}^k\left(x_j\right)$, $k=0,1,2,...$, будемо вважати наступним значенням нечіткого стану системи, яке отримується за формулою (2.9).

3. ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ НЕЧІТКИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ

Стійкоподібні властивості розв'язків нечітких диференціальних систем розглядалися в роботах [2–4, 7–10]. Аналіз стійкості нечіткого розв'язку в даному випадку проводиться на основі побудови чітких α–траєкторій (або траєкторій α–рівня, див. (1.5)) та їх дослідженні. У роботі [4] наведено умови стійкості, побудовано функції Ляпунова, що в цілому узагальнює традиційне поняття стійкості чітких систем.

Дослідження у роботі [2] присвячене нечіткій системі, модель якої може бути записана у вигляді (2.1). Отримано результати з використанням нечіткого аналога функції Ляпунова та її похідної.

Для нечітких диференціальних рівнянь в [7] розглядається нова концепція стійкості, що базується на τ-топології околу часу функціонування системи та використанні відстані Хаусдорфа як метрики простору нечітких множин заданої універсальної множини X.

Досить широкий огляд класів моделей і якісних результатів для розв'язків наведено у роботі [9]. В цілому погоджуючись з автором, хочемо відзначити, що розгляд диференціальних моделей носить в основному теоретичний характер. Більшість робіт не дає рекомендацій щодо побудови розв'язків та їх конструктивного дослідження, що істотно знижує практичну цінність наведених підходів.

Для отримання більш загального і повного уявлення про стійкоподібні властивості нечітких систем розглянемо нечітку дискретну модель (2.9), а саме різні випадки нечітких станів $\widetilde{X}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$.

3.1. Модель (2.9) має регулярну траєкторію.

Припустимо, що існує траєкторія $\{\overline{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $x_k \in \operatorname{supp} \widetilde{X}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, яка є регулярною траєкторією моделі (2.9).

Визначення 3.1. РТС (2.9) $\{\overline{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ називається стійкою за Ляпуновим у випадку, коли $\forall\, \overline{T} > 0,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\ \delta(\varepsilon,\eta,\overline{T}) > 0$, $\gamma(\varepsilon,\eta,\overline{T}) > 0$ такі, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ системи (1), початкові значення якої задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} &\| \overline{x}_0 - x_0 \| < \delta, \\ &| \mu_0 - 1 | < \gamma, \end{aligned} \tag{3.1}$$

для $\forall\, k : t_k \ge \overline{T}$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} &\| \overline{x}_k - x_k \| < \varepsilon, \\ &| \mu_k - 1 | < \eta, \end{aligned} \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.2}$$

Під $\|\cdot\|$ у нерівностях (3.1), (3.2) розуміється звичайна евклідова норма простору R^n.

Визначення 3.2. РТС (2.9) $\{\overline{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ називається асимптотично стійкою, якщо вона є стійкою, і для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ тієї ж системи справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \| x_k - \overline{x}_k \| = 0, \\ &\lim_{k\to\infty} \mu_k = 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Твердження 1. Якщо система (2.9) має регулярну траєкторію $\{\overline{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, а також існують функції $V : X \to [0,1]$ та $G : [0,1] \to [0,1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.9) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ виконуються нерівності

$$V_k = V(x_k) \ge 0\,,\ \ V(\bar{x}_k) = 0\,,\ \ \Delta V_k = V_{k+1} - V_k \le 0\,,\ \ G_k = G(\mu_k) \ge 0\,,$$

$$G(\bar{\mu}_k) = G(1) = 0\,,\ \ \Delta G_k\ = G_{k+1} - G_k\ \le (<)\ 0\,, \tag{3.4}$$

то РТС є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.

Сукупність функцій $\{V, G\}$ назвемо функцією Ляпунова для дискретної нечіткої системи (2.9).

Доведення. В околі РТС (2.9) $\{\bar{x}_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ функція V має мінімум, тому можна знайти будь-яке значення $c > 0$ таке, що нерівностям $V_k \le c,\ k = 0,1,2,\ldots$, буде задовольняти множина траєкторій, серед яких знаходиться і РТС. Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $0 < c \le \varepsilon$, то множина траєкторій, що задовольняє рівнянню $V_k = V(x_k) \le c$, буде задовольняти і $V_k \le \varepsilon$, $k = 0,1,2,\ldots$. Виходячи з $c \ne 0$, можна знайти таке $\delta > 0$, що множина траєкторій, які задовольняють нерівності

$$V_k \le \delta\,, \tag{3.5}$$

будуть задовольняти і $V_k \le c,\ k = 0,1,2,\ldots$. Тому, якщо всі початкові траєкторії будуть задовольняти (3.5), то і при $t_k > \overline{T}$ всі траєкторії системи будуть також задовольняти і нерівності $V_k \le c$, $k = 0,1,2,\ldots$ в силу твердження, за яким $\Delta V_k \le 0,\ k = 0,1,2,\ldots$.

Розглянемо функцію G. Для того щоб РТС була стійкою (асимптотично стійкою) за значеннями функції належності μ, достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \ge (>)\ \mu_k\,,\ \ t_k > \overline{T},\ \ k = 0,1,2,\ldots. \tag{3.6}$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, створюють послідовність, яка є незростаючою. На значеннях РТС функція $G(\mu)$ має строгий мінімум. Тому можна знайти такі $\eta > 0,\ \varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій в ε-околі РТС, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність G_k, $k = 0,1,2,\ldots$, буде незростаючою. Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \le (<) 0,\ k = 0,1,2,\ldots$, забезпечує виконання (3.6). ■

3.2. Система (2.9) не має регулярної траєкторії. Це означає, що для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ системи (2.9) існує момент часу $t_m \in T_n$, коли виконується нерівність $\mu(x_m) < 1$. За таких умов розглянемо два випадки.

Випадок 1. Нехай множина

$$Y_0 \subseteq X_0 = \operatorname{supp} \widetilde{X}_0 \in X \tag{3.7}$$

містить множину початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу $t_k \in T_n$, що $\mu(x_k) = 1$.

Визначення 3.3. Нечітка множина $\widetilde{Y}_0 = \{(y \mid \mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $x_0 \notin Y_0$, системи (2.9) $\forall \overline{T} > 0,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0$, $\exists\ \delta(\varepsilon,\eta,\overline{T}) > 0,\ \gamma(\varepsilon,\eta,\overline{T}) > 0$, початкові значення якої задовольняють нерівностям

$$d(x_0, Y_0) < \delta\,,$$

$$|\,\mu(x_0) - 1| < \gamma\,, \tag{3.8}$$

для $\forall\, k : t_k \geq \overline{T}$ справедливі нерівності

$$d(x_k, Y_0) < \varepsilon\,,$$

$$|\,\mu(x_k) - 1| < \eta\,,\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{3.9}$$

де $d(\cdot,\cdot)$ — відстань від точки до множини

$$d(x, A) = \inf\left\{\|x - a\| : a \in A\right\},$$

$$d(x, A) \geq 0,\ d(x, A) = 0,\ \forall\, x \in \overline{A}\,,$$

а під $\|\cdot\|$ розуміється звичайна евклідова норма.

Визначення 3.4. Нечітка множина $\widetilde{Y}_0 = \{(y\,|\,\mu(y)) : y \in Y_0\}$ називається асимптотично стійкою, якщо вона є стійкою, і для будь-якої траєкторії $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $x_0 \notin Y_0$,тієї ж системи, справедливі співвідношення

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} d(x_k, Y_0) = 0\,,\ k = 0,1,2,\ldots,\\ &\lim_{k\to\infty} \mu(x_k) = 1\,,\ k = 0,1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Позначимо множину граничних точок множини Y_0 через ∂Y_0.

Твердження 2. Якщо система (2.9) не має регулярної траєкторії, і для нечіткої множини початкових станів траєкторій $\widetilde{Y}_0$ існують функції $V\!:X\to[0,1]$ та $G\!:[0,1]\to[0,1]$ такі, що для будь-якої траєкторії системи (2.9) $\{x_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$, $x_0 \notin Y_0 = \operatorname{supp} \widetilde{Y}_0$ виконуються нерівності

$$V(x_k) = 0,\ x_k \in \partial Y_0\,,\ V_k = V(x_k) \geq 0\,,\ \Delta V_k = V_{k+1} - V_k \leq 0\,,$$

$$G_k = G(\mu_k) \geq 0\,,\ \Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\, 0\,, \tag{3.11}$$

то $\widetilde{Y}_0$ є стійкою (асимптотично стійкою) за Ляпуновим.

Доведення. Надалі будемо працювати з множиною траєкторій, системи (2.9), початкові стани яких $x_0 \notin Y_0$. В околі множини Y_0 функція V має мінімум, тому можна знайти будь-яке значення $c > 0$ таке, що нерівностям $V_k \leq c,\ k = 0,1,2,\ldots$, буде задовольняти множина траєкторій, серед яких знаходиться і довільна траєкторія з початковим станом $x_0 \in Y_0$. Нехай $\varepsilon > 0$. У випадку, коли $0 < c \leq \varepsilon$, множина траєкторій, що задовольняє рівнянню $V_k \leq c$, буде задовольняти і рівнянню $V_k \leq \varepsilon$. Через те що $c \neq 0$, можна знайти таке $\delta > 0$, що множина траєкторій, які задовольняють нерівностям

$$V_k \le \delta \,, \tag{3.12}$$

будуть задовольняти і $V_k \le c,\ k = 0,1,2,\ldots$. Тому, якщо всі початкові траєкторії будуть задовольняти (3.12), то і при $t_k > \overline{T}$ всі траєкторії системи будуть також задовольняти нерівностям $V_k \le c$, $k = 0,1,2,\ldots$, в силу твердження, за яким $\Delta V_k \le 0,\ k = 0,1,2,\ldots$.

Розглянемо функцію G .

Для того щоб множина Y_0 була стійкою (асимптотично стійкою) за значеннями функції належності μ , достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$\mu_{k+1} \ge (>)\, \mu_k\,, t_k > \overline{T},\ \ k = 0,1,2,\ldots,\ \ \forall\, x_0 \notin Y_0\,. \tag{3.13}$$

За умовами твердження значення функції $G(\mu_k) = G_k$, $k = 0,1,2,\ldots$, створюють послідовність, яка є незростаючою. На значеннях $x_k \in \partial Y_0$ функція $G(\mu)$ має строгий мінімум, тому можна знайти такі $\eta > 0,\ \varepsilon > 0$, що для всіх траєкторій в ε -околі $x_k \in \partial Y_0$, елементи яких мають функцію належності $\mu \in [1-\eta, 1]$, послідовність G_k , $k = 0,1,2,\ldots$, буде монотонно незростаючою. Тому умова твердження $G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = G_{k+1} - G_k \le$ $\le (<)\, 0$, $k = 0,1,2,\ldots$, забезпечує виконання (3.13). ■

Випадок 2. Нарешті припустимо, що неможливо виділити множину Y_0 початкових станів усіх траєкторій, для яких існує такий момент часу t_k , що $\mu(x_k) = 1$. У цьому випадку потрібно говорити про стійкість заданої нечіткої множини $\widetilde{X}_0$.

Визначення 3.5. Нечітка множина $\widetilde{X}_0 = \{(x \mid \mu(x)) : x \in X_0\}$ називається стійкою за Ляпуновим за степенем належності, якщо $\forall\, \overline{T} > 0$, $\forall\, \eta > 0$, $\exists \gamma(\eta, \overline{T}) > 0$ і для довільного розв'язку $\widetilde{X}_k^1 = \{(x, \mu_k^1(x)) : x \in X\}_{k=0,1,2,\ldots}$ системи (2.9), початкове значення якого задовольняє умові

$$\max_{x \in X} \left| \mu_0^0(x) - \mu_0^1(x) \right| < \gamma\,, \tag{3.14}$$

для $\forall\, k : t_k \ge \overline{T}$ справедливе

$$\max_{x \in X} \left| \mu_k^0(x) - \mu_k^1(x) \right| < \eta\,, \quad k = 0,1,2,\ldots\,,$$

$$\left(\lim_{k \to \infty} \max_{x \in X} \left| \mu_k^0(x) - \mu_k^1(x) \right| = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots \right). \tag{3.15}$$

Твердження 3. Якщо для нечіткої множини $\widetilde{X}^0$ початкових станів нечіткої дискретної системи (2.9) існує функція $G : [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0,1] \to [0,1]$ така, що для будь-якого розв'язку системи (2.9) $\widetilde{X}_k^1$, $k = 0,1,2,\ldots$, $\mu_0^1(x) \ne$ $\ne \mu_0^0(x),\ x \in X$ виконуються нерівності

$$G_k = G(\mu_k^1(x)) \geq 0, \ \ x \in X \, ,$$

$$\Delta G_k = G_{k+1} - G_k \leq (<)\, 0 \, , \qquad (3.16)$$

то нечітка множина $\widetilde{X}_0$ стійка (асимптотично стійка) за степенем належності.

Доведення. Нехай $\widetilde{X}_k^0 = \left\{\left(x, \mu_k^0(x)\right): x \in X\right\}_{k=0,1,2,...}$ — розв'язок системи (2.9) з початковими значеннями у вигляді нечіткої множини $\widetilde{X}^0$. Тоді для довільного розв'язку $\widetilde{X}_k^1$, $k = 0,1,2,...$, $\mu_0^1(x) \neq \mu_0^0(x)$, $x \in X$ можна визначити функцію $G_k = G(\mu_k^1)$, $k = 0,1,2,...$, у вигляді

$$G_k = \max_{x \in X} \left|\mu_k^0(x) - \mu_k^1(x)\right|, \ \ k = 0,1,2,... \, . \qquad (3.17)$$

За умовами твердження функція G_k, $k = 0,1,2,...$, є незростаючою (спадною) по k , що гарантує існування для будь-яких $\overline{T} > 0$ і $\eta > 0$ величини $\gamma(\eta, \overline{T}) > 0$, коли буде справедливим виконання співвідношень (3.14), (3.15). За означенням отримуємо стійку $\widetilde{X}^0$ (асимптотично стійку) за степенем належності. ■

Приклад. Розглянемо динамічний процес, який описується нечіткою дискретною системою

$$\widetilde{X}_{k+1} = R_k \circ \widetilde{X}_k \, , \ \ k = 0,1,2,... \, ,$$

$$x_k \in \operatorname{supp} \widetilde{X}_k = \left[a_k, b_k\right] \subseteq X = \left[-1,1\right], \ \ k = 0,1,2, \, ... \, ,$$

$$a_{k+1} = \sin(a_k), \ \ b_{k+1} = \sin(b_k), \ \ a_0 = -1, \ \ b_0 = 1 \, , \qquad (3.18)$$

$$\mu_k = \begin{cases} \cos(x_k), & x_k \in \left[a_k, b_k\right], \\ \cos(x_{k-1}), & x_k \notin \left[a_k, b_k\right]. \end{cases}$$

Траєкторія, елементи якої $x_k = 0$, $k = 0,1,2,...$, є регулярною траєкторією системи.

Оберемо для РТС $V_k = x_k^2$ і $G_k = \mu_k^2$, $k = 0,1,2,...$. Перевіримо умови твердження 1. Для довільного $\forall k = 0,1,2,...$ маємо

1) $V_k = x_k^2 \geq 0$;

2) $V(\overline{x}_k) = V(0) = 0$;

3) $\Delta V_k = V(x_{k+1}) - V(x_k) = x_{k+1}^2 - x_k^2 = \sin^2(x_k) - x_k^2 \leq 0$;

4) $G_k = \cos^2(x_k) \geq 0$;

5) $\Delta G_k = G(\mu_{k+1}) - G(\mu_k) = \cos^2(x_{k+1}) - \cos^2(x_k) = \cos^2(\sin(x_k)) -$ $- \cos^2(x_k) \leq 0$.

Тоді, за умовами твердження 1, система (3.17) має стійкий тривіальний розв'язок, який є регулярною траєкторією системи.

ВИСНОВКИ

Розгляд чітких траєкторій для аналізу стійкості нечітких систем не враховує важливої особливості — характеру змін функцій належності елементів нечітких множин. У ряді задач якісного дослідження нечітких систем динаміка змін функції належності має принципове значення.

У даній роботі проведено дослідження традиційного поняття стійкості розв'язків нечітких дискретних систем за допомогою другого методу Ляпунова. Введено визначення стійкості для різних випадків функціонування нечітких систем. На основі застосування методів прийняття рішень запропоновано алгоритми обчислення значень функції належності з метою забезпечення моделювання динаміки нечітких систем. Із використанням функцій Ляпунова спеціального вигляду доведено твердження про умови стійкості в дискретних нечітких системах. Отримані умови узагальнюють відомі результати щодо чітких систем.

Наведені результати були використані при дослідженні динаміки систем прийняття рішень і моделюванні процесів поведінки плазми у приелектродному шарі.

Робота виконана за підтримки фонду фундаментальних досліджень. (Проект Державного комітету науки і техніки України 01.07/00081.)

ЛІТЕРАТУРА

1. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets //Information and control. — 1965. — **8**. — P. 338–353.
2. *Glas M.* Theory of fuzzy systems //Fuzzy Sets and Systems. — 1983. — **10**. — P. 65–77.
3. *Чуличков А.И.* Математические модели нелинейной динамики. — М: Физматлит, 2000. — 294 с.
4. *Меренков Ю.Н.* Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. — М.:Ун-т Др. Нар., 2000. — 123 с.
5. *Пушков С.Т.* Об общей теории нечетких систем: глобальное состояние и нечеткая глобальная реакция нечеткой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2001. — №5. — С. 105–109.
6. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 206 с.
7. *Lakshmikantham V.* Uncertain Systems and Fuzzy Differentail Equation // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2000. — № 2 (12), **6**. — С. 22–33.
8. *Борисов А.Н.* Принятия решений на основе нечетких моделей. — Рига: Зинатне, 1990. — 184 с.
9. *Кудинов Ю.Н.* Нечеткие системы управления // Изв. РАН. Технич. кибернетика. — 1990. — № 5. — С. 196–206.
10. *Cao Y.Y., Frank P.M.* Stability analisis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models // Fuzzy Sets and Systems. — 2001. — № 124. — P. 213–229.

Надійшла 11.06.2004